This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com

Over dit boek

Dit is een digitale kopie van een boek dat al generaties lang op bibliotheekplanken heeft gestaan, maar nu zorgvuldig is gescand door Google. Dat doen we omdat we alle boeken ter wereld online beschikbaar willen maken.

Dit boek is zo oud dat het auteursrecht erop is verlopen, zodat het boek nu deel uitmaakt van het publieke domein. Een boek dat tot het publieke domein behoort, is een boek dat nooit onder het auteursrecht is gevallen, of waarvan de wettelijke auteursrechttermijn is verlopen. Het kan per land verschillen of een boek tot het publieke domein behoort. Boeken in het publieke domein zijn een stem uit het verleden. Ze vormen een bron van geschiedenis, cultuur en kennis die anders moeilijk te verkrijgen zou zijn.

Aantekeningen, opmerkingen en andere kanttekeningen die in het origineel stonden, worden weergegeven in dit bestand, als herinnering aan de lange reis die het boek heeft gemaakt van uitgever naar bibliotheek, en uiteindelijk naar u.

Richtlijnen voor gebruik

Google werkt samen met bibliotheken om materiaal uit het publieke domein te digitaliseren, zodat het voor iedereen beschikbaar wordt. Boeken uit het publieke domein behoren toe aan het publiek; wij bewaren ze alleen. Dit is echter een kostbaar proces. Om deze dienst te kunnen blijven leveren, hebben we maatregelen genomen om misbruik door commerciële partijen te voorkomen, zoals het plaatsen van technische beperkingen op automatisch zoeken.

Verder vragen we u het volgende:

+ *Gebruik de bestanden alleen voor niet-commerciële doeleinden* We hebben Zoeken naar boeken met Google ontworpen voor gebruik door individuen. We vragen u deze bestanden alleen te gebruiken voor persoonlijke en niet-commerciële doeleinden.

+ *Voer geen geautomatiseerde zoekopdrachten uit* Stuur geen geautomatiseerde zoekopdrachten naar het systeem van Google. Als u onderzoek doet naar computervertalingen, optische tekenherkenning of andere wetenschapsgebieden waarbij u toegang nodig heeft tot grote hoeveelheden tekst, kunt u contact met ons opnemen. We raden u aan hiervoor materiaal uit het publieke domein te gebruiken, en kunnen u misschien hiermee van dienst zijn.

+ *Laat de eigendomsverklaring staan* Het "watermerk" van Google dat u onder aan elk bestand ziet, dient om mensen informatie over het project te geven, en ze te helpen extra materiaal te vinden met Zoeken naar boeken met Google. Verwijder dit watermerk niet.

+ *Houd u aan de wet* Wat u ook doet, houd er rekening mee dat u er zelf verantwoordelijk voor bent dat alles wat u doet legaal is. U kunt er niet van uitgaan dat wanneer een werk beschikbaar lijkt te zijn voor het publieke domein in de Verenigde Staten, het ook publiek domein is voor gebruikers in andere landen. Of er nog auteursrecht op een boek rust, verschilt per land. We kunnen u niet vertellen wat u in uw geval met een bepaald boek mag doen. Neem niet zomaar aan dat u een boek overal ter wereld op allerlei manieren kunt gebruiken, wanneer het eenmaal in Zoeken naar boeken met Google staat. De wettelijke aansprakelijkheid voor auteursrechten is behoorlijk streng.

Informatie over Zoeken naar boeken met Google

Het doel van Google is om alle informatie wereldwijd toegankelijk en bruikbaar te maken. Zoeken naar boeken met Google helpt lezers boeken uit allerlei landen te ontdekken, en helpt auteurs en uitgevers om een nieuw leespubliek te bereiken. U kunt de volledige tekst van dit boek doorzoeken op het web via `http://books.google.com`

Q
07
35+
er 3
.6-7

ANNEX
LIBRARY
C
008411

CORNELL
UNIVERSITY
LIBRARY

CORNELL UNIVERSITY LIBRARY
3 1924 057 555 280

ARCHIVES

DU

MUSÉE TEYLER

SÉRIE III, VOL. VI.

HAARLEM. — LES HÉRITIERS LOOSJES.
1929.

Q
57
T35.t
Ser. 3
v. 6-7

MS

4019560
302

TABLE DES MATIÈRES

DU VOLUME VI.

Fondation de P. Teyler van der Hulst à Haarlem. III

Programmes des Sociétés Teyleriennes V

H. A. **Lorentz**, Application de la théorie des électrons aux propriétés des métaux 1

K. **Lambrecht**, Fluorographische Beobachtungen an den „elastischen Fasern" des Pterosaurier-patagiums (mit 2 Tafeln) 40

A. D. **Fokker**, Inleiding tot de golvings- en de quantummechanica 51

A. **Schreuder**, *Conodontes (Trogontherium)* and *Castor* from the Teglian Clay compared with the Castoridae from other localities (with 16 Plates) 99

Aus den Beständen der Niedersächs. Staats- und Universitätsbibliothek ausgeschieden.
Göttingen, den 10. AUG. 1966

ARCHIVES

DU

MUSÉE TEYLER

SÉRIE III, VOL. VI.

FASCICULE 1.

H. A. Lorentz, Application de la Théorie des Électrons aux Propriétés des Métaux 1
K. Lambrecht, Fluorographische Beobachtungen an den „elastischen Fasern" des Pterosaurier-patagiums (mit 2 Tafeln) 40

HAARLEM. — LES HÉRITIERS LOOSJES.
1928.

ARCHIVES

DU

MUSÉE TEYLER

SÉRIE III, VOL. VI.

HAARLEM. — LES HÉRITIERS LOOSJES.
1928.

FONDATION

DE

P. TEYLER VAN DER HULST

à HAARLEM.

1928

Directeurs: J. A. Fontein, président; Vincent Loosjes; Mr. W. Cnoop Koopmans; J. C. Tadema, Mr. C. W. Thöne.

Secrétaire: Mr. W. F. C. C. Pijnacker Hordijk.

Trésorier: J. J. Doeglas.

Curateur du Laboratoire de Physique: Prof. dr. A. D. Fokker.

Conservateur du Cabinet de Physique: . . . .

Curateur du Cabinet de Paléontologie et de Minéralogie: Prof. Dr. Eug. Dubois.

Bibliothécaire: Mademoiselle H. C. Dorhout Mees.

Second Bibliothécaire: R. Lorentz.

Conservateur des Collections de tableaux, de dessins et de gravures: H. Buisman.

Conservateur du Cabinet numismatique: A. O. van Kerkwijk.

MEMBRES DES SOCIÉTÉS TEYLÉRIENNES.

Première Société ou Société de théologie: Dr. J. G. Boekenoogen, président; P. Feenstra; Prof. Dr. H. U. Meyboom; Prof. Dr. J. G. Appeldoorn; Prof. Dr. H. Hackmann; A. Binnerts Sen.

Seconde Société: Prof. Dr. P. J. Blok, président; Prof. Dr. Hugo de Vries; A. O. van Kerkwijk; Dr. C. Hofstede de Groot; Prof. Dr. J. W. Muller; Prof. Dr. A. D. Fokker.

PROGRAMMA VAN TEYLER'S GODGELEERD GENOOTSCHAP TE HAARLEM,

VOOR HET JAAR 1923.

Vastgesteld in de vergadering van 18 October 1922.

Directeuren van Teyler's Stichting en de Leden van Teyler's Godgeleerd Genootschap deelen mede, dat geen antwoord is ingekomen op de prijsvraag:

Eene oordeelkundige beschrijving van de onderscheidene geestelijke stroomingen in den kring van het Protestantisme in Nederland sedert het begin der 19de eeuw.

Uitgeschreven blijven de volgende prijsvragen:
I. Om beantwoord te worden vóór 1 Januari 1923:

De verhouding tusschen de Oostersche en de Westersche beschaving in wijsgeerig, godsdienstig en zedelijk opzicht.

II. Om beantwoord te worden vóór 1 Januari 1924:

„De verlossings- en heilsgedachte uit Vrijzinnig Protestantsch oogpunt".

Als nieuwe prijsvraag, ter beantwoording vóór 1 Januari 1925, is uitgeschreven:

„Het Christusprobleem — zijn kern en zijne beteekenis voor het geestelijk leven der menschheid".

VOOR HET JAAR 1924.

Directeuren van TEYLER'S STICHTING en de Leden van TEYLER'S GODGELEERD GENOOTSCHAP hebben in hunne vergadering van 1 Nov. 1923 uitspraak gedaan over één in het Duitsch geschreven antwoord, ingezonden op de prijsvraag:

> De verhouding tusschen de Oostersche en de Westersche beschaving in wijsgeerig, godsdienstig en zedelijk opzicht.

Dit onder de kenspreuk „Ex oriente lux" ingekomen antwoord zou als opstel voor een tijdschrift niet onverdienstelijk zijn, want de auteur schrijft niet zonder geest en kennis; maar het is slechts eene fragmentarische, niet gedocumenteerde schets en reeds daarom uit een wetenschappelijk oogpunt onvoldoende. De grenzen, door den schrijver getrokken tusschen „Oostersche" en „Westersche" beschaving, en de grepen, die hij uit de stof doet, getuigen van willekeur. Zijn pogingen, om de verschillende verschijnselen af te leiden uit enkele primaire natuurlijke en psychologische oorzaken, bevredigen niet. Tot ons leedwezen kan deze in vele opzichten verdienstelijke arbeid niet voor eene bekroning in aanmerking komen.

Uitgeschreven blijven de volgende prijsvragen:

I. Om beantwoord te worden vóór 1 Januari 1924:

> „De verlossings- en heilsgedachte uit Vrijzinnig Protestantsch oogpunt".

II. Om beantwoord te worden vóór 1 Januari 1925:

> „Het Christusprobleem — zijn kern en zijne beteekenis voor het geestelijk leven der menschheid".

Als nieuwe prijsvraag, ter beantwoording vóór 1 Januari 1926, is uitgeschreven:

De verhouding tusschen gezag en persoonlijke vrijheid en zelfstandigheid op het gebied van het geestelijk leven.

VOOR HET JAAR 1925.

Directeuren van TEYLER'S STICHTING en de Leden van TEYLER'S GODGELEERD GENOOTSCHAP hebben in hunne vergadering van 16 October uitspraak gedaan over vijf antwoorden, ingezonden op de prijsvraag:

De verlossings- en heilsgedachte uit Vrijzinnig Protestantsch oogpunt.

Twee daarvan, in het Nederlandsch geschreven, het ééne onder het motto: „Civis", twee folio-bladzijden, het andere met de kenspreuk: „In den beginne was het Woord", negen bladzijden groot, konden voor bekroning niet in aanmerking komen.

Evenmin was dat het geval met de in het Duitsch geschreven verhandeling onder het motto Joh. 8^{36}. Niet slechts voldoet deze niet aan den eisch, dat de prijsantwoorden met latijnsche letter geschreven moeten zijn, maar zij is van oppervlakkigheid niet vrij te pleiten.

Degelijker werk is de vierde verhandeling, eveneens in het Duitsch, met de kenspreuk: Joh. 8^{32}. In deze verhandeling, die van veel belezenheid en kennis blijk geeft, vindt men een zeer goed overzicht van de ontwikkeling der verlossings- en heilsgedachte in de nieuwere theologie, uitgaande van Schleiermacher. Maar in het systematische deel geeft de schrijver over het wezen der verlossing grondgedachten, die uit vrijzinnig protestantsch oogpunt niet te rechtvaardigen zijn. Om gelijke reden konden de bladzijden over het werk van Christus de goedkeuring niet wegdragen. Zoo kon deze verhandeling voor bekroning niet in aanmerking komen.

Daarentegen erkende men in het vijfde, wederom in het Duitsch geschreven verhandeling, met de kenspreuk: Rom. 7^{6}, eene eerlijke poging tot onbevooroordeeld onderzoek van de verlossings- en heilsgedachte naar de wijsgeerig kritische methode, die uit vrijzinnig protestantsch oogpunt vereischt wordt, eene poging, welke bovendien zeer verdienstelijk is geslaagd en een helder licht op de hierbij in aanmerking komende problemen doet vallen. De schrijver beweegt zich meer op het terrein der wijsbegeerte dan op dat der eigenlijke theologie. Ten gevolge daarvan heeft zijn werk eenige leemten. De wijze, waarop Jezus als de Menschenzoon geteekend wordt, ontmoette bedenking. Het bezwaar werd gemaakt, dat, in afwijking van de prijsvraag, de heilsgedachte door hem op den voorgrond is geplaatst en eerst daarna de verlossing en wat daarmede samenhangt ter sprake komt. Evenwel, de verdiensten overtreffen de mogelijke tekortkomingen verre, zoodat deze verhandeling de bekroning is waardig gekeurd. Bij de opening van het naambriefje bleek de schrijver te zijn: Lic. theol. Dr. WILHELM KOPPELMANN, Ordentl. Honorarprofessor f. Philosophie an der Universität Münster.

Uitgeschreven blijven de volgende prijsvragen:

I. Om beantwoord te worden vóór 1 Januari 1925:

Het Christusprobleem — zijn kern en zijn beteekenis voor het geestelijk leven der menschheid.

II. Om beantwoord te worden vóór 1 Januari 1926:

De verhouding tusschen gezag en persoonlijke vrijheid en zelfstandigheid op het gebied van het geestelijk leven.

Als nieuwe prijsvraag, ter beantwoording vóór 1 Januari 1927 is uitgeschreven:

Oorsprong, waarde en toekomst van buitenkerkelijke godsdienstigheid.

VOOR HET JAAR 1926.

Directeuren van **Teyler's Stichting** en de Leden van **Teyler's Godgeleerd Genootschap** deelen mede, dat geen antwoord is ingekomen op de prijsvraag:

Het Christusprobleem — zijn kern en zijn beteekenis voor het geestelijk leven der menschheid.

Uitgeschreven blijven de volgende prijsvragen:
I. Om beantwoord te worden vóór 1 Januari 1926:

De verhouding tusschen gezag en persoonlijke vrijheid en zelfstandigheid op het gebied van het geestelijk leven.

II. Om beantwoord te worden vóór 1 Januari 1927:

Oorsprong, waarde en toekomst van buitenkerkelijke godsdienstigheid.

Als nieuwe prijsvraag, ter beantwoording vóór 1 Januari 1928 is uitgeschreven:

Eene kritische verhandeling over het boek van Prof. R. Otto, „Das Heilige".

VOOR HET JAAR 1927.

Directeuren van **Teyler's Stichting** en de Leden van **Teyler's Godgeleerd Genootschap** deelen mede, dat zij in hunne vergadering van 21 October 1926 uitspraak hebben gedaan over vier antwoorden, ingezonden op de prijsvraag:

De verhouding tusschen gezag en persoonlijke vrijheid en zelfstandigheid op het gebied van het geestelijk leven.

Geen dezer antwoorden kon voor bekroning in aanmerking komen Het eerste, onder het motto: „Natural liberty of mankind must be restrained by Law enz.", meende het probleem op 3 à 4 foliobladzijden te kunnen oplossen enkel door den verder niet toegelichten wensch, dat allen lid mochten worden van de Nederlandsch Hervormde Kerk.

De tweede verhandeling onder het motto: „Zoek en gij zult vinden", gekenmerkt door onduidelijken stijl en dikwijls zeer verward, verraadt te zeer den ongeoefenden schrijver en ongeschoolden lezer, die bovendien onder den invloed van onklare theosophische leeringen staat.

Het derde antwoord, onder het motto: „Veni Creator Spiritus" is te karakteriseeren als het geloofsgetuigenis van een autodidact, die soms zonderlinge vergissingen begaat en wiens onklare uiteenzetting, zonder eenige onderbreking voortloopend, uiterst moeilijk te volgen is.

De vierde verhandeling onder een Spaansch motto: „Querria enz." verraadt wellicht de meeste belezenheid en kennis, maar daar ze zich beperkte tot eene beschouwing over Nederlandsch staatsrecht, kon ook zij niet een prijs waardig worden gekeurd.

Uitgeschreven blijven de volgende prijsvragen:

I. Om beantwoord te worden vóór 1 Januari 1927:

Oorsprong, waarde en toekomst van buitenkerkelijke godsdienstigheid.

II. Om beantwoord te worden vóór 1 Januari 1928:

Eene kritische verhandeling over het boek van Prof. R. Otto, „Das Heilige".

VOOR HET JAAR 1928.

Directeuren van Teyler's Stichting en de Leden van Teyler's Godgeleerd Genootschap deelen mede, dat zij in hunne vergadering van 12 October 1927 uitspraak hebben gedaan over drie antwoorden, ingezonden op de prijsvraag:

Oorsprong, waarde en toekomst van buitenkerkelijke godsdienstigheid.

Geen dezer antwoorden kon voor bekroning in aanmerking komen. Het eerste onder het motto: „den leser salut" verried onmiddellijk dat de schrijver een man is zonder eenige wetenschappelijke kennis en vorming. Het tweede onder het motto: „Niets alles" was zoo mogelijk nog onbeduidender. Het derde, onder het motto: „solita, non obsoleta", liet den schrijver althans erkennen als een man, in het bezit van eenige gedachten en ook van het vermogen deze gedachten in goeden vorm uit te drukken, maar kon voor bekroning ook in de verste verte niet in aanmerking komen, omdat aan zijne verhandeling de wetenschappelijke achtergrond ten eenenmale geheel ontbrak.

Uitgeschreven blijft de volgende prijsvraag:

I. Om beantwoord te worden vóór 1 Januari 1928:

Eene kritische verhandeling over het boek van prof. R. Otto, „Das Heilige".

Nieuw uitgeschreven worden de volgende prijsvragen:
II. Om beantwoord te worden vóór 1 Januari 1929:
Het Genootschap verlangt eene beantwoording van de vraag:

Verleenen de uitkomsten van het archaeologisch onderzoek in Babylonië, Palestina en Egypte inderdaad een steun aan de conservatieve Bijbelwaardeering?

III. Om beantwoord te worden vóór 1 Januari 1930:
Het Genootschap vraagt:

Eene kritische beschouwing over de nieuwere denkbeelden omtrent het begrip openbaring.

De prijs voor het best en voldoend gekeurd antwoord op deze vragen bestaat uit een gouden eerepenning op den stempel des Genootschaps geslagen, ter innerlijke waarde van vierhonderd gulden, of, zoo men daaraan de voorkeur mocht geven, in vierhonderd gulden. De prijs wordt uitgekeerd, zoodra de bekroonde verhandeling voor de pers gereed is.

De verhandelingen moeten in het Nederlandsch, Latijn, Fransch, Engelsch of Hoogduitsch, met eene *latijnsche* letter, vooral goed en leesbaar (door eene andere hand dan die van den auteur of met de schrijfmachine) geschreven zijn. Niet duidelijk geschreven verhandelingen worden ter zijde gelegd. Ook moeten zij op den bepaalden tijd *in haar geheel* worden ingezonden en geene antwoorden, waaraan eenig gedeelte bij de inlevering ontbreekt, zullen tot het dingen naar den gemelden eereprijs worden toegelaten. Alle ingezonden stukken blijven het eigendom van het Genootschap, dat de bekroonde, met of zonder vertaling, in zijne werken opneemt, zonder dat de schrijvers, anders dan met toestemming der Stichting, die mogen uitgeven. Ook behoudt het Genootschap aan zich het recht om van de niet bekroonde stukken zoodanig gebruik te maken als het raadzaam zal oordeelen, en wel: zonder of met vermelding van den naam des schrijvers, in het laatste geval echter niet zonder diens toestemming. Voorts worden geene afschriften van de niet-bekroonde stukken aan de schrijvers verstrekt dan op hunne kosten. De in te zenden antwoorden moeten, zonder naam en alleen met eene spreuk onderteekend, vergezeld van een verzegeld briefje, dezelfde spreuk ten opschrift voerende en van binnen opgaaf van des schrijvers naam en woonplaats behelzende, gezonden worden aan het *Fundatiehuis* van wijlen den Heer P. TEYLER VAN DER HULST te Haarlem. Het programma van het Genootschap is op aanvrage bij Heeren Directeuren van Teyler's Stichting jaarlijks omstreeks 15 November kosteloos verkrijgbaar.

PROGRAMMA VAN TEYLER'S TWEEDE GENOOTSCHAP TE HAARLEM

VOOR HET JAAR 1923.

DIRECTEUREN VAN TEYLER'S STICHTING en DE LEDEN VAN TEYLER'S TWEEDE GENOOTSCHAP hebben besloten voor het jaar 1923 de volgende prijsvraag uit te schrijven:

> Men verlangt een geschiedenis der Noord-Nederlandsche schilderkunst vóór 1600.

Het begrip schilderkunst is in dier voege te verstaan, dat ook muur- en glasschilderingen in het onderzoek worden betrokken en dat bij schilders van wie teeken- of prentwerk over is, ook aan deze zijde hunner werkzaamheid de noodige aandacht wordt geschonken.

Meent de schrijver dat er samenhang tusschen schilderkunst en boekverlichting bestaat, dan is het aantoonen daarvan een vereischte.

Het betoog zal in den vorm van een doorloopend overzicht moeten worden geschreven. Op volledige opgave der geschreven en gedrukte bronnen en op lijsten der bestaande en verloren gegane kunstwerken zal prijs worden gesteld.

De opgegeven tijdgrens 1600 bedoelt alleen een rond getal te geven. Meesters die nog na dat jaar geleefd en gewerkt hebben, zooals Karel van Mander († 1608), vallen binnen, meesters die, hoewel vrij vroeg in de 16de eeuw geboren, toch hoofdzakelijk in de 17de eeuw gewerkt hebben, zooals M. van Miereveld (1567—1640), buiten de grenzen. Bij wederom anderen, zooals Cornelisz. van Haarlem (1562—1638), zal op het overgangskarakter van hun kunst moeten worden gewezen.

De kenmerkende verschillen met de zusterschool in de zuidelijke provinciën zullen moeten worden nagespeurd; de draden die de kunst onzer groote bloeiperiode met hare voorgangster verbinden, moeten worden blootgelegd.

De antwoorden moeten worden ingezonden vóór of op den 1sten April 1925, opdat zij vóór den 1sten Mei 1926 kunnen beoordeeld worden.

VOOR HET JAAR 1924.

Directeuren van Teyler's Stichting en de Leden van Teyler's Tweede Genootschap hebben besloten voor het jaar 1924 de volgende prijsvraag uit te schrijven:

> Verlangd wordt eene beschrijving der gedenkpenningen in de Noordelijke Nederlanden vervaardigd tot het midden der 17de eeuw, met levensbijzonderheden van de makers dier penningen.

Bedoeld wordt om voor Noord-Nederland een werk te verkrijgen in den geest van Dr. Julien Simonis, l'Art du Médailleur en Belgique, Contributions à l'étude de son histoire depuis l'avènement de Charles le Téméraire au duché de Bourgogne, jusqu'au milieu du XVIe siècle, Bruxelles 1900, en de Nouvelles contributions à l'étude de son histoire (seconde moitié du XVIe siècle), van den zelfden schrijver in 1904 verschenen.

Bij de beschrijving der penningen zal gevoegd moeten worden eene verwijzing naar de werken waarin de stukken worden beschreven en afgebeeld, met de opgave van het metaal waarvan zij zijn vervaardigd, maat in millimeters en vermelding der openbare of particuliere verzameling waarin de stukken zich bevinden of, indien de origineele niet bekend zijn, de plaats waar van het stuk wordt melding gemaakt. (B.v. veilingcatalogus, boedelinventaris, enz.).

Het voornemen bestaat om het werk van eenige platen te voorzien, waarop in het bizonder nog weinig of niet bekende penningen zullen worden afgebeeld. De schrijver gelieve aan te geven welke stukken naar zijne meening voor afbeelding in aanmerking komen.

Bijaldien de thans uitgeschreven prijsvraag bekroond wordt, zal bij de eerstvolgende prijsvraag voor Penningkunde eene beschrijving van denzelfden aard verlangd worden van de gedenkpenningen der periode die op de thans behandelde volgt, van het midden der 17de tot aan het einde der 18de eeuw.

De prijs voor het best en voldoend antwoord bestaat in een gouden gerepenning, op den stempel des Genootschaps geslagen, ter innerlijke waarde van *f* 400, waarbij, als buitengewone toelage, een som van *f* 400 gevoegd zal worden tot tegemoetkoming in de kosten die aan de beantwoording der vraag verbonden zijn.

De antwoorden moeten worden ingezonden vóór of op den 1sten April 1926, opdat zij vóór den 1sten Mei 1927 kunnen beoordeeld worden.

VOOR HET JAAR 1925.

Directeuren van Teyler's Stichting en de Leden van Teyler's Tweede Genootschap hebben besloten voor het jaar 1925 de volgende prijsvraag uit te schrijven:

> Verlangd wordt een onderzoek van Ruusbroec's denkbeelden, stijl en taal, ook in vergelijking met die van andere, vooral Neder- en Overlandsche mystieke schrijvers.

Bedoeld is: een nader onderzoek van den letterkundigen vorm van Ruusbroec's geschriften, den aard en de herkomst van zijne verbeeldingsvormen, symboliek, beeldspraak, vergelijkingen, parallelisme, terminologie, woordvorming, zinsbouw, rhythme, rijm, enz.; ook in vergelijking met Dietsche en Duitsche mystici, als b.v. Hadewijch, Jan van Leeuwen, Eckart, Tauler, en met Latijnsche voorbeelden. Voorts is, wat de taal betreft, *niet* bedoeld eene volledige klank- en vormleer, doch alleen of vooral eene verzameling en bespreking der eigenaardige, gewestelijke bestanddeelen, die Ruusbroec's taal onderscheiden van die zijner Dietsche tijdgenooten.

De antwoorden moeten worden ingezonden vóór of op den 1sten April 1927, opdat zij vóór den 1sten Mei 1928 kunnen beoordeeld worden.

VOOR HET JAAR 1926.

Directeuren van Teyler's Stichting en **de Leden van Teyler's Tweede Genootschap** hebben besloten voor het jaar 1926 de volgende prijsvraag uit te schrijven:

> Men vraagt een kritisch overzicht en zoo mogelijk eene verduidelijking en verdere ontwikkeling van de moderne theorie der spectraallijnen, hetzij in haar geheelen omvang, hetzij met zoodanige beperking als den schrijver wenschelijk zal voorkomen.
> De bedoeling is dat ook een verhandeling die in het bijzonder de theorie van het Zeeman-effect, die van de bandenspectra, of een ander onderdeel tot onderwerp heeft, bij voldoende verdienste zal kunnen bekroond worden.

De antwoorden moeten worden ingezonden vóór of op den 1sten Augustus 1927, opdat zij voor den 1sten Mei 1928 kunnen beoordeeld worden.

VOOR HET JAAR 1927.

Directeuren van Teyler's Stichting en **de Leden van Teyler's Tweede Genootschap** hebben besloten voor het jaar 1927 de volgende prijsvraag uit te schrijven:

> Men vraagt eene geschiedenis van den Nederlandschen handel op den Levant in de zeventiende eeuw.

Wat de bronnen betreft, waarvan bij de beantwoording gebruik kan worden gemaakt, wordt verwezen naar de uitgave van dr.

K. HEERINGA in 's Rijks Geschiedkundige Publicatiën, No. 9, 10 en 34, en naar DE CASTRIES, Les sources inédites de l'histoire du Maroc.

De antwoorden moeten worden ingezonden vóór of op den 1sten April 1928, opdat zij voor den 1sten Mei 1929 kunnen beoordeeld worden.

VOOR HET JAAR 1928.

DIRECTEUREN VAN TEYLER'S STICHTING en DE LEDEN VAN TEYLER'S TWEEDE GENOOTSCHAP deelen mede, dat zij uitspraak hebben gedaan over een antwoord, ingezonden op de prijsvraag:

> Men vraagt een kritisch overzicht en zoo mogelijk eene verduidelijking en verdere ontwikkeling van de moderne theorie der spectraallijnen, hetzij in haar geheelen omvang, hetzij met zoodanige beperking als den schrijver wenschelijk zal voorkomen.

Dit antwoord, in de Engelsche taal gesteld, en gevolgd door eene opgave van schrijffouten en door eene controlerekening, was getiteld: „Concept of a new dynamical theory of electricity" en geteekend met de spreuk: „Sempre Crescendo".

De door den schrijver gekozen titel is reeds een aanduiding dat hij geen antwoord geeft op de gestelde vraag. Inderdaad blijkt bij inzage dat de schrijver wel tracht in de plaats van gevestigde wetenschappelijke inzichten en begrippen denkbeelden van eigen maaksel te stellen, maar dat noch de theorie der spectraallijnen in vollen omvang, noch een of ander onderdeel daarvan het onderwerp zijn zijner beschouwingen. Daar het opstel geenerlei proeve van antwoord op het in de prijsvraag gestelde bevat, is eene nadere ontleding overbodig en bekroning uitgesloten.

Directeuren van Teyler's Stichting en de Leden van Teyler's Tweede Genootschap hebben besloten voor het jaar 1928 de volgende prijsvraag uit te schrijven:

> Gevraagd wordt eene beschrijving van het leven en het werk van Jan Lievens.

De beteekenis van dezen stad- en tijdgenoot van Rembrandt en zijn plaats in de XVIIe eeuwsche Hollandsche schilderschool is tot dusver nog niet voldoende onderzocht en in 't licht gesteld.

Teneinde dit te doen zal men een overzicht van zijn uiterlijk leven moeten geven, zijn ontwikkeling als kunstenaar in zijn schilder-, teeken- en etswerk moeten aantoonen en den invloed moeten schetsen, dien hij op leerlingen, navolgers en andere tijdgenooten heeft uitgeoefend. Een beschrijvende en kritische lijst zijner werken en tekstueelen afdruk van de op hem betrekking hebbende vermeldingen bij tijdgenooten tot en met Houbrakens Groote Schouburgh wordt als Aanhangsel gewenscht.

De antwoorden moeten worden ingezonden vóór of op den 31sten Maart 1930, opdat zij voor den 1sten Mei 1930 kunnen beoordeeld worden.

De prijs voor het best en voldoend antwoord bestaat in een gouden eerepenning, op den stempel des Genootschaps geslagen, ter innerlijke waarde van *f* 400.

De verhandelingen moeten in het Nederlandsch, Fransch, Engelsch of Hoogduitsch, met eene *Latijnsche* letter, vooral goed en leesbaar geschreven zijn door eene *andere hand, dan die van den opsteller* (*of met de schrijfmachine*). Ook moeten zij vóór den bepaalden tijd *in haar geheel* worden ingezonden; geene antwoorden, waaraan eenig gedeelte bij de inlevering ontbreekt, zullen tot het dingen naar den gemelden eereprijs worden toegelaten.

Alle ingezonden stukken blijven het eigendom des Genootschaps, dat de bekroonde verhandelingen, met of zonder vertaling, in zijne werken opneemt, zonder dat de schrijvers, anders dan met toestemming der Stichting, die mogen uitgeven. Ook behoudt het Genootschap aan zich het recht om van de niet bekroonde stukken zoodanig gebruik te maken als het raadzaam zal oordeelen, hetzij zonder of met vermelding van den naam des schrijvers; in het laatste geval echter niet zonder zijne toestemming.

Ook worden geene afschriften van de niet bekroonde stukken aan de schrijvers verleend, dan te hunnen koste. De in te zenden antwoorden moeten, zonder naam en alleen met een spreuk onderteekend, vergezeld van een verzegeld briefje dezelfde spreuk ten opschrift voerende en van binnen des schrijvers naam en woonplaats behelzende, gezonden worden *aan het Fundatiehuis van wijlen den Heer* P. TEYLER VAN DER HULST *te Haarlem.*

CONFÉRENCES FAITES DANS LA FONDATION TEYLER

1928

A. D. FOKKER, INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE
ET À LA THÉORIE DES QUANTA.

H. A. LORENTZ.

APPLICATION DE LA THÉORIE DES ÉLECTRONS AUX PROPRIETÉS DES MÉTAUX. [1]

Dans les considérations suivantes sur les phénomènes électriques et calorifiques chez les métaux j'aurai en vue en premier lieu l'intime liaison qu'il y a entre les deux classes de phénomènes, liaison qui se montre dans le parallélisme entre les deux conductibilités et dans les effets thermo-électriques. Je me bornerai presque entièrement à des problèmes généraux et fondamentaux; je pourrai le faire d'autant plus parce qu'on trouvera dans le rapport de M. Bridgman la discusion de beaucoup de questions plus spéciales.

§ 1. **Théorie de Drude.** Nous pouvons commencer par la belle théorie sur les conductibilités électrique et calorifique que Drude publia en 1900. Selon les idées de ce physicien un courant électrique dans un métal consiste dans le transport d'électrons libres qui se meuvent dans les interstices intermoléculaires, l'électricité positive, qui est attachée aux atomes, restant en repos. Les électrons libres peuvent être comparés à un gaz, et on admet qu'ils participent à l'agitation moléculaire calorifique, leur énergie moyenne ayant la même valeur $\frac{3}{2} k T$ que celle d'une molécule gazeuse. Dans ce mouvement les électrons se heurtent continuellement aux atomes métalliques et on peut parler de la longueur moyenne l du chemin qu'ils peuvent parcourir en ligne droite. Or, si l'on connaît l, on peut déterminer la vitesse avec laquelle des électrons qui d'abord se trouvent ensemble dans un même élément de volume se répandent dans l'espace environnant. Si la température varie d'un point à un autre, cette „diffusion" des électrons produira un transport de chaleur et on calcule facilement la conductibilité qui en résulte et que Drude suppose être la seule qui existe dans le métal. Le coefficient de conductibilité est donné par la formule

---

[1] Rapport présenté au Quatrième Conseil de Physique de l'Institut International de Physique Solvay, à Bruxelles.

$$s = \frac{1}{2} k N l v \,, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

dans laquelle N représente le nombre d'électrons par unité de volume, et v la vitesse d'un électron correspondant à l'énergie cinétique $\frac{3}{2} k T$.

§ 2. Il y a une formule tout aussi simple pour la conductibilité électrique. Soient E la force électrique agissant sur le métal et $-e$ la charge d'un électron. Sous l'action de la force E, les électrons auront non seulement leurs vitesses d'agitation thermique; il s'y ajoutera une vitesse d'ensemble u dans la direction de E. Pour la calculer d'une façon approximative, on peut remarquer que le temps entre deux chocs successifs sera en moyenne $\frac{l}{v}$, ou peu s'en faut, et que, dans cet intervalle, la force électrique donnera à l'électron une vitesse

$$-\frac{eE}{m} \cdot \frac{l}{v} \,, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

si m est la masse de la particule. Cette vitesse dans la direction de E se perdra par le choc suivant, et si l'on considère qu'à un moment donné il y a des électrons qui sont au commencement d'un trajet de libre parcours, d'autres qui sont près de la fin d'un tel trajet et d'autres encore qui en ont parcouru une partie plus ou moins grande, on est amené à prendre pour la vitesse commune u la moitié de la vitesse (2) que nous venons de calculer. On trouve ainsi pour le courant

$$-Neu = \frac{Ne^2 l}{2mv} E$$

et pour la conductibilité

$$\sigma = \frac{Ne^2 l}{2mv}$$

ou bien, en vertu de la relation

$$\frac{1}{2} m\, v^2 = \frac{3}{2} k\, T\,,$$

$$\sigma = \frac{N\, e^2\, l\, v}{6\, k\, T} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

D'après ces formules le rapport des conductibilités serait

$$\frac{s}{\sigma} = 3 \left(\frac{k}{e}\right)^2 T \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

§ 3. **Vérifications.** *a.* D'après les mesures de JAEGER et DIESSELHORST une élévation de température de 18 ° C à 100 ° C, c'est-a-dire un changement de T dans le rapport de 1 à 1,28 fait changer la grandeur de $\frac{s}{\sigma}$ dans un rapport qui, pour différents métaux, varie entre 1,25 et 1,12.

b. Ces mêmes mesures ont donné pour l'argent à la température de 18 ° C. (σ étant exprimé en unités électromagnétiques)

$$\frac{s}{\sigma} = 686 \,.\, 10^8 \,.$$

Comme on a $k = 1{,}37 \,.\, 10^{-16}$; $e = 1{,}59 \,.\, 10^{-20}$ le second membre de la formule (4) devient, pour $T = 291$,

$$648 \,.\, 10^8 \,.$$

§ 4. **Théorie statistique.** Je ne m'étendrai pas sur les théories plus ou moins semblables qui ont été proposées par différents physiciens, mais je me permettrai de rappeler ici une méthode que j'ai suivie, il y a une vingtaine d'années, et qui a l'avantage, si défectueuse qu'elle soit, de permettre un traitement mathématique rigoureux. Elle consiste à appliquer aux électrons contenus dans un métal les considérations statistiques dont on se sert souvent dans la théorie cinétique des gaz.

Voici d'abord les hypothèses que j'ai introduites pour simplifier le problème.

a. Les atomes du métal sont des sphères rigides. Comme les électrons ils se comportent dans les rencontres comme des corpuscules parfaitement élastiques.

b. Les chocs mutuels entre électrons peuvent être négligés.

c. Pour un métal donné le nombre N des électrons libres, par unité de volume, est une fonction déterminée de la température, même dans le cas où cette dernière varie d'un point à un autre. On peut concevoir que ce nombre est déterminé par des régles analogues à celles qu'on applique aux équilibres chimiques. Dans un état stationnaire le nombre des électrons qui sont émis par les atomes est égal au nombre de ceux qui y entrent. On fait les calculs comme si c'étaient continuellement les mêmes électrons qui se trouvent en liberté.

d. Les atomes n'occupent qu'une petite partie du volume total.

e. Si les propriétés du métal ou la température ne sont pas partout les mêmes, leurs variations sont du moins très petites sur une distance de l'ordre de la longueur de libre parcours l. De plus, lorsqu'il y a des forces agissant sur les électrons, la vitesse qu'elles donnent à une particule pendant le parcours de la distance l est très petite par rapport à la vitesse de l'agitation calorifique.

§ 5. Considérons une barre cylindrique et choisissons l'axe des x dans la direction de sa longueur. Soient ξ, η, ζ les composantes de la vitesse v d'un électron et désignons par

$$f(\xi, \eta, \zeta)\, d\lambda\, dS \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

le nombre des électrons qui se trouvent dans l'élément de volume dS et pour lesquels les vitesses ξ, η, ζ sont comprises dans l'élément $d\lambda$ de l'extension ξ, η, ζ.

Si la fonction f est connue on peut calculer toutes les grandeurs qui interviennent dans les phénomènes. On aura pour le nombre d'électrons par unité de volume

$$N = \int f(\xi, \eta, \zeta)\, d\lambda\,, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

pour le „courant d'électrons" à travers un plan perpendiculaire à OX

$$P = \int \xi f(\xi, \eta, \zeta)\, d\lambda \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

et pour le courant d'énergie pour autant qu'il est dû au transport de l'énergie cinétique des électrons,

$$W = \frac{1}{2} m \int \xi\, v^2 f(\xi, \eta, \zeta)\, d\lambda \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

les intégrations s'étendant à l'extension ξ, η, ζ toute entière.

Soient maintenant X, Y, Z les composantes d'une force qui agit sur les électrons, et qui est censée être égale pour toutes les particules du groupe (5), $a\, d\lambda\, dS\, dt$ le nombre des électrons de ce groupe qui, dans le temps dt, frappent un atome et, par conséquent, sortent du groupe, et $b\, d\lambda\, dS\, dt$ le nombre des électrons que des chocs amènent à faire partie du groupe. Si l'état est stationnaire on aura l'équation

$$b - a = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{X}{m} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{Y}{m} + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\frac{Z}{m} + \frac{\partial f}{\partial x}\xi + \frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial z}\zeta \quad \ldots \quad (9)$$

qui servira à déterminer la fonction f.

§ 6. Le cas le plus simple est celui d'un métal homogène maintenu à une température uniforme et dans lequel les électrons ne sont soumis à aucune force. La fonction f, indépendante des coordonnées, est alors donnée par la loi de Maxwell:

$$f(\xi, \eta, \zeta) = A\, e^{-\frac{m v^2}{2 k T}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

ce qui amène $a = b$, de sorte que les deux membres de l'équation (9) s'annulent.

Entre la constante A et le nombre N il y a la relation

$$A = N\left(\frac{m}{2 \pi k T}\right)^{3/2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

§ 7. Nous supposerons maintenant que, dans la barre métallique, N et T sont des fonctions de la coordonnée x, et que les électrons sont assujettis à une force X dans le sens de la longueur. L'expression (10) ne satisfera plus à l'équation fondamentale. En effet, elle n'annule plus le second membre, tandis que l'égalité de a et de b subsiste.

Nous posons donc

$$f(\xi, \eta, \zeta) = A\, e^{-\frac{m v^2}{2 k T}} + \psi(\xi, \eta, \zeta), \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

où ψ reste à déterminer. Cette fonction se fait sentir dans le premier membre de (9), produisant une inégalité de a et de b. Au contraire, dans le calcul du second membre, on peut se borner au premier terme de (12) et négliger les grandeurs qui dérivent de ψ. C'est une conséquence de l'hypothèse e du § 4, en vertu de laquelle ψ peut être considéré comme une petite correction apportée au terme précédent.

Cela posé, voici la solution de l'équation fondamentale:

$$\psi(\xi, \eta, \zeta) = l \left[\frac{A}{k\,T} X - \frac{d\,A}{d\,x} - \frac{m\,v^2}{2\,k\,T^2} A \frac{d\,T}{d\,x}\right] \frac{\xi}{v} e^{-\frac{m\,v^2}{2\,k\,T}} \quad \ldots \; (13)$$

La grandeur l, qu'on peut appeler la longueur moyenne d'un trajet de libre parcours, a la valeur

$$l = \frac{1}{\pi\,n\,R^2},$$

où R est le rayon d'un atome, et n le nombre d'atomes par unité de volume.

Si l'on substitue la valeur de f dans les équations (6), (7) et (8) on trouve pour N une valeur conforme à la relation (11) et pour le courant d'électrons et le courant d'énergie

$$P = \frac{2}{3}\pi\,l \left(\frac{2\,k\,T}{m}\right)^2 \left[\frac{A}{k\,T} X - \frac{d\,A}{d\,x} - \frac{2\,A}{T}\frac{d\,T}{d\,x}\right], \quad \ldots \ldots \; (14)$$

$$W = 2\,k\,T\,P - \frac{2}{3}\pi\,m\,l \left(\frac{2\,k\,T}{m}\right)^3 \frac{A}{T}\frac{d\,T}{d\,x} \quad \ldots \ldots \; (15)$$

La seconde équation nous fait voir que, lors qu'il y a un courant électrique, il y a en même temps un transport d'énergie qui remonte à $2\,k\,T$ par électron. Rappelons à ce propos que dans un gaz qui se meut avec une petite vitesse uniforme, les molécules qui traversent un plan fixe perpendiculaire au courant, transportent une quantité d'énergie qui est, en moyenne, $\frac{5}{2}\,k\,T$ pour chaque particule [1]).

§ 8. **Conductibilités électrique et calorifique.** Si une barre homogène, maintenue à une température uniforme, est soumise à une force électrique longitudinale E, on a $\frac{d\,A}{d\,x} = 0$, $\frac{d\,T}{d\,x} = 0$,

---

[1]) On peut dire que $\frac{3}{2}\,k\,T$ correspond à l'augmentation de l'énergie qui se trouve dans le gaz situé d'un côté du plan, et $k\,T$ au travail dépensé sur un piston qui recule devant le courant.

$X = - e E$. En divisant le courant $- e P$ par E, on trouve le coefficient de conductibilité électrique:

$$\sigma = \frac{1}{3}\left(\frac{8 m}{\pi k T}\right)^{1/2} \frac{e^2}{m} N l \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Supposons ensuite que la température varie le long du cylindre. Si, d'abord, aucune force n'agit sur les électrons, il se produira un courant électrique déterminé par (14), mais dans une barre isolée les charges qui s'accumulent aux extrémités mettront bientôt fin à ce mouvement. Dans l'état final on aura $P = 0$, de sorte que le courant d'énergie se réduit au dernier terme de (15). Après substitution de la valeur de A, qu'on tire de la formule (11) on en déduit pour le coefficient de conductibilité

$$s = \frac{2}{3}\left(\frac{8 k^3 T}{\pi m}\right)^{1/2} N l \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Le rapport entre les conductibilités devient maintenant

$$\frac{s}{\sigma} = 2\left(\frac{k}{e}\right)^2 T,$$

ce qui se distingue de la formule de Drude, (4), par le facteur $\frac{2}{3}$. L'accord signalé au § 3, *b* en devient beaucoup moins satisfaisant.

§ 9. **Différences de potentiel dans un fil inégalement chauffé.** Dans ce qui suit, je supposerai qu'entre les atomes et les électrons libres il y a certaines forces en vertu desquelles un électron a par rapport au métal une énergie potentielle V, qui s'ajoute à l'energie potentielle $- e \varphi$, dépendant du potentiel électrique φ. C'est sans doute une hypothèse bien discutable (comp. § 19) et que j'introduis surtout pour la généralité; on peut d'ailleurs toujours poser $V = 0$. Prenant toujours l'axe des x le long du fil, ce qu'on peut faire même quand il est courbé, et remplaçant X par $-\frac{d V}{d x} + e \frac{d \varphi}{d x}$, on déduit de (14) la condition d'équilibre

$$\frac{d \varphi}{d x} = \frac{1}{e} \frac{d V}{d x} + G, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

où

$$G = \frac{k T}{e} \frac{d \log A}{d x} + \frac{2 k}{e} \frac{d T}{d x} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

Bien entendu, le terme $\frac{1}{e}\frac{dV}{dx}$ ne se présente que dans le cas où l'énergie potentielle V varie avec la température. Quelle que soit la loi de cette variation et de celle de N et de A, nos formules montrent que la différence de potentiel qui s'établit entre les extrémités du fil dépend seulement des températures auxquelles elles sont maintenues.

§ 10. **Différence de potentiel au contact de deux métaux 1 et 2**. Comme il a déjà été dit, nous imaginons une transition graduelle de l'un des métaux à l'autre, transition qui s'opère dans l'espace entre deux sections ω_1 et ω_2 suffisamment rapprochées l'une de l'autre pour que la température puisse être considérée comme égale dans toute l'étendue de ce „contact". Appliquons les formules (18) et (19), en introduisant la valeur (11) de A; cela nous donne

$$\varphi_2-\varphi_1=\frac{1}{e}(V_2-V_1)+\frac{kT}{e}\log\frac{N_2}{N_1}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(20)$$

§ 11. **Force électromotrice dans un circuit fermé.** Considérons maintenant un circuit formé des métaux 1 et 2 et dans lequel les soudures ont les températures T et T'. La direction positive sera celle dans laquelle on passe du métal 1 au métal 2 au travers du contact où la température est T'.

Après avoir ouvert le circuit par une coupure faite dans l'un des métaux nous verrons s'établir entre les extrémités une différence de potentiel qu'on calcule en prenant l'intégrale de l'expression (18) tout autour du circuit, et qui est la mesure de la „force électromotrice" F qui agit dans la circuit. On a donc

$$F=\frac{k}{e}\int T\frac{d\log A}{dx}dx,$$

ou bien, après une intégration par parties,

$$F=-\frac{k}{e}\int\log A\,.\,\frac{dT}{dx}dx.$$

Si, ici, on substitue la valeur de $\log A$ qu'on tire de (11), le terme avec $\log T$ disparaîtra par l'intégration.

Donc:

$$F=-\frac{k}{e}\int\log N\,.\,\frac{dT}{dx}dx.$$

Comme les „contacts” (§ 10) ne contribuent rien à cette intégrale, parce que, dans chacun d'eux, la température est constante, le calcul se borne aux parties homogènes de circuit.

Il est bien simple et conduit à l'équation

$$F = \frac{k}{e}\int_{T}^{T'} \log \frac{N_2}{N_1}\, d\, T \qquad (21)$$

qui nous apprend que la force électromotrice dépend uniquement des températures aux soudures et qui implique en outre la loi de la série des tensions.

Nos formules nous permettent aussi de calculer l'intensité i du courant thermo-électrique. Si la section du fil est ω, on a pour cette intensité $i = -e\,\omega\, P$, ou bien, en vertu de (14), (19) et (16)

$$i = \sigma\,\omega \left(G - \frac{d\varphi}{dx} + \frac{1}{e}\,\frac{d\,V}{d\,x} \right) \qquad (22)$$

Une intégration sur le contour du circuit nous donne ensuite

$$F = \int G\, d\,x = r\, i\,,$$

où

$$r = \int \frac{d\,x}{\sigma\,\omega}$$

est la résistance.

§ 12. **Développement de chaleur.** Calculons maintenant la quantité de chaleur qui se dégage par unité de temps dans un élément $d\,x$, c'est-à-dire la quantité qui doit être enlevée à l'élément pour que sa température reste constante. Elle se compose de deux parties, dont la première égale le travail des forces X qui agissent sur les électrons contenus dans l'élément, tandis que la seconde dépend des quantités d'énergie qu'il gagne et perd à ses extrémités, et peut être représentée par

$$-\frac{d}{d\,x}(W\,\omega)\, d\,x\,, \qquad (23)$$

où W est le courant d'énergie donné par (15).

Pour le travail des forces on peut écrire, en tenant compte de (22),

$$X\omega\, dx\,.\int \xi f(\xi, \eta, \zeta)\, d\lambda = X\omega P\, dx =$$

$$= \left(-\frac{d\varphi}{dx} + \frac{1}{e}\frac{dV}{dx}\right) i\, dx = \frac{i^2}{\sigma\omega} dx - G i\, dx,$$

et pour le courant d'énergie

$$W\omega = -\frac{2kT}{e} i - s\omega \frac{dT}{dx},$$

ce qui nous donne pour l'expression (23) la valeur

$$\frac{2ki}{e}\frac{dT}{dx} dx + \frac{d}{dx}\left(s\omega\frac{dT}{dx}\right) dx\,.$$

En combinant ces résultats on voit que dans la chaleur dégagée on peut distinguer trois parties.

La première $\frac{i^2}{\sigma\omega}$ n'est autre chose que la chaleur dont il s'agit dans la loi de Joule.

La deuxième partie

$$\frac{d}{dx}\left(s\omega\frac{dT}{dx}\right) dx$$

est indépendante du courant électrique. Elle provient de la conduction de la chaleur.

Enfin, il y a une troisième partie proportionnelle à l'intensité i du courant et changeant de signe avec ce dernier. Par unité de courant elle a la grandeur

$$\left(-G + \frac{2k}{e}\frac{dT}{dx}\right) dx = -\frac{kT}{e}\frac{d \log A}{dx} dx\,. \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Comme vérification on peut démontrer que l'intégrale de la somme des trois parties étendues au circuit entier est zéro.

§ 13. **Effet Peltier et effet Kelvin.** L'équation (24) va nous donner des expressions pour ces deux effets. Si d'abord on l'applique à un „contact" (§ 10) dont la température est T et dans lequel la direction positive du courant tend de 1 vers 2, on obtient pour le développement de chaleur par unité de temps et unité de courant

$$\Pi_{12} = -\frac{kT}{e} \log \frac{A_2}{A_1} = -\frac{kT}{e} \log \frac{N_2}{N_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

D'un autre côté, dans un métal homogène, un courant passant d'une section où la température est $T + d\,T$ à une autre où elle est T, développera une quantité de chaleur (pour $i = 1$)

$$\mu\, dT.$$

Le coefficient μ est ce que Kelvin a appelé la chaleur spécifique de l'électricité.

En vertu de (24) on peut écrire

$$\mu = \frac{k\,T}{e}\,\frac{d\,log\,A}{d\,T} = \frac{k\,T}{e}\,\frac{d\,log\,N}{d\,T} - \frac{3}{2}\,\frac{k}{e} \;\ldots\ldots \quad (26)$$

Il importe de remarquer que ces valeurs de Π_{12} et de μ satisfont à la relation

$$\mu_1 - \mu_2 = T\frac{d}{d\,T}\left(\frac{\Pi_{12}}{T}\right) \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

qui a été déduite de la seconde loi de la thermodynamique par Clausius et Kelvin. Cela vient de ce que l'expression (24) donne zéro si, après division par T, on en prend l'intégrale le long du circuit.

§ 14. **Modifications de la théorie précédente.** On pourrait essayer de s'affranchir de quelques-unes des restrictions mentionnées au § 4. On pourrait, par exemple, supposer que la fraction $1 - \frac{1}{\beta}$ du volume total qui est occupée par les atomes métalliques n'est pas très petite. Cela amènerait des complications considérables, mais parmis toutes les formules il y en a une qui reste bien simple.

On sait que la densité d'un gaz à température uniforme placé dans un champ de force où, par molécule, il y a une énergie potentielle X varie proportionnellement à $e^{-\frac{X}{k\,T}}$. Ce théorème peut être appliqué aux électrons qui se trouvent dans l'espace laissé libre par les atomes de deux métaux qu'on a mis en contact. Dans ce cas l'énergie potentielle est $-e\,\varphi + V$ et les densités dans les deux corps sont dans le rapport de $\beta_1 N_1$ à $\beta_2 N_2$. Par conséquent:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{1}{e}(V_2 - V_1) + \frac{k\,T}{e}\,log\,\frac{\beta_2\,N_2}{\beta_1\,N_1}, \;\ldots\ldots \quad (28)$$

au lieu de l'équation (20).

M. Bohr et M. Richardson ont montré que la théorie peut-être mieux adaptée aux observations si on suppose qu'au lieu de se comporter comme des sphères élastiques, les atomes du métal exercent sur les électrons une répulsion qui est inversement proportionnelle à une certaine puissance de la distance. Je n'insisterai pas sur les modifications qui résultent de cette manière de voir parce que, il faut bien le reconnaître, cette hypothèse d'une répulsion, tout aussi bien que celle des atomes élastiques, est peu conforme aux idées modernes sur la constitution des atomes. Le principal, ou le seul mérite que des théories comme celle que je viens d'exposer peuvent avoir encore, c'est qu'elles peuvent appeler notre attention sur des détails et des questions qui, autrement, nous échapperaient peut-être.

Du reste, pour qu'une théorie puisse nous satisfaire entièrement, il faut qu'elle rende compte, non seulement de la conductibilité, et des phénomènes thermo-électriques, mais aussi des effets qui se montrent dans un champ magnétique. On trouvera dans le rapport de M. Hall l'exposé d'une théorie qui embrasse toutes ces classes de phénomènes.

Disons encore quelques mots de la chaleur spécifique de l'électricité. Si, dans la formule (26), il n'y avait que le dernier terme, on aurait pour tous les métaux, $\mu = -12{,}6 \, . \, 10^3$ (en ergs par unité électromagnétique de courant). En réalité la chaleur spécifique de l'électricité est négative pour certains métaux et positive pour d'autres et les valeurs absolues mesurées sont considérablement inférieures au chiffre que nous venons de trouver; elles en dépassent rarement la dixième partie. Comme il est naturel de supposer que N augmente à mesure que la température s'élève, le terme

$$\frac{k\,T}{e}\,\frac{d\,\log\,N}{d\,T}$$

pourrait bien rendre compte de ces écarts.

Je ne veux pas prétendre que l'équation (26) soit la vraie formule, mais elle nous laisse entrevoir au moins la possibilité d'expliquer ce phénomène remarquable avec ses signes différents, sans avoir recours à l'hypothèse de particules mobiles à charges positives.

§ 15. **Nombre des électrons libres.** La formule (16) que nous avons trouvée pour la conductibilité électrique — ou bien la formule correspondante de Drude — peut nous renseigner sur le nombre N des électrons par unité de volume et sur la longueur moyenne l de leurs trajets de libre parcours, ou plutôt sur le produit de ces grandeurs. Supposons que le nombre N est égal au nombre des atomes métalliques, multiplié par un certain facteur α, et que l est γ fois la distance mutuelle des atomes (que nous considérerons comme formant un réseau cubique); alors l'équation nous permet de calculer $\alpha\gamma$ en partant de la conductibilité mesurée. Je trouve, par exemple, pour le cuivre à 18° C.

$$\alpha\,\gamma = 14.$$

Or, dans une théorie qui suppose que les électrons libres participent au mouvement calorifique, ils contribueront plus ou moins à la chaleur spécifique du métal et cela nous impose une restriction en ce qui concerne leur nombre. En effet, on peut rendre compte de la chaleur spécifique mesurée en faisant intervenir seulement l'agitation thermique des atomes et on trouverait donc une capacité calorifique trop grande si le nombre des électrons libres était du même ordre de grandeur que celui des atomes. Il faut donc nécessairement que α soit nettement inférieur à l'unité, ce qui entraîne pour le coefficient γ une valeur considérable. Soit, par exemple, $\alpha = 0{,}1$; le chemin libre des électrons devrait alors être égal à 140 fois la distance des atomes voisins, ce qui exigerait que le volume occupé par les atomes ne fût que la deux-millième partie du volume total. Comme cette hypothèse est inadmissible, on se trouve dans un impasse. Dès qu'on attribue aux atomes des dimensions plausibles, on se retrouve devant la difficulté de la chaleur spécifique.

§ 16. **Application de la théorie des quanta.** Dans le double but d'éviter cette difficulté et de rendre compte des changements de la conductibilité dans les métaux fortement refroidis, plusieurs physiciens, MM. Kamerlingh Onnes, Nernst, Lindemann, W. Wien et Keesom ont appliqué sous une forme ou une autre, la théorie des quanta. Les théories ainsi obtenues me semblent constituer un progrès indubitable mais il est difficile de les résumer brièvement. Je me bornerai donc à faire ressortir les idées fondamentales.

M. Wien a entièrement abandonné, pour les basses températures, l'idée d'un mouvement calorifique des électrons libres. Il maintient la formule (2) de Drude, mais il considère v comme une vitesse invariable dont les électrons sont animés, indépendamment de la température.

De son côté, M. KEESOM a appliqué la théorie des quanta comme il l'avait fait d'abord dans le cas d'un gaz monoatomique. Quant à la longueur moyenne l du trajet libre, elle sera toujours inversement proportionnelle au nombre des chocs d'un électron contre les atomes. On peut supposer que ces chocs proviennent uniquement de l'agitation thermique des atomes; au zéro absolu il n'y en aurait pas du tout et un électron pourrait se déplacer librement à travers le réseau cristallin (superconductibilité).

En appliquant la théorie des quanta comme M. DEBYE l'a fait dans ses études sur la chaleur spécifique des corps solides, on calcule l'amplitude des vibrations des atomes. Ensuite, en ce qui concerne la manière dont le nombre des chocs augmente avec cette amplitude, on peut faire différentes hypothèses, que M. WIEN élabore successivement. Dans l'une, qui est la plus simple, on admet que le nombre des chocs est proportionnel au carré de l'amplitude. Il en résulte, si on considère N comme indépendant de T, qu'à de basses températures la résistance est proportionnelle à T^2, ce qui paraît se vérifier avec une certaine approximation.

§ 17. **Constitution d'un métal.** Les recherches modernes ne laissent guère de doute sur l'image qu'on doit se former de la structure d'un métal. Nous considérerons les atomes comme composés chacun d'un noyau central positif et d'un nombre d'électrons qui circulent autour de ce noyau sous l'influence de l'attraction qu'il exerce et de leurs répulsions mutuelles. Les noyaux seront arrangés dans un réseau cristallin et seront maintenus dans leurs positions par des forces qui se manifestent dans la rigidité et l'élasticité du corps.

Il serait intéressant de savoir si ces forces „moléculaires" peuvent être entièrement ramenées à des actions électromagnétiques ou s'il y a lieu de penser aussi à des actions d'une autre nature. Cette question a été examinée par MM. BORN et LANDÉ pour le cas des cristaux réguliers, tels que ceux de $NaCl$, KCl, $LiCl$, etc. En se basant sur les vues de M. BOHR et en supposant que toute action entre les atomes résulte des attractions et des répulsions électriques, ces physiciens ont obtenu des résultats très remarquables. Ils ont réussi à calculer la distance des atomes, c'est-à-dire la densité, et le coefficient de compressibilité, et l'accord des nombres trouvés pour ces grandeurs avec les mesures est très satisfaisant. Cependant, il me semble y avoir encore de graves difficultés. Pour arriver aux résultats que je viens de mentionner, on a dû introduire entre les atomes, non seulement une force attractive, mais aussi une répulsion qui serait inversement proportionnelle à la neuvième puissance de la distance et qui, pourtant, est considérée comme une force centrale, agissant également dans toutes les directions. Or, il est impossible qu'une telle force provienne des actions électriques. De plus, dans les calculs de MM. BORN et LANDÉ, les mouvements des électrons autour des noyaux ne jouent aucun rôle, les électrons ayant été remplacés par des anneaux uniformément chargés, dont la révolution dans leur plan n'importe pas. Ainsi, en fin de compte, il s'agit d'un problème de statique. Mais, dans ces circonstances, on se trouve en contradiction avec le théorème bien connu d'EARNSHAW, d'après lequel un système de particules entre lesquelles il n'y a que des actions électrostatiques ne peut jamais être en équilibre stable.

§ 18. **Mouvement des électrons.** Heureusement, dans ce qui suit nous n'aurons guère à nous occuper des noyaux; c'est le déplacement des électrons qui nous intéressera surtout. Tant qu'une telle particule se trouve à l'intérieur d'un atome, son mouvement est réglé par des conditions de quanta; il est „quantifié" comme on dit. Or, évidemment, ces mouvements intérieurs ne nous sont d'aucune utilité pour l'explication de la conductibilité électrique.

Ce qui est bien certain, c'est que l'existence d'un courant prouve que l'ensemble des électrons contenus dans le métal a une certaine vitesse moyenne différente de zéro, dans une direction déterminée. Si v est cette vitesse, et N le nombre total des électrons (libres ou non) dans l'unité de volume, le courant sera Nev, de sorte qu'on peut calculer la vitesse v pour un courant donné, parce qu'on connaît le nombre N. Pour le cuivre il s'élève à $2{,}47.10^{24}$ par cm^3 (le nombre des atomes étant $8{,}52.10^{22}$ et le nombre atomique du cuivre 29). La charge négative totale de ce nombre d'électrons égale $3{,}91.10^4$, d'où l'on déduit que dans un fil d'une section de 1 mm^2 parcouru par un courant de 1 ampère, il y a une vitesse moyenne de $2{,}5.10^{-4}$ cm par seconde. Cela nous fait voir que, quel que soit peut-être leur chemin en zigzag, il doit y avoir des électrons qui, dans le temps d'une seconde, s'avancent sur des distances considérablement supérieures aux distances moléculaires. Même, après un temps suffisamment long, il doit y avoir des électrons individuels qui ont fait le tour entier du circuit.

Il est clair que, dans l'état naturel du métal, la vitesse moyenne v est zéro. Dans un conducteur ordinaire un mouvement d'ensemble des électrons ne peut exister que sous l'influence d'une force électrique E, et pour comprendre la proportionnalité de E et de v, c'est-à-dire la loi d'Ohm, il suffit de supposer que les changements qui se produisent dans les mouvements qui existaient déjà, peuvent être considérés comme infiniment petits; par cela même ils deviendront proportionnels à la force E qui en est la cause.

Du reste, le fait que, sous l'action d'une force électrique donnée E, la vitesse moyenne ne surpasse pas une grandeur déterminée v proportionnelle à E, prouve que les forces exercées sur la totalité des électrons par les noyaux, dont l'action peut être extrêmement compliquée dans les détails, donne lieu à une résultante opposée et proportionnelle à v. Si, par unité de volume, cette résultante (la force de résistance) a la grandeur $\mathrm{N} \varkappa v$, on aura dans l'état stationnaire

$$\mathrm{N} \varkappa v = \mathrm{N} e E, \quad v = \frac{e}{\varkappa} E,$$

et le coefficient de conductibilité sera donné par la formule

$$\sigma = \frac{\mathrm{N} e^2}{\varkappa}.$$

Il va sans dire que ce qui précède n'implique aucunement qu'un électron soit jamais continuellement libre. A un moment donné on trouvera certainement des électrons qui ont rompu les liens qui les attachaient à des noyaux, ce qui s'accorde avec le fait que les métaux prennent facilement l'état d'ions positifs, et il se peut qu'une telle particule reste libre quand il vient dans le voisinage d'un atome; on pourrait alors parler d'un choc. Mais il se peut aussi, et peut-être c'est là le seul cas qui se présente en réalité, que l'électron soit bientôt capturé par un atome, à l'intérieur duquel il décrira une orbite de Bohr, pour échapper ou pour passer à un atome voisin quelque temps plus tard. D'après cette manière de voir, ce seraient l'entrée d'un électron dans un atome et la sortie qui prennent la place des chocs de l'ancienne théorie; les forces exercées par les noyaux à l'occasion de ces déplacements constitueraient la force de résistance.

Nous pouvons rappeler ici la théorie développée, il y a bien des années déjà, par M. J. J. Thomson, dans laquelle on admet qu'une force électrique détermine un alignement des atomes, qui sont considérés comme des doublets électriques, et provoque ensuite le passage d'électrons, chaque fois d'un atome à la particule suivante.

Ajoutons encore que les expressions „entrée" et „sortie" que nous venons d'employer ne doivent pas être prises en toute rigueur dans le cas où les sphères d'action des atomes juxtaposés empiètent l'une sur l'autre. Alors, il ne peut être question que d'un atome qui exerce une action prépondérante.

Les phénomènes se compliquent encore par l'intervention du rayonnement, qui doit se faire sentir si la température est suffisamment élevée. Le choc d'un électron contre un atome pourra provoquer l'émission d'une radiation, et inversement des rayons pourront donner lieu à une expulsion d'électrons comme dans les phénomènes photo-électriques. M. Richardson a appelé l'attention sur la possibilité que des actions de ce genre jouent un rôle dans l'émission thermionique qu'il a étudiée.

On voit combien il reste encore à éclaircir. Pour pouvoir reprendre sous une forme améliorée la théorie statistique dont j'ai parlé aux §§ 4—13, il faudra d'abord approfondir les relations mutuelles entre les mouvements quantifiés, les mouvements calorifiques, pour autant qu'ils existent, et le rayonnement, et se former une idée précise sur la manière dont se comportent les électrons dans leurs rencontres avec les atomes.

§ 19. **Energie potentielle d'un électron par rapport à un métal.** Les théories modernes ne laissent guère de place pour une énergie potentielle provenant de certaines forces „moléculaires" telle qu'elle fut imaginée autrefois par Helmholtz; il est bien probable que, s'il y a une énergie potentielle, elle est due aux actions électriques exercées sur un électron libre par les noyaux et les électrons captifs qui l'entourent.

Un théorème bien connu de l'électrostatique nous apprend qu'une charge électrique $-e$ concentrée en un point P à petite distance de la surface plane d'un corps conducteur produit par influence une charge égale à $+e$, qui est distribuée sur la surface de telle manière que son action sur des charges extérieures soit égale à celle qui serait exercée par une charge $+e$ placée derrière la surface au point P' qui est l'image de P. Ainsi un électron situé en P subirait une force qu'on peut appeler l'attraction exercée par l'image P' et il y aurait une énergie potentielle correspondante.

Il est clair que, dans le cas d'une charge élémentaire on ne peut pas appliquer ce théorème en toute rigueur. Pour que la charge induite sur la surface agisse comme une quantité d'électricité concentrée en P', elle doit être distribuée avec une densité inversement proportionnelle au cube de la distance au point P. Or, comme la charge élémentaire ne peut pas être subdivisée, il est impossible qu'elle soit distribuée, de telle manière que ce soit. Tout au plus, si l'on considère un intervalle de temps suffisamment long, il pourrait être question de la densité moyenne qui existe en un point déterminé de la surface, la charge e changeant continuellement de position.

Cependant, sans faire intervenir cette théorie des images électriques, on peut concevoir qu'un électron soit attiré à petite distance par un atome. Par les forces qu'il exerce il aura une influence sur les mouvements qui ont lieu dans l'atome, et bien qu'il soit difficile de parler ici avec certitude (les mouvements étant quantifiés) il est naturel d'admettre que cette influence tendra à éloigner les électrons, ce qui aura pour effet que, dans l'action sur l'électron extérieur, l'attraction du noyau prend le dessus. Si, de cette manière, il y a une attraction résultante, on pourra parler aussi d'une énergie potentielle. Il en pourra être question, non seulement pour un électron libre placé au dehors du métal, mais aussi pour un électron logé à l'intérieur, cette particule agissant de la manière indiquée sur tous les atomes environnants. En fin de compte, entre un électron libre qui se trouve à une distance tant soit peu considérable du métal, et un autre, également libre, placé dans l'espace inter-atomique, il y aura une différence en énergie potentielle qui, pour les différentes positions du second électron, a une valeur moyenne déterminée, dépendant de la nature du métal.

§ 20. **Courants dans les super-conducteurs.** Pour se rendre compte des phénomènes de la super-conductibilité différents physiciens, M. Kamerlingh Onnes en premier lieu, ont imaginé qu'à de très basses températures il se trouve dans le métal des séries ou des chaînes d'atomes, dans chacune desquelles un électron (ou plutôt un nombre d'électrons qui se suivent) peut se mouvoir sans qu'aucune force s'y oppose. Je me permets à ce propos de faire la remarque suivante: Toutes les fois qu'un électron entre dans un atome ou en sort, il apportera dans l'atome ou lui enlèvera une certaine quantité de mouvement. Le noyau se ressentira de ces changements et pourra en être ébranlé; il prendra, pour ainsi dire, un mouvement brownien, si ces actions se suivent d'une manière irrégulière.

Les études sur les chaleurs spécifiques ont prouvé que le mouvement calorifique est en premier lieu une agitation des noyaux. Par conséquent, pour décider si un courant électrique produit, ou non, un dégagement de chaleur, c'est-à-dire s'il rencontre, ou non, une résistance, on pourrait considérer la question de savoir, dans quelle mesure les noyaux seront mis en mouvement par les changements qui s'opèrent sans cesse dans leurs atmosphères électroniques. En examinant cette question, on devra faire attention, d'une part à la succession plus ou moins régulière ou capricieuse de ces changements, et d'autre part aux restrictions que la théorie des quanta impose à la mobilité du réseau cristallin des noyaux.

Ce qui me semble surtout mystérieux, c'est la réapparition d'une résistance sous l'influence d'un champ magnétique dont l'intensité dépasse une limite déterminée.

§ 21. **Expériences de Tolman et Stewart.** La théorie de ces expériences qui démontrent que ce sont bien les électrons négatifs qui sont en jeu dans un courant circulant dans un métal, peut être faite sans qu'il soit nécessaire de faire des hypothèses spéciales sur le mécanisme de la résistance; on peut se placer au point de vue que j'ai indiqué au § 18, sans distinguer les électrons qui sont libres et ceux qui ne le sont pas.

Considérons un anneau circulaire qui est animé d'un mouvement de rotation variable à volonté autour de son axe et soit u la vitesse d'un point due à cette rotation; si, comme nous le supposerons, la section ω est très petite, nous pouvons faire le calcul avec un seul u.

Mesurons la coordonnée x le long du contour, l'origine ayant une position fixe dans le métal, et désignons par $\xi = \frac{dx}{dt}$ la vitesse d'un électron correspondant à cette coordonnée, c'est-à-dire la vitesse relative par rapport au métal, et par X la force totale correspondante à laquelle la particule se trouve assujettie. La vitesse totale de l'électron sera $u + \xi$ et on aura pour chaque particule

$$m\left(\frac{d\xi}{dt} + \frac{du}{dt}\right) = X.$$

Si l'on prend les sommes des termes, étendues à tous les électrons du système, dont le nombre est N $a\,\omega$, si nous écrivons N pour le nombre par unité de volume et a pour la périphérie de l'anneau, on trouve

$$N a \omega m \left(\frac{dv}{dt} + \frac{du}{dt}\right) = \Sigma X,$$

où v est la vitesse moyenne $\bar{\xi}$ des électrons par rapport au métal (comme au § 18).

L'intensité i du courant est donnée par

$$i = -\mathrm{N} e \omega v$$

et l'équation devient

$$-\frac{am}{e}\frac{di}{dt} + \mathrm{N} a \omega m \frac{du}{dt} = \Sigma X. \qquad \qquad (29)$$

Quant à la force ΣX, elle se compose de deux parties. Il y a d'abord la force de résistance (§ § 18 et 12)

$$-\mathrm{N} a \omega \varkappa v = \frac{a \varkappa i}{e} = \frac{\mathrm{N} e a i}{\sigma} = N e \omega r i,$$

où r est la résistance du circuit. En second lieu il y a la force de self induction. Si E_x est la force électrique due à cette cause, on a pour la deuxième partie de ΣX

$$-\mathrm{N} e \omega \int E_x \, dx = \mathrm{N} e \omega L \frac{di}{dt},$$

où L est le coefficient de self induction. Donc l'équation (29) devient

$$r i + \left(L + \frac{am}{\mathrm{N} e^2 \omega}\right)\frac{di}{dt} = \frac{am}{e}\frac{du}{dt} \qquad \qquad (30)$$

et il est facile maintenant d'en déduire i, si la vitesse u de l'anneau est donnée en fonction du temps.

Il suffit ici de calculer le courant intégral qui est produit par un changement de la vitesse. En prenant l'intégrale de (30) par rapport au temps, de t_1 à t_2, dans la supposition qu'à la fin comme au commencement, $i = 0$, on obtient

$$\int_{t_1}^{t_2} i\,d\,t = \frac{a\,m}{r\,e}\,(u_2 - u_1) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (31)$$

C'est la formule qui a été vérifiée par MM. Tolman et Stewart et qui leur a permis de déduire de leurs expériences la valeur de $\frac{e}{m}$. Seulement, entre leurs nombres et la valeur connue de ce rapport, il y a de petites différences qui semblent varier avec la nature du métal et que, jusqu'ici, on n'est pas parvenu à expliquer.

§ 22. **Emission d'électrons par les métaux incandescents.** Les recherches de M. Richardson sur cette émission et sur les courants thermioniques qu'elle produit montrent que les électrons libres, du moins lorsqu'ils se trouvent au dehors d'un métal, participent au mouvement calorifique de la même manière que les molécules d'un gaz, et par une heureuse application des lois de la thermodynamique il a été conduit à des conclusions sur la manière dont les phénomènes dépendent de la température. Ces conclusions méritent d'autant plus l'attention parce qu'on y arrive sans se préoccuper du mécanisme de l'émission et de ce qui se passe à l'intérieur du métal. Les quatre paragraphes suivants seront consacrés à quelques-uns des problèmes qui se présentent ici. Mais il faut d'abord faire une remarque sur l'état de choses qui existe à la surface d'un métal.

Si un métal placé dans le vide est maintenu à une température suffisamment élevée, l'émission des électrons produira une „atmosphère" formée de ces particules et il y aura équilibre lorsque, près de la surface, cette atmosphère a atteint une densité déterminée.

Soient σ la surface plane du métal, σ_e et σ_i deux plans parallèles à σ, à petite distance, l'un à l'extérieur, l'autre à l'intérieur, φ_e et φ_i les valeurs du potentiel en ces plans. Nous supposerons que les forces qui correspondent à l'énergie potentielle V sont limitées à la couche mince entre σ_e et σ_i, de sorte que V reste constant à l'extérieur de σ_e et à l'intérieur de σ_i. Si l'on choisit la constante arbitraire qui entre dans V de telle manière que $V_e = 0$, l'énergie V_i aura une valeur déterminée et l'énergie potentielle d'un électron situé en un point de σ_e surpassera de la quantité $-e(\varphi_e - \varphi_i) - V_i$ celle d'un électron qui se trouve sur σ_i. Donc, dans l'état d'équilibre, si N_e et N_i sont les nombres d'électrons libres par unité de volume à l'extérieur et à l'intérieur, on a la formule, analogue à (28)

$$\varphi_e - \varphi_i = -\frac{V_i}{e} + \frac{k\,T}{e} \log \frac{N_e}{\beta\,N_i} \qquad (32)$$

Dans tous les cas où il y une telle différence de potentiel, il existe à la surface une double couche électrique, soit qu'elle contienne des quantités égales d'électricité positive et négative, soit que l'une des deux prépondère sur l'autre, ce qui arrive lorsque la surface a une charge résultante. En somme la distribution des charges dans la couche superficielle peut être bien compliquée.

Si, dans ce qui suit, nous parlons de la surface d'un métal, nous entendons par là la surface extérieure σ_e dont nous venons de parler.

§ 23. **Variation de la densité de l'atmosphère d'électrons avec la température.** Soient maintenant A et B deux plaques parallèles reliées par un fil, le tout consistant du même métal et étant maintenu à la même température. Du côté extérieur ces plaques sont revêtues de couches imperméables aux électrons. Nous prendrons la distance l des plaques et la température T pour les variables indépendantes qui définissent l'état du système.

Si la distance est un peu considérable, les répulsions des électrons qui composent l'atmosphère entre les plaques donnera lieu à des différences de densité avec un minimum au milieu. On obtient les équations qui déterminent la distribution des électrons en supposant que, comme dans un gaz, il y a une pression

$$p = N\,k\,T,$$

dont les effets s'ajoutent à ceux des forces électrostatiques. Si l'axe des x est perpendiculaire aux plaques, on a la condition d'équilibre

$$N\,e\frac{d\,\varphi}{d\,x}-\frac{d\,p}{d\,x}=0$$

d'on l'on tire

$$N=C\,\mathrm{e}^{\frac{e}{k\,T}\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

Ensuite N et φ sont déterminés en fonction de x par l'équation de Poisson (en unités rationelles)

$$\frac{d^2\,\varphi}{d\,x^2}=N\,e\,.$$

La solution de ces équations peut être mise sous la forme (origine des x au milieu)

$$N=N_0\sec^2\left[e\sqrt{\frac{N_0}{2\,k\,T}}x\right],$$

où N_0 est la valeur de N pour $x=0$.

Cela nous donne pour la surface de chacune des plaques l'équation

$$N_e=N_0\sec^2\left[\frac{1}{2}\,e\,l\sqrt{\frac{N_0}{2\,k\,T}}\right],$$

qui nous permet de calculer l'une des grandeurs N_0, N_e dès que l'autre est connue.

On peut aussi déterminer le potentiel et faire ensuite la théorie thermodynamique du système en tenant compte de la pression exercée par l'atmosphère d'électrons, des tensions de MAXWELL, de l'énergie propre au mouvement des électrons et de l'énergie du champ électrique qui dépend de la manière connue des valeurs de $\frac{d\,\varphi}{d\,x}$. Pour $x=0$ la tension suivant les lignes de forces est zéro puisque, en ce point, on a $\frac{d\,\varphi}{d\,x}=0$. Par conséquent, la force qui agit sur les plaques est la pression

$$p=N_0\,k\,T$$

qui correspond à la densité N_0 au milieu.

Le résultat final est la formule de M. RICHARDSON

$$\frac{d\,log\,N_e}{d\,T}=\frac{\varepsilon}{k\,T^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

dans laquelle ε a la signification suivante: si, par une augmentation de la distance l, n électrons sont amenés à passer des plaques à l'atmosphère qui se trouve entre elles, la température étant maintenue constante, l'énergie du système augmente de $n\ \varepsilon$.

Il ne sera pas nécessaire de déduire ici la formule pour des grandeurs quelconques de la distance l; nous pouvons simplifier les calculs en supposant que cette distance est très petite. On peut alors négliger la différence entre N_0 et N_e.

En désignant par U l'énergie du système correspondant à l'unité de surface des plaques, on peut écrire pour la quantité de chaleur nécessaire pour un changement infiniment petit défini par $d\,T$ et $d\,l$

$$d\,Q = \frac{\partial U}{\partial T}\,d\,T + \left(\frac{\partial U}{\partial l} + p\right) d\,l \,. \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (35)$$

d'où l'on déduit d'une manière connue

$$\frac{\partial U}{\partial l} + p - T\,\frac{\partial p}{\partial T} = 0\,.$$

On est conduit à la formule (34) si l'on pose

$$p = N_e\,k\,T$$

et si on remarque qu'un accroissement de la distance l amène une augmentation $N_e\,d\,l$ du nombre des électrons qui se trouvent entre les plaques, de sorte que

$$\frac{\partial U}{\partial l} = N_e\,\varepsilon\,.$$

Introduisons encore cette valeur dans la formule (35). Nous trouvons alors pour un changement isothermique

$$d\,Q = N_e\,(\varepsilon + k\,T)\,d\,l\,,$$

tandis que $N_e\,d\,l$ est le nombre des électrons qui sont mis en liberté.

Pour maintenir constante la température, il faut donc fournir aux plaques une quantité de chaleur qui remonte en moyenne à $\varepsilon + k\,T$ pour chaque électron libéré. Cette quantité de chaleur est comparable à la chaleur de vaporisation d'un fluide et le terme $k\,T$ s'explique de la même manière que le terme analogue dans la formule pour la chaleur de vaporisation (travail extérieur).

Il importe de remarquer que dans le système considéré tout est symétrique des deux côtés et que, par conséquent, une augmentation de la distance l n'est accompagné d'aucun mouvement de l'électricité dans le fil qui relie les plaques. Les électrons perdus par ces dernières proviennent donc des couches superficielles, les charges positives de ces couches devenant plus grandes. On peut imaginer que quelques-uns des atomes contenus dans les couches perdent un de leurs électrons périphériques.

Si η est l'énergie qu'il faut dépenser pour soustraire un électron à la couche superficielle, de telle manière qu'il soit en repos après l'extraction, on a

$$\varepsilon = \eta + \frac{3}{2} k T \dots\dots\dots\dots (36)$$

parce que les électrons de l'atmosphère ne sont pas en repos, mais possèdent, en moyenne, l'énergie cinétique $\frac{3}{2} k T$.

§ 24. **Différence de potentiel dans un contact thermionique.** Remplaçons maintenant les plaques A et B par des plaques 1 et 2 formées de métaux différents et maintenues à la même température, mais isolées l'une de l'autre. L'émission d'électrons donnera lieu à un état d'équilibre auquel on peut appliquer la formule (33). Il y aura donc entre les plaques, ou plutôt entre leurs surfaces extérieures σ_e (§ 22) une différence de potentiel

$$\varphi_{2e} - \varphi_{1e} = \frac{k T}{e} \log \frac{N_{2e}}{N_{1e}} \dots\dots\dots\dots (37)$$

Pour trouver la différence des potentiels *intérieurs*, il faut combiner ce résultat avec l'équation (32) appliquée aux deux métaux successivement. On trouve ainsi

$$\varphi_{2i} - \varphi_{1i} = \frac{1}{e}(V_{2i} - V_{1i}) + \frac{k T}{e} \log \frac{\beta_2 N_{2i}}{\beta_1 N_{1i}}.$$

D'après la seconde loi de la thermodynamique la différence de potentiel entre deux métaux différents doit être la même dans le cas d'un „contact thermionique" comme nous venons de considérer et dans celui d'un contact direct. L'équilibre qui est produit par la formation d'une atmosphère d'électrons entre les plaques 1 et 2, isolées l'une de l'autre, ne sera pas dérangé si, ensuite, on les relie par un fil métallique.

En effet notre dernière formule est identique à l'équation (28) que nous avons obtenue pour un contact métallique.

§ 25. **Deuxième méthode d'application du principe de Carnot-Clausius.** Voici une autre application encore des lois de la thermodynamique, dont l'idée a de nouveau été empruntée aux travaux de M. Richardson. Mais je dois dire d'avance qu'elle ne nous apprendra rien de nouveau, de sorte que ce paragraphe aurait pu être omis.

Deux plaques parallèles A et A', formées du même métal et reliées par un fil de la même substance qui est placé dans l'espace intermédiaire, sont maintenues à des températures différentes T et T' ($T' > T$). Plus vers l'extérieur on a posé des plaques B et B', parallèles à A et A', de telle manière que les quatre plaques se suivent dans l'ordre B, A, A', B'. Les plaques B et B', imperméables aux électrons et à la chaleur, servent à limiter les espaces $A\,B$ et $A'\,B'$, vides d'abord, dans lesquels des atmosphères d'électrons peuvent se former. Pour que l'émission d'électrons se fasse seulement dans ces espaces, les faces de A et de A' qui se regardent ont été recouvertes d'une couche imperméable.

Enfin, pour limiter aussi les champs électriques dont les lignes de force peuvent passer à travers B et B', on peut imaginer, au delà de ces plaques, deux autres C et C', reliées par un fil et consistant du même métal que ce dernier. Ici encore une couche imperméable servira à empêcher l'émission d'électrons.

Du reste, le système est limité latéralement d'une manière convenable, de sorte que nous pouvons nous borner à considérer l'unité de surface de chacune des plaques et les espaces correspondants. Les dimensions de cette unité sont supposées être beaucoup plus grandes que les épaisseurs l et l' des atmosphères entre A, B et A', B', et ces épaisseurs sont tellement petites qu'on peut négliger les différences de densité dans chaque atmosphère.

Nous pouvons aussi introduire dans chaque atmosphère des cloisons de la même nature que les plaques B et B' et, après avoir inclus entre deux cloisons une partie d'une atmosphère, nous pouvons la déplacer d'un côté du système à l'autre, du côté, par exemple, de B' à celui de B. On peut aussi soumettre à un changement de volume, adiabatique ou isothermique, la partie d'une atmosphère qu'on a isolée de cette manière.

Cela posé, nous imaginons le cycle suivant d'opérations, qui est réversible si on fait abstraction de la conduction de la chaleur dans le fil entre A et A'.

1. Les plaques B et B' sont déplacées de telle sorte que la distance l diminue de la quantité infiniment petite δ, tandis que l' augmente de

$$\delta' = \frac{N}{N'}\,\delta.$$

Il y aura d'un côté une dimination $N\delta$ du nombre des électrons, et de l'autre côté une augmentation égale.

2. On enlève à l'atmosphère $A'\,B'$ une couche de l'épaisseur δ', qu'on transporte vers le côté de AB, mais, dans le cours de ce trajet on abaisse d'abord la température de ce système de $N\delta$ électrons de T' à T par une dilatation adiabatique et on donne ensuite au volume la grandeur δ par un changement à température constante.

3. On ajoute à l'atmosphère AB, par simple juxtaposition, les $N\delta$ électrons qui ont été empruntés à l'atmosphère $A'\,B'$.

Il est facile de voir que, dans le cours de ce cycle, le fil entre A en A' a été traversé, dans la direction de A vers A', par $N\delta$ électrons. En effet, concevons un plan entre A et A' qui s'étend infiniment au delà des bords de A, de A' et des autres plaques. Dans le transport qui a eu lieu dans la deuxième opération, $N\delta$ électrons ont traversé ce plan dans la direction de A' vers A; il faut donc qu'un nombre égal d'électrons se soient déplacés en sens inverse dans le fil. D'un autre côté les charges électriques des plaques A et A' ont, à la fin, les mêmes grandeurs qu'au commencement. Contrairement donc à ce qui eut lieu dans le cas considéré au paragraphe précédent les électrons qui entrent dans une atmosphère ne viennent pas, cette fois-ci, de la couche superficielle du métal; ils ont été apportés par un courant dans le fil.

a. Commençons maintenant par dresser le bilan de l'énergie. D'abord, dans la première opération, on a gagné un travail

$$Nk\delta\,(T' - T).$$

En second lieu, le transport des $N\delta$ électrons d'un côté à l'autre (deuxième operation) a exigé un travail

$$N\,e\,\delta\,(\varphi'_e - \varphi_e)\,.$$

Pour évaluer aussi le travail qui a dû être effectué dans les changements de volume qui ont eu lieu dans le cours de la deuxième opération, nous nous rappelons que, lorsque un gaz composé de n molécules se refroidit de T' à T par une dilatation adiabatique, il effectue un travail

$$\frac{3}{2}\,n\,k\,(T' - T)\,,$$

le volume changeant dans le rapport de 1 à $\left(\frac{T'}{T}\right)^{3/2}$. Par conséquent, dans la dilatation adiabatique, on a gagné un travail

$$\frac{3}{2}\,N\,k\,\delta\,(T' - T)\,.$$

Par cette dilatation le volume est devenu

$$\frac{N}{N'}\,\delta\,\left(\frac{T'}{T}\right)^{3/2}$$

et pour lui donner la grandeur δ par un changement isothermique on doit dépenser un travail

$$N\,k\,\delta\,T\,\log\left[\frac{N}{N'}\left(\frac{T'}{T}\right)^{3/2}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

qui, cependant, se trouve compensé par un dégagement de chaleur. Si, pour cette raison, nous omettons ce terme (38) dans l'expression pour la somme totale du travail dépensé, nous trouvons

$$N\,e\,\delta\,(\varphi_e' - \varphi_e) - \frac{5}{2}\,N\,k\,\delta\,(T' - T) \quad \ldots\ldots \quad (39)$$

D'autre part, le fil conducteur a été parcouru, dans la direction de T vers T', par une quantité d'électricité $-N\,e\,\delta$, ce qui a provoqué (§ 13) un dégagement de chaleur

$$N\,e\,\delta\int_{T}^{T'}\mu\,d\,T\,.$$

Cette même quantité d'électricité est entrée dans le métal à la température T et en est sortie à la température T' et cela a donné lieu à des „effets Peltier" aux deux surfaces. Considérons d'abord l'entrée et fixons l'attention sur l'énergie contenue dans l'espace entre deux plans situés des deux côtés de la surface de la plaque A, l'un dans l'atmosphère et l'autre dans le métal.

Chaque électron qui entre apporte l'énergie cinétique $\frac{5}{2}\,k\,T$ et chaque particule qui sort emmène l'énergie $2\,k\,T$ (§ 7). A la différence $\frac{1}{2}\,k\,T$ il faut ajouter la diminution en énergie potentielle

$$-V_i + e(\varphi_i - \varphi_e),$$

de sorte que le dégagement de chaleur à la surface de A est donné par

$$N\delta\left[\frac{1}{2}\,k\,T - V_i + e(\varphi_i - \varphi_e)\right].$$

On obtient une expression semblable avec le signe opposé, pour la plaque A', et on trouve enfin, si on égale le travail (39) à la chaleur dégagée totale

$$\int_T^{T'} \mu\,d\,T = \varphi'_i - \varphi_i - \frac{1}{e}(V'_i - V_i) - \frac{2\,k}{e}(T' - T).$$

On obtient la même équation si, revenant à l'expression (24) pour $-\mu\frac{d\,T}{d\,x}\,d\,x$ on en prend l'intégrale le long du fil, après avoir substitué pour G la valeur qu'on tire de (18).

b. Cette vérification faite, nous pouvons appliquer la seconde loi de la thermodynamique. A cet effet nous devons fixer l'attention sur les quantités de chaleur qui ont été dégagées, à savoir la quantité représentée par (38), les quantités $N\,e\,\delta\,\mu\,d\,T$ qui ont été développées dans le fil et celles qui ont apparu aux surfaces de A et de A'. Pour ces deux dernières nous pouvons écrire

$$N\,e\,\delta\,\Pi \text{ et } -N\,e\,\delta\,\Pi',$$

où Π et Π' indiquent, pour les températures T et T', ce qu'on peut appeler l'effet Peltier du métal vis-à-vis de l'atmosphère d'électrons, c'est-à-dire la quantité de chaleur qui est dégagée lors du passage de l'unité d'électricité (apportée par un fil) du métal à l'atmosphère.

Nous devons maintenant égaler à zéro la somme algébrique de toutes les quantités de chaleur dégagées, après avoir divisé chacune d'elles par la température qui lui correspond. Cela nous donne

$$\frac{k}{e}\log\left[\frac{N}{N'}\left(\frac{T'}{T}\right)^{3/2}\right]+\int_{T}^{T'}\frac{\mu}{T}\,dT+\left(\frac{\Pi}{T}-\frac{\Pi'}{T'}\right)=0$$

ou bien, si la différence $T'-T$ est infiniment petite,

$$-\frac{k}{e}\frac{d}{dT}\log\left(\frac{N_e}{T^{3/2}}\right)+\frac{\mu}{T}-\frac{d}{dT}\left(\frac{\Pi}{T}\right)=0\,,\quad\ldots\ldots\quad(40)$$

où nous avons écrit N_e au lieu de N pour nous rappeler que dans ce qui précède il s'agit toujours de la densité de l'atmosphère d'électrons à la surface σ_e dont il fut question au § 22.

c. Il y a une simple relation entre l'effet Peltier Π_{12} entre deux métaux 1 et 2 et les effets Peltier Π_1 et Π_2 de chacun d'eux vis-à-vis de leur atmosphère d'électrons. En effet, considérons un contact thermionique (§ 24) et supposons que l'unité d'électricité passe à travers ce contact du métal 1 au métal 2. Il est certain que ce passage donnera lieu au même effet Peltier Π_{12} qu'on observerait dans un contact métallique. Or, entre les surfaces σ_{1e} et σ_{2e} il y aura la différence de potientiel déterminée par (37) et Π_{12} se composera de Π_1, de $-\Pi_2$ et d'une quantité de chaleur équivalente au travail $\varphi_{1e}-\varphi_{2e}$. Donc:

$$\Pi_{12}=\Pi_1-\Pi_2-\frac{kT}{e}\log\frac{N_{2e}}{N_{1e}}\,.$$

Si l'on combine cette équation avec celles qu'on obtient en appliquant (40) aux deux métaux, on est ramené à la formule (27).

§ 26. **Intensité du courant thermionique.** M. Richardson a trouvé une formule pour la variation de cette intensité avec la température, en remarquant que, dans le cas où aucun des électrons qui atteignent le métal du côté de l'atmosphère n'est réfléchi, le courant thermionique est donné par le nombre d'électrons qui traversent la surface σ_e dans la direction de l'atmosphère. Un calcul facile fait connaître ce nombre et en multipliant par la charge d'un électron on obtient pour le courant par unité de surface

$$i = N e \left(\frac{k T}{2 \pi m} \right)^{1/2} .$$

Si, ensuite, dans l'équation (36) on regarde η comme indépendant de la température, l'intégration de (34) nous donne

$$N = c T^{3/2} e^{-\frac{\eta}{k T}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (41)$$

et par suite

$$i = C T^2 e^{-\frac{\eta}{k T}} .$$

Dans ces formules c et C sont des constantes. La seconde équation est une de celles (il y en a une autre avec $T^{1/2}$ au lieu de T^2) qui peuvent servir à rendre compte des observations faites à différentes températures.

Ces observations ont aussi permis de déterminer la valeur de la constante η, qui représente le travail nécessaire pour détacher un électron du métal. Exprimée en volts elle varie entre 3 et 6; elle est plus ou moins inférieure, bien qu'elle soit du même ordre de grandeur, au travail qu'il faut dépenser pour produire une ionisation dans la vapeur du métal. On comprend bien, en effet, que l'éloignement d'un électron périphérique ne demande pas la même énergie dans le cas d'un atome isolé et dans celui d'un système d'atomes réunis dans un réseau cristallin.

§ 27. **Expériences de Millikan sur l'effet photo-électrique.** Appliquons la formule (41) à deux métaux 1 et 2 et substituons les valeurs de $log N$ dans l'équation (37) pour la différence de potentiel au contact. Cela nous donne

$$\varphi_{2e} - \varphi_{1e} = (a_2 - a_1) T + \frac{1}{e} (\eta_1 - \eta_2) , \quad \ldots\ldots (42)$$

où a_1 et a_2 sont des constantes dépendant de la nature des métaux. Or, s'il est permis d'y négliger le terme $(a_2 - a_1) T$ (ce qu'on ne peut pas savoir d'avance) cette équation peut nous fournir l'explication d'un fait remarquable qui a été observé par M. MILLIKAN dans ses recherches sur les phénomènes photo-électriques. Dans ces expériences un métal M, exposé à des rayons de la fréquence ν et pour lesquels, par conséquent, le quantum d'énergie avait la grandeur $h\nu$, était placé en face d'un cylindre de Faraday C qui recevait les électrons expulsés. Ce cylindre était relié au métal M par un circuit dans lequel on pouvait introduire une force électromotrice F réglable à volonté et dirigée de C vers M. On mesura la grandeur de F qui est juste suffisante pour arrêter le courant photo-électrique et M. Millikan trouva que, pour une fréquence ν donnée, cette force limite est indépendante de la nature du métal M; elle est, par exemple, la même pour le sodium et le platine.

Distinguons par les indices 1 et 2 le métal M et celui du cylindre de Faraday. Alors, tant qu'aucune force électromotrice n'agit dans le circuit qui les relie, on aura entre les extrémités de ce circuit, c'est-à-dire entre M et C (surfaces extérieures) la différence de potentiel représentée par l'équation (42), que nous remplaçons maintenant par

$$\varphi_{2e} - \varphi_{1e} = \frac{1}{e}(\eta_1 - \eta_2).$$

Après l'application de la force électromotrice F cette différence devient

$$\varphi_{2e} - \varphi_{1e} = \frac{1}{e}(\eta_1 - \eta_2) - F \quad \dots\dots\dots \quad (43)$$

Remarquons maintenant que l'énergie disponible pour l'expulsion d'un électron est $h\nu$ et que l'énergie η est nécessaire, simplement pour le détacher de l'atome sans qu'il ait une vitesse après la sortie. L'électron quittera donc le métal avec une énergie cinétique $h\nu - \eta_1$, et le courant photo-électrique s'arrêtera lorsque cette énergie est égale au travail nécessaire pour surmonter la force qui provient de la différence de potentiel entre M et C. Cette condition se traduit par l'équation

$$h\nu - \eta_1 = -e(\varphi_{2e} - \varphi_{1e}),$$

qui, combinée avec (44), nous donne pour la force électromotrice limite

$$F = \frac{1}{e}(h\nu - \eta_2) \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (44)$$

On voit que cette valeur est bien indépendante de la nature du métal M. Si, pour un métal, η_1 est plus grand et, par conséquent, l'énergie cinétique d'un électron expulsé plus petite que pour un autre, cette différence est compensée par une valeur plus grande de $e\,(\varphi_{2e} - \varphi_{1e})$, cette valeur variant exactement comme η_1.

On remarquera que notre raisonnement repose sur l'hypothèse que l'action photo-électrique s'exerce sur les mêmes électrons qui sont enlevés de la couche superficielle pour former l'atmosphère d'électrons dans le cas considéré au § 23. Notons aussi que c'est bien à raison que nous avons fait intervenir la différence de potentiel entre les surfaces extérieures σ_e des deux métaux, car c'est le champ électrique entre ces surfaces qui détermine le mouvement des électrons libérés.

§ 28. **Forces pondéromotrices et effet Hall.** Un champ magnétique $\mathbf{H}$ dans lequel se trouve un conducteur parcouru par un courant exerce sur un électron mobile une force qui, par unité de charge, peut être représentée par

$$\frac{1}{c}\,[\mathbf{v}\,.\,\mathbf{H}] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

où c est la vitesse de la lumière, tandis que $[\mathbf{v}\,.\,\mathbf{H}]$ est le produit vectoriel de la vitesse $\mathbf{v}$ et de $\mathbf{H}$.

Ces actions peuvent influencer le mouvement des électrons dans le métal (effet HALL), mais elles donnent lieu également à la force pondéromotrice qui agit sur la substance même du conducteur et on peut se demander quel est le mécanisme de la transmission des forces à cette substance. En faisant quelques remarques à ce sujet j'aurai en vue surtout une question qui se présente chez les super-conducteurs et je choisirai un exemple spécial qui a éte réalisé dans une expérience récente de M. KAMERLINGH ONNES.

Considérons une lame métallique d'épaisseur uniforme, qui forme une sphère complète et qui est suspendue par un fil, de manière à pouvoir tourner autour du diamètre vertical. L'épaisseur est supposée être suffisamment petite pour qu'on puisse parler d'un courant dans une surface.

En un point quelconque de la sphère on peut introduire trois directions h, k et n, perpendiculaires entre elles et dont les deux premières sont dans la surface, tandis que n est la direction de la normale extérieure. Une rotation du système h, k, n peut le faire coïncider avec le système des axes $O\,X$, $O\,Y$, $O\,Z$ tel qu'on emploie ordinairement.

Nous représenterons par $\mathbf{C}$ le courant dans la surface et nous distinguerons par les indices 1 et 2 les côtés intérieur et extérieur.

Cela posé, on a d'abord les équations

$$\mathbf{H}_{h1} - \mathbf{H}_{h2} = -\frac{1}{c}\mathbf{C}_k \ , \ \mathbf{H}_{k1} - \mathbf{H}_{k2} = \frac{1}{c}\mathbf{C}_h \ , \ \mathbf{H}_{n1} - \mathbf{H}_{n2} = 0 \ . \quad (46)$$

En se servant de ces formules on peut déduire le système des forces (45) des tensions de Maxwell agissant des deux côtés de la lame. Ces tensions peuvent donner lieu à un couple G autour de l'axe vertical, et on voit immédiatement que ce couple sera intégralement transmis à la matière du métal dans tous les cas où l'état de mouvement dans la lame est stationnaire, dans ce sens que le moment résultant, par rapport à l'axe, de toutes les quantités de mouvement existant dans la sphère ne change pas dans le cours du temps. Alors, le couple G doit nécessairement être tenu en équilibre par un moment de torsion dans le fil de suspension.

Mais comment un état stationnaire peut il s'établir?

§ 29. La réponse est facile quand il s'agit d'un conducteur ordinaire. On peut démontrer d'abord qu'une distribution quelconque de forces électromotrices constantes produira des courants également invariables.

Si la force électromotrice est représentée par $\mathbf{F}$, et si φ est le potentiel dû aux charges électriques qui se produiront généralement, on aura en chaque point

$$\mathbf{C}_h = \lambda\left(\mathbf{F}_h - \frac{\partial\varphi}{\partial h}\right) \ , \ \mathbf{C}_k = \lambda\left(\mathbf{F}_k - \frac{\partial\varphi}{\partial k}\right) \quad \ldots\ldots (47)$$

où λ est le produit du coefficient de conductibilité et de l'épaisseur.

La solution de ces équations est comme il suit. Imaginons un circuit fermé infiniment petit ayant une position quelconque sur la sphère, $d\sigma$ l'étendue de la surface qu'il limite, ν la normale extérieure de ce circuit, dirigée tangentiellement à la sphère, et s la direction du circuit, ν et s étant choisis de telle manière que ces directions peuvent être prises pour h et k. L'intégrale

$$\int \mathbf{F}_s \, ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (48)$$

autour du circuit, aura une valeur proportionnelle à $d\sigma$. Si on la représente par $A\,d\sigma$, la fonction A sera connue en tous les points de la sphère.

Décomposons cette fonction en fonctions de Legendre

$$A = \Sigma_i \; C_i \; Y_i$$

et posons

$$K = -a^2 \lambda \, \Sigma_i \, \frac{C_i}{i(i+i)} \, Y_i \text{ (}a\text{ rayon de la sphère);}$$

alors le courant est déterminé par

$$\mathbf{C}_h = -\frac{\partial K}{\partial k}, \; \mathbf{C}_k = \frac{\partial K}{\partial h} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (49)$$

Dans ce calcul nous avons fait abstraction des forces (45). Nous allons les introduire maintenant, non seulement pour autant qu'elles proviennent du champ magnétique que les courants calculés produisent eux mêmes, mais en y ajoutant un champ quelconque constant extérieur. Les forces avec lesquelles, conformément à la loi exprimée par (45), le champ magnétique agit sur les électrons qui sont en mouvement dans les courants trouvés peuvent être considérées comme des forces „électromotrices", dont on déterminera l'effet de la manière indiquée. On trouvera ainsi un système de courants $\mathbf{C}'$, qui se superpose au système $\mathbf{C}$ et qui produira un nouveau champ magnétique accessoire. L'action de ce champ sur $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}'$ et l'action du champ qui existait déjà sur $\mathbf{C}'$ donnera lieu à un nouvel effet Hall. On trouvera ainsi la solution par étapes successives et le résultat sera exprimé par des séries infinies qui seront convergentes si l'effet Hall est suffisamment faible. Mais dans tout ceci il est toujours question d'états de mouvement stationnaires et il est donc certain que le couple G résultant des tensions de Maxwell est transmis à la matière pondérable. On peut dire que cela se fait par l'intermédiaire des charges électriques qui se sont accumulées sur la sphère.

§ 30. Considérons maintenant une sphère parfaitement conductrice et commençons de nouveau sans tenir compte des forces transversales (45). On peut dire alors qu'en un point quelconque de la sphère la composante $\mathbf{H}_n$ reste perpétuellement ce qu'elle était à un moment donné; c'est le théorème à l'aide duquel on peut se rendre compte de la production de courants dans un superconducteur et de la manière dont des courants une fois établis peuvent être changés. On commence, par exemple, avec la sphère non encore refroidie et par tant à l'état de conducteur ordinaire. On applique un champ extérieur dans lequel les composantes $\mathbf{H}_n$ ont certaines valeurs α et on laisse aux courants induits le temps de s'éteindre. Si, ensuite, par un refroidissement, on fait disparaître la résistance, on aura toujours ces valeurs α, et elles se maintiendront quand on fait disparaître le champ extérieur. Il s'établira alors un système de courants induits, tel que la force magnétique qui lui est propre a, en chaque point de la surface, exactement la valeur α. Cette condition suffit pour déterminer la circulation de l'électricité que nous pouvons donc convenablement désigner par le symbole $\mathbf{C}(\alpha)$.

Les courants induits continueront à circuler et on peut noter en passant que ce qui les fait persister c'est en premier lieu l'inertie de leur champ magnétique. Dans de simples cas, c'est comme si les électrons mobiles fussent attachés à la circonférence d'une roue qui se trouve en rotation.

On peut changer le système $\mathbf{C}(\alpha)$ par l'application d'un nouveau champ extérieur qui donne pour $\mathbf{H}_n$ les valeurs β. Au système de courants qui existait déjà s'ajoutera alors un autre qu' on peut représenter par $\mathbf{C}(-\beta)$ et en fin de compte on aura les courants $\mathbf{C}(\alpha-\beta)$, tandis que les composantes $\mathbf{H}_n$ ont toujours les valeurs α. On voit que les courants qui existent dans la sphère peuvent être très différents du système $\mathbf{C}(\alpha)$ qui correspond aux valeurs actuelles de $\mathbf{H}_n$. Dans une certaine mesure ces valeurs et les courants sont indépendants les uns des autres.

§ 31. Quel sera maintenant l'effet des forces transversales (45)? Il va sans dire que, dans le superconducteur aussi, elles peuvent donner lieu à une accumulation de charges électriques mais, en général, le champ électrique qui provient de ces charges ne suffit pas pour rendre l'état stationnaire, au sens que nous avons attaché à ce mot. Pour le reconnaître, nous remarquons d'abord que les forces (45) équivalent à une force électromotrice

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{Nec}[\mathbf{C}\,.\,\mathbf{H}], \quad \ldots\ldots \quad (50)$$

si maintenant N est le nombre des électrons libres par unité de surface. Ensuite, pour $\lambda = \infty$, on devrait avoir, en vertu des équations (47)

$$\mathbf{F}_h = \frac{\partial \varphi}{\partial h}, \; \mathbf{F}_k = \frac{\partial \varphi}{\partial k}$$

et, par conséquent, l'intégrale (48) devrait s'annuler. Mais on a

$$\mathbf{F}_s = \frac{1}{N e c} \mathbf{C}_\nu \mathbf{H}_n,$$

et il devrait donc être satisfait à la condition

$$\int \mathbf{C}_\nu \mathbf{H}_n \, d s = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

Or, vu la distribution solénoidale du courant, on peut toujours introduire une fonction K telle que les composantes du courant sont données par les formules (49). On a alors

$$\mathbf{C}_\nu = -\frac{\partial K}{\partial s},$$

et (51) devient

$$\int \mathbf{H}_n \frac{\partial K}{\partial s} \, d s = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

Introduisons maintenant des coordonnées polaires ϑ et ψ, la première étant la distance angulaire à un pôle fixe P; $\mathbf{H}_n$ et K seront des fonctions de ces coordonnées et on peut remplacer (52) par

$$\int \mathbf{H}_n \left(\frac{\partial K}{\partial \vartheta} d \vartheta + \frac{\partial K}{\partial \psi} d \psi \right) = 0 .$$

Soient ϑ_0 et ψ_0 les valeurs des coordonnées en un point A_0 à l'intérieur du circuit, $\vartheta_0 + \vartheta'$ et $\psi_0 + \psi'$ leurs valeurs en un point de la périphérie. Pour calculer l'intégrale jusqu'aux termes du second ordre par rapport à ϑ' et ψ', il suffit de poser

$$\mathbf{H}_n = \mathbf{H}_{n0} + \frac{\partial \mathbf{H}_n}{\partial \vartheta} \vartheta' + \frac{\partial \mathbf{H}_n}{\partial \psi} \psi',$$

$$\frac{\partial K}{\partial \vartheta} = \left(\frac{\partial K}{\partial \vartheta} \right)_0 + \frac{\partial^2 K}{\partial \vartheta^2} \vartheta' + \frac{\partial^2 K}{\partial \vartheta \partial \psi} \psi', \text{ etc.}$$

où par les coefficients de ϑ' et de ψ' il faut entendre leurs valeurs en A_0. Dans les produits on peut encore négliger les termes en ϑ'^2, $\vartheta' \psi'$ et ψ'^2 et toutes les intégrales auxquelles on est conduit alors sont zéro, à l'exception des deux

$$\int \vartheta' \, d \psi', \text{ et } \int \psi' \, d \vartheta',$$

dont les valeurs sont égales et opposées. En fin de compte la condition revient à

$$\frac{\partial \mathbf{H}_n}{\partial \psi}\frac{\partial K}{\partial \vartheta}-\frac{\partial \mathbf{H}_n}{\partial \vartheta}\frac{\partial K}{\partial \psi}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (53)$$

On peut facilement imaginer des cas où cette relation ne se vérifie pas; nous supposons, par exemple, que les lignes de courant sont des cercles autour du pôle P et que $\mathbf{H}_n$ n'est pas constant le long d'un tel cercle.

Notre conclusion doit donc être que dans une sphère parfaitement conductrice, placée dans un champ magnétique quelconque, les forces transversales (45) ne peuvent pas être balancées par une distribution de charges électriques.

Si on veut qu'elles soient tenues en équilibre, on devrait avoir recours à d'autres actions. On pourrait peut-être comparer les chaînes d'atomes qui sont parcourues par les électrons à des tubes qu'ils devraient suivre et sur les parois desquels ils exerceraient une pression par l'effet des forces transversales. Ce serait alors cette pression qui transmet ces forces à la substance du métal.

§ 32. **Propriétés optiques des métaux.** Dans un mouvement lumineux qui se propage à l'intérieur d'un métal il y a en un point quelconque une force électrique d'une certaine fréquence n, qu'on peut représenter par

$$\mathbf{E}=a\,e^{int} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (54)$$

Cette force donnera lieu à un courant pour lequel on peut écrire

$$\mathbf{C}=(\alpha+i\beta)\,\mathbf{E}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (55)$$

où α et β sont des constantes qui dépendent de la nature du métal et de la fréquence n. Si on les connaît, on peut en déduire la manière dont un faisceau incident est réfléchi, transmis et absorbé. D'autre part, l'étude, par exemple, de la lumière réfléchie nous fournit le moyen de déterminer ces constantes. Si A est l'angle d'incidence principal, et H l'azimuth de la polarisation rétablie, on a

$$\alpha=n\,\mathrm{tg}^2 A\,\sin^2 A\,\sin^4 H \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (56)$$

et

$$\beta=n\,\mathrm{tg}^2 A\,(1-2\sin^2 2H\sin^2 A). \quad \ldots\ldots\ldots (57)$$

Les résultats des mesures optiques constituent ainsi des données précieuses pour la théorie du mouvement de l'électricité dans les métaux, mais dans l'état actuel de nos connaissances on ne peut guère en tirer parti.

La constante β est celle qui joue un rôle dans le cas d'un corps diélectrique, sa valeur étant $n\,\varepsilon$, si ε est la constante diélectrique. Ce qui est curieux, c'est que pour plusieurs métaux β est négatif. Cela peut être attribué soit à des vibrations propres dans l'infra-rouge, soit à la masse des électrons libres.

Notons encore que l'intensité de la lumière réfléchie à incidence normale, l'intensité incidente étant 1, est donnée par

$$\frac{(1-\gamma)^2+\delta^2}{(1+\gamma)^2+\delta^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

où les grandeurs positives γ et δ sont déterminées par

$$(\gamma - i\,\delta)^2 = \frac{1}{n}(\beta - i\,\alpha). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

MM. Hagen en Rubens ont montré que pour des rayons infrarouges à grande longueur d'onde, on peut calculer ainsi le pouvoir réfléchissant en tenant compte seulement du courant de conduction calculé avec le coefficient de conductibilité ordinaire, ce qui est une des plus belles vérifications de la théorie de Maxwell.

K. LAMBRECHT

FLUOROGRAPHISCHE BEOBACHTUNGEN AN DEN „ELASTISCHEN FASERN” DES PTEROSAURIER-PATAGIUMS

MIT 2 TAFELN.

INHALT:

1. Röntgen- und Ultraviolett-Strahlen im Dienste der Palaeontologie. . . . . Seite 40
2. Pterosaurier-Reste mit erhaltener Flughaut . . . „ 41
3. Die „elastischen Fasern” bei *Pterodactylus crassipes* H. v. Meyer . . . . „ 46
Literatur . . . . „ 50

1. Röntgen- und Ultraviolett-Strahlen im Dienste der Palaeontologie.

Wie bekannt, erörterte der Würzburger Professor KONRAD RÖNTGEN die neuen Eigenschaften der Kathodenstrahlen, zu deren Entdeckung er hauptsächlich durch die Versuche des ungarischen Physikers Prof. PHILIPP LÉNÁRD angeregt wurde, in der Festsitzung der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin am 4. Januar 1896.

Schon am 9. November desselben Jahres trat LEMOINE (1) mit einer Abhandlung vor die Société Géologique de France, in welcher die ersten Resultate der Verwendung dieser umwälzenden physikalischen Entdeckung auf dem Gebiete der Palaeontologie vorgelegt wurden. LEMOINE untersuchte mittels der X-Strahlen verschiedene Knochen von *Gastornis*, *Arctocyon* etc. Gleichzeitig verwandte auch BRÜHL (2) die Röntgen-Strahlen zu palaeontologisch-diagnostischen Zwecken, um zu prüfen, in wie weit Fossilien in den Gesteinen mit Hilfe der neuen Strahlen zu entdecken sind.

Systematische Untersuchungen verdanken wir auf diesem Gebiete weil. Prof. BRANCO (3), der nicht nur die Durchlässigkeit verschiedener Sedimentgesteine prüfte, sondern auch eine grosse Anzahl von Experimenten unternahm, um die Organisationsverhältnisse von Spongien, Trilobiten, Bivalven, Brachiopoden, Echinoideen, Bernsteininklusien, endlich die Struktur des Hautpanzers bei *Grypotherium* aufzudecken.

Weitere Angaben über die mittels dieser Methode erörterte Struktur des Darmes, der Ambulacralöffnungen, Pfeiler bei *Clypeaster laganoides* lieferte LAMBERT (4). Auch E. FISCHER soll Gesteine durchleuchtet haben (5).

Gute Resultate erzielten auf diesem Gebiet vor Kurzem A. HARTMANN—WEINBERG und S. A. REINBERG (6).

Es verging kaum ein Jahr nach der Publikation des letztgenannten Werkes, als weil. Prof. MIETHE in Charlottenburg zufälliger Weise entdeckte, das gewisse Fossilien in ultraviolettem Licht, das durch ein alles sichtbare Licht absorbierenden Filter auf die Platte fiel, aufleuchten, fluoreszieren. Nach sorgfältigen Experimenten, an welchen auch Prof. A. BORN, Charlottenburg, teilgenommen hat, gelang es MIETHE, das fluoreszierende Effekt der Fossilien auch zu photographieren, wozu er sich mit einer in einer planparallelen Kuvette vor dem Objektiv befestigten Filterlösung von 1%-igem Ceriammonniumnitrat bediente (7).

Gelegentlich einer Studienreise in den grössten palaeontologischen Sammlungen Europas wurde es mir ermöglicht, in dem kostbare paläontologische Schätze enthaltenden Teyler-Museum zu Haarlem einige Pterosaurier mittels dieser Methode zu untersuchen. Da ein Objekt, das Original von *Pterodactylus crassipes* H. von Meyer, ein gutes fluorographisches Bild gab, möchte ich in den folgenden Zeilen über die Resultate dieser Untersuchung eingehend berichten und auf eine vielumstrittene Frage ein fluorographisches Licht werfen.

2. Pterosaurier-Reste mit erhaltener Flughaut.

Die strittige Frage bezieht sich auf die Struktur des Pterosaurier-Patagiums. Zur Geschichte dieser Frage möchte ich auf folgende Reste von Pterosauriern mit teilweise erhaltener Flughaut verweisen.

Den ältesten Fund dieser Art beschrieb und bildete — allerdings in veralterter Weise — GOLDFUSS 1831 ab (8). An einem schön erhaltenen Exemplar von

Scaphognathus crassirostris Goldfuss

beobachtete er wellenförmige Linien und Abdrücke von Büscheln und Flocken von Haaren. Das Original befindet sich in Museum zu Bonn.

Pterodactylus sp.

Nach QUENSTEDT (9) „findet sich in der reichen Sammlung des Herrn Landarztes HÄBERLEIN zu Pappenheim ein grosses Exemplar im harten Gestein, woran Körper und Flughaut mit feinen nadelförmigen Eindrücken über und über bedeckt ist, die man kaum anders als Reste eines struppigen Felles deuten kann. Auf der Flughaut kommen sogar noch, wenn auch undeutliche Verzweigungen eines Adernetzes vor."

Das exemplar soll nach H. v. MEYER (18, pag. 21) nach Haarlem oder München gekommen sein, wurde aber weder hier, noch dort gefunden.

Pterodactylus crassipes H. v. Meyer.

Über dieses Stück berichte ich näheres im dritten Kapitel dieser Abhandlung. (Taf. I. II.)

Pterodactylus Kochi Wagner.

Das schöne Exemplar, dessen Haupt- und Gegenplatte ich im Teyler-Museum untersuchen konnte, zeigt deutlich die Umrisse der Flughaut (WINKLER 10, NOPCSA 11), gab aber fluorographisch kein Bild, so dass ich es eben nur erwähnen wollte, da es keine Reste der Flughaut, bloss die Konturen des ehemaligen Patagiums, und auch diese nur im Abdruck aufweist.

Rhamphorhynchus Muensteri Goldfuss.

MARSH beschrieb 1882 ein prachtvoll erhaltenes Flughautexemplar von *Rhamphorhynchus Muensteri* Goldfuss (12), (Synon. *Rh. phyllurus* Marsh), dessen Original im Peabody Museum der Yale University, Connecticut aufbewahrt wird. Über die Flughaut schreibt MARSH: „the patagium of the wings was a thin smooth membrane, very similar to that of modern bats. As the wings were partially folded at the time of entombment, the volant membranes were naturally contracted into folds, and the surface was also marked by delicate striae . . . . these striae might readily be mistaken for a thin coating of hair, but on closer investigation they are seen to be minute wrinkles in the surface of the membranes, the under side of which is exposed."

Rhamphorhynchus Gemmingi H. v. Meyer.

Bei weitem die eingehendeste Beschreibung über die Flughaut der Pterosaurier in der älteren Literatur verdanken wir ZITTEL (13), dessen Abbildung „eine Anzahl (8—10) gröberer Längsfalten erkennen lässt, welche fast parallel mit den Fingergliedern verlaufen. Dieselben sind nicht scharf abgegrenzt und von verschiedener Stärke. Ausser diesen Falten ist die ganze Oberfläche der Flughaut mit feinen erhabenen, in ziemlich gleichen Abständen stehenden, fast geradlinigen Längsstreifen bedeckt. .... Einzelne Streifen scheinen etwas stärker als die übrigen zu sein und da dieselben gleichzeitig durch rostbraune Farbe ausgezeichnet sind, so machen sie den Eindruck von verknöcherten Sehnen. Eine entschiedene Fältelung der Flughaut bemerkt man nur in dem Winkel zwischen Vorderarm, Mittelhand und ersten Flugfinger, wo dieselbe ja bei der Ruhelage des Flügels stark zusammengedrückt sein muss. Hier verlaufen unregelmässig geformte, kurze Wülstchen oder Fältchen nach den verschiedensten Richtungen durch einander und auch die oben beschriebenen erhabenen Streifen werden dadurch in ihrem regelmässigen Verlaufe gestört."

„Eine ganz eigentümliche Erscheinung am Patagium der *Rhamphorhynchus* bilden die oben beschriebenen starren Streifen, wofür wenigstens bei makroskopischer Betrachtung weder bei Draconen, noch Fledermäusen homologe Gebilde zu finden waren.... In der Abhandlung von SCHÖBL — Arch. mikrosk. Anat. 1871, Bd. 7 — über die histologische Beschaffenheit der Flughaut der Fledermäuse findet sich eine Erklärung für diese Streifen. SCHÖBL beschreibt hier eingehend die Structur und den Verlauf von elastischen Balken und Strängen, welche, aus Fasern von unmessbarer Feinheit zusammengesetzt, in nahezu gleichbleibender Stärke in der Flughaut verlaufen. Ihre Verteilung stimmt allerdings nicht mit jener der erhabenen Linien bei Rhamphorhynchus überein, was freilich von vorneherein bei dem ganz verschiedenen Bau beider Patagien nicht zu erwarten war, dagegen fällt eine gewisse Übereinstimmung im Verlauf, in der Entfernung und in der geringen Neigung zur Vergabelung beider Gebilde sofort in den Augen. Nach SCHÖBL vertreten die elastischen Balken bei den Fledermäusen die Stelle der Sehnen und werden meist von rechenförmig angeordneten Tastpapillen begleitet. Auch an unserer Flughaut bemerke ich in den Zwischenraumen der erhabenen Streifen zuweilen Grübchen, die vielleicht von solchen Tastorganen herrühren ....”

Wanderer (14) beschrieb das teilweise mit Flughaut versehene Exemplar derselben Art des Mineralogisch-Geologischen Museums zu Dresden an dem, ausser den feinen, nadelstichartigen Grübchen am Schädel und der Punktierung der Flughaut, „von elastischen Balken, jenen eigentühmlichen, wie dünne verknöcherte Sehnen erscheinenden Bildungen nur zwei wahrnehmbar sind; die eine davon lauft annähernd parallel der feinen Membranstreifung, während die andere deren Verlauf kreuzt.”

Eine der eingehendesten Beschreibungen der Flughautstruktur verdanken wir Prof. Döderlein (15), der vor Kurzem das von Zittel untersuchte Exemplar von *Rh. Gemmingi* einer Revision unterzog und folgendes fand:

„Hier zeigt die ganze Flughaut an allen Teilen die gut genug erhalten sind, ein System von feinen, parallel dicht nebeneinander verlaufenden Längsstreifen, die überall geradlinig bis zum Rand der Flughaut sich erstrecken. Mit blossem Auge noch deutlich sichtbar ragen diese Streifen an den besterhaltenen Stellen wie die scharfen Rippen einer Feile hervor, durch scharfe Zwischenräume voneinander getrennt, die kaum die Breite der Rippen zeigen. Im Innern der Flughaut zählt man, unter der 2. Phalange, 40—60 solcher Streifen auf die Breite von 1 cm, am Rande sinkt die Zahl stellenweise auf 25 für 1 cm. Sie verlaufen nahezu parallel oder in einem sehr spitzen Winkel zu den Phalangen des Flugfingers über die ganze Flughaut ....”

„.... Kommt eine Vereinigung zweier Streifen nur auf einer sehr kurzen Strecke zustande, so entsteht das Bild eines Knotens zwischen beiden Streifen ....”

„Einen einzelnen Streifen kann man, wo ein sehr guter Erhaltungszustand vorliegt, mitunter auf eine weite Strecke verfolgen, bis er plötzlich aufhört und die beiden Nachbarstreifen in kurzer Entfernung davon so weit sich nähern, dasz sie wieder in normalen Abstand voneinander verlaufen. Umgekehrt schiebt sich auch oft zwischen zwei Streifen plötzlich ein neuer ein ....”

„Unter dem Gelenk zwischen 2. und 3. Phalange biegen in der Nähe des Flughautrandes eine Anzahl Streifen plötzlich von ihrer geraden Richtung ab und streben dem Rande zu.”

„Ich möchte diesen Befund mir dadurch erklären, dasz ich in Übereinstimmung mit ZITTEL annehme, dasz diese Längsstreifen tatsächlich starre elastische Fasern sind, die in der Flughaut eingebettet liegen zu ihrer Stütze, und dasz sie resistenzfähiger sind, als andere Weichteile der Flughaut, durch die sie aber in ihrer Lage festgehalten werden."

DÖDERLEIN setzte seine Beobachtungen an

Anurognathus Ammoni Döderlein

fort (15), an dem „die scheinbare Gefässverzweigung durch scharf hervortretende Bruchstücke von Fasern vorgetäuscht wird, die zum Teil noch die gleiche Richtung bewahrt haben, aber von anderen gekreuzt werden . . . . Eine Anzahl der Fasern sind noch gerade, andere bogenförmig gekrümmt, vielfach offenbar gebrochen und in kurzen Stücken wirr durcheinander liegend . . . ."

DÖDERLEIN folgert daraus, das „die Aufgabe der Längsfasern, die bei den Flugsauriern die ganze Flughaut durchsetzen, war offenbar die, der Flughaut eine gewisse Starrheit zu verleihen. Es waren steife Spangen, die jedoch eine gewisse Biegsamkeit besassen, die es aber zu verhindern hatten, dasz eine Knickung der Flughaut quer zur Längsrichtung eintrat . . . ."

„Die von ZITTEL erwähnten elastischen Fasern im Fledermausflügel sind feinste mikroskopische Gebilde, die mit den groben Fasern der Pterosaurier gar nicht zu vergleichen sind. Sie dürften wohl nur dazu dienen, die Flughaut wiederstandsfähiger zu machen . . . ."

Pterodactylus Westmani Wiman.

Bei dem schönen Exemplar von *Pt. Westmani* des Museums zu Upsala fand WIMAN (16), dass „der weiche, weisse Anflug, der in seiner Konsistenz an Kalkseife erinnert, der Hauptsubstanz der Flughaut, also Bindegewebe, Muskelfasern und Haut entsprechen dürfte . . . . Wo die weisse Substanz abgefallen ist, tritt am Gestein eine feine, aber ganz deutliche, scharfe Streifung hervor. In den Rinnen zwischen den erhaltenen Streifen sitzt noch weisse Substanz. Diese Streifen erinnern lebhaft an die Stützfäden bei *Ramphorhynchus* und das umsomehr, als sie ganz wie diese durch Mazeration loskommen können und eine willkürliche Orientierung erhalten. Aber sie sind doch anderer Natur. Erstens sind sie viel feiner als bei *Rhamphorhynchus*.

Bei diesem finden sich nach DÖDERLEIN, und wie man wenigstens zum Teil an ZITTEL's Figur sehen kann, 3, 4, bis 6 Streifen auf ein Millimeter, bei *Pterodactylus Westmani* 24. Zweitens liegen sie nicht wie bei *Rhamphorhynchus* in der Flughaut, sondern bilden eine Skulptur auf der Oberfläche derselben. Das geht daraus hervor, dass die Streifen an sowohl Platte, wie Gegenplatte unter der Flughaut im Gestein hervortreten. Zwei Deutungen sind denkbar: 1) Die Oberfläche der Haut ist an Ober- und Unterseite des Flügels durch feine erhabene Streifen versteift. 2) In der Flughaut liegen wie bei *Rhamphorhynchus* und *Anurognathus* Versteifungsfäden, die nur dadurch beobachtet werden können, dass sie durch die Haut im Gestein abgedrückt werden."

„Die letztere Deutung ist deshalb nicht wahrscheinlich, weil eine so feine Streifung nicht durch die Haut, die dicker gewesen sein muss, als die Streifen durchgedrückt werden könnte. Wenn also meine Deutung richtig ist, so versteifen die *Rhamphorhynchoidea* und die *Pterodactyloidea* ihre Flughaut nach verschiedenen Methoden."

Wie aus den angeführten Zitaten ersichtlich, stimmen die Meinungen über die von ZITTEL sogenannten elastischen Fasern des Pterosaurier-Patagiums insoferne überein, dass derartige Gebilde ausser ZITTEL von WANDERER, DÖDERLEIN und WIMAN beobachtet wurden. Wie aus den unten folgenden Erörterungen klar zu ersehen ist, scheint DÖDERLEIN genau dieselben Gebilde, die ich fluorographisch auf Tafel II. abbilde, auch bei *Anurognathus* gesehen zu haben.

3. Die elastischen Fasern bei *Pterodactylus crassipes*
H. v. Meyer.

H. v. MEYER erwähnte 1857 einen neuen Pterosaurier unter den Namen *Pterodactylus crassipes* (17) und berichtet in seiner „Zur Fauna der Vorwelt" über die Flughaut dieses Exemplares folgendes:

„An keinem Pterodactylus habe ich die Erscheinung, die man den Falten der Flughaut beizulegen geneigt ist, deutlicher wahrgenommen, als an diesem. Allein selbst hier kann ich sie nicht für das halten, wofür man sie gern ausgeben möchte, weil sie, abgesehen davon, dass der Flugfinger sich nicht in der Nähe vorfindet, für Hautfalten zumal in gepresstem Zustande, nicht scharf und bestimmt genug ausgedrückt sich darstellen. Diese Erscheinung wird daher nur in den Unebenheiten des Bodens und den Bewegungen des Wassers, woraus sich das Gebilde absetzte, ihren Grund haben[1])"

Das Objekt (Hauptplatte No. 6928, Gegenplatte No. 6929) habe ich am 20. März 1928 im Teyler-Museum in Anwesenheit der Herren Prof. EUG. DUBOIS und Prof. A. D. FOKKER fluorographisch untersucht. Sofort nach Einschaltung des durch eine Rein Uviollicht Strahlenlänge 366-Platte filtrierten ultravioletten Lichtes fluoreszierte das Objekt derart, dass das fluorographische Bild nach einer zweistündigen Exposition auch photographisch festgehalten werden konnte.

H. v. MEYER bildete in seinem Werk auf Taf. 3. fig. 3 die Hauptplatte (No. 6928 Teyler Museum, hier Taf. I) ab. Neben dem Metacarpus beobachtete MEYER kurze, verästelte, feine, grösstenteils gebogene Streifen, die ebenso gut auch auf der Gegenplatte zu beobachten sind. Hier, auf der Gegenplatte (No. 6929 Teyler Museum) erscheinen diese Linien oder Streifen von dem gelben Grundton des Gesteins etwas abweichend in weislicher Farbe.

Zur fluorographischen Aufnahme montierten wir mit Prof. FOKKER beide Platten neben einander derart auf, dass die (etwas grössere) Hauptplatte links, die Gegenplatte daneben rechts befestigt wurde. Beide Objekte waren zwischen Korkstücken festgehalten (zwei schmale Korkstücke trennten auch beide Platten von einander), die natürlich ein stark fluoreszierendes Bild zeigten (Taf. II. k).

Auf der Hauptplatte fluoreszierten — wie aus Taf. II. ersichtlich — einige Krallen, das Femur und die Tibia, sowie der Metacarpus. Zwischen Femur und Metacarpus zeigen sich bogenförmig angeordnet einige kleine, schwach fluoreszierende Punkte, deren Wesen erst aus der Gegenplatte erhellt. Auf dieser nähmlich findet man ausser einer feinen Spur der Tibia und ausser 3 äusserst stark fluoreszierenden Krallen, als Spiegelbild der bogenförmigen Partie der Hauptplatte *einen Bündel besonders gut fluoreszierender Streifen* (Taf. II. ef.). Diese Streifen sind teils gerade, teils gekrümmt, besonders ihr Basalteil fluoresziert hell. Alle Streifen konvergieren gegeneinander, nur einen hellen Streifen sieht man nahezu wagerecht zu den Bündel stehend (Taf. II. f). Aus der genauen Orientierung des fluoreszierenden Bildes konnte es festgestellt werden, dass dieser Streifen von einen Splitter des Femurs verursacht wurde. Im ganzen zählte ich 11 Fasern, die in ihrer proximalen Hälfte bedeutend besser, distal nur schwach fluoreszieren. Zwischen beiden Hälften erscheinen an manchen dunkle Stellen, die von der Faltenbiegung verursacht sein können.

---

[1]) Gesperrt von mir.

Die Länge des fluoreszierenden Bündels beträgt ca. 33 mm, die Länge der einzelnen Fasern 8—10 mm, alle sind 1—1.5 mm breit.

Offenbar sind die einzelnen Elemente des fluoreszierenden Bündels jene elastischen Fasern, die die zum Teil in Falten gelegte Flughaut versteiften. Die Dicke der einzelnen Fasern ist allerdings sehr beträchtlich, keinesfalls so fein, wie es von Zittel und bebesonders von Wiman beobachtet wurde. Ihrer Gestalt und ihrer Anordnung nach erinnern sie an die Beobachtung Döderlein's, wonach: „eine Anzahl der Fasern gerade, andere bogenförmig gekrümmt sind, vielfach offenbar gebrochen und in kurzen Stücken wirr durcheinander liegend ... Es waren steife Spangen, die jedoch eine gewisse Biegsamkeit besassen."

Andererseits betont Wiman, dass diese „nicht in der Flughaut liegen (wie bei *Rhamphorhynchus*), sondern eine Skulptur auf der Oberfläche derselben bilden. Das geht — schreibt Wiman — daraus hervor, dass die Streifen an sowohl Platte, wie Gegenplatte unter der Flughaut im Gestein hervortreten."

Endgültig kann die Frage dieser Faserstruktur erst dann gelöst werden, wenn womöglich alle bisher bekannten Pterosaurier-Reste mit erhaltener Flughaut fluorographisch untersucht werden. Dann werden wir es erst sicher feststellen können, ob die am *Pterodactylus crassipes* beobachteten und fluorographisch photographierten Fasern ident mit den „elastischen Fasern" der übrigen angeführten Exemplaren sind.

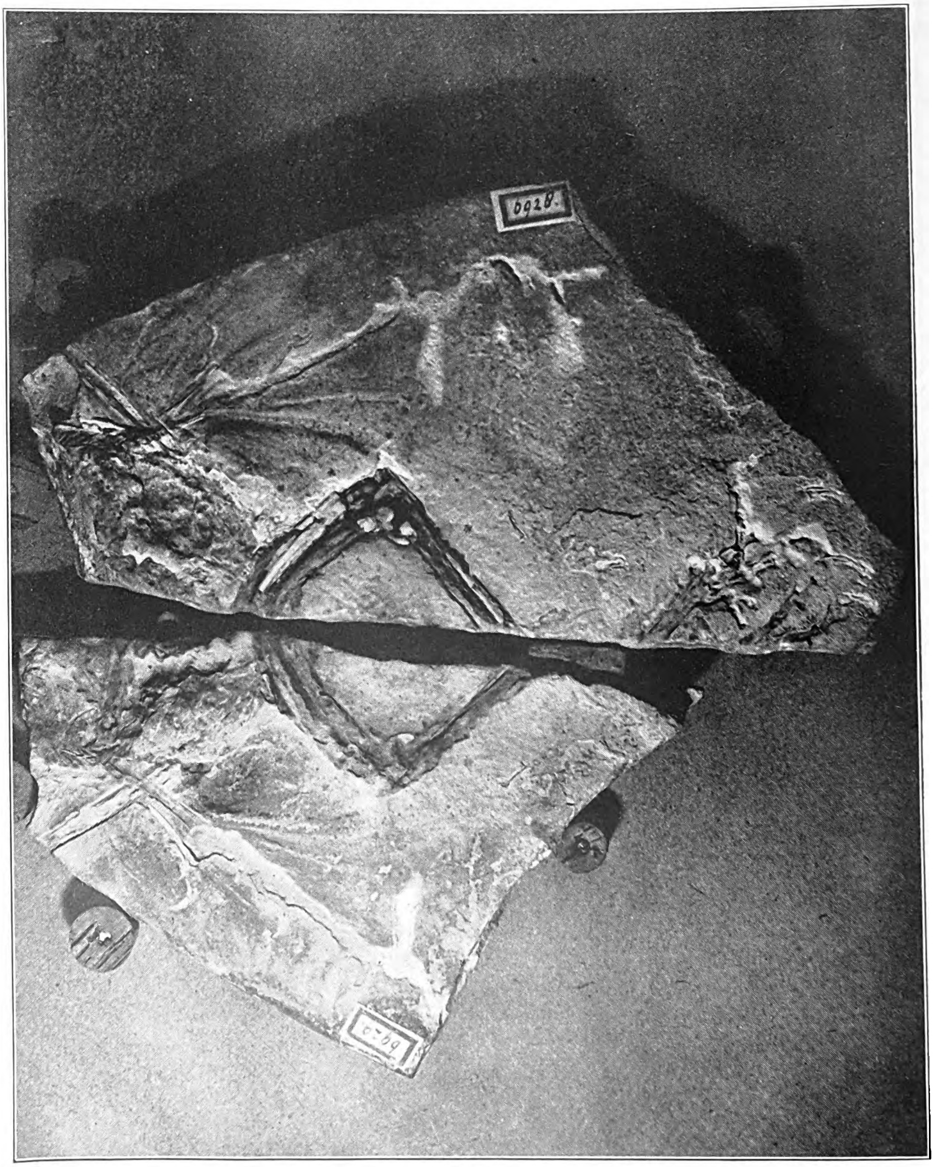
Ohne die übrigen Exemplare mittels dieser vorzüglichen neuen Hilfsmethode Miethe's und Born's untersucht zu haben, kann ich vorläufig nur soviel behaupten, dass dieser fluoreszierende und höchstwahrscheinlich elastische Fasern repräsentierende Bündel *organischer Natur* ist (sonst hätte es kein Fluoreszenzbild gegeben), und nicht, wie es H. v. Meyer meinte „in den Unebenheiten des Bodens und den Bewegungen des Wassers, woraus sich das Gebilde absetzte, ihren Grund hat."

Allen Museen, die die oben angeführten Pterosaurier-Reste mit wenigstens teilweise erhaltener Flughaut besitzen, möchte ich dringend raten, die Objekte im ultravioletten Licht fluorographisch zu untersuchen um auf diese Weise die Frage der Faserstruktur endgültig beantworten zu können.

Budapest, Kgl. Ung. Geologische Anstalt 17. Juni 1928.

LITERATUR.

1. **Lemoine.** Sur l'application des rayons Röntgen aux études paléontologiques. Bull. Soc. Géol. France, (3) 24, 660—662, 1896.
2. **Brühl.** Über Verwendung von Röntgenschen Strahlen zu paläontologisch-diagnotischen Zwecken. Arch. Anat. Physiol., 1896, Physiol. Abteilung, 547.
3. **Branco** W. Die Anwendung der Röntgenstrahlen in der Paläontologie. Physikal. Abhandl. Preuss. Akad. Wiss., 1906, II. Abhandl., pp. 55, Taf. 4.
4. **Lambert** J. Étude sur les Echinides de la Molasse de Veuce. Ann. soc. des lettres, sciences et arts des Alpes marit., 20, 1—64, Taf. 10, 1906.
5. **Fischer** E. Zur Anwendung der Röntgenstrahlen in der Paläontologie. Mitt. Naturf. Ges. Halle a. S., 1914, Bd. 4, No. 2. — Zitiert nach **Deecke**: Die Fossilisation, Berlin, 1923. Am a. O. finde ich **Fischer**'s Abhandlung nicht.
6. **Hartmann-Weinberg** A. & **Reinberg** A. S. Die fossilhaltigen Gesteinsformationen im Röntgenbilde. Bull. Acad. Sci. Russie, Leningrad, 1925, 279—292, Taf. 2.
7. **Miethe** A. Über die Photographie von Fossilien bei ihrem eigenen Fluoreszenzlicht. Photogr. Korrespondenz No. 752, 1927.
   Miethe A. & **Born** A. Die Fluorographie von Fossilien. 1. Die Methode der Fluorographie. 2. Die paläontologische Bedeutung der Methode. Palaeont. Zeitschr., Bd. 9, H. 4, 343—356, 1928.
8. **Goldfuss.** Beiträge zur Kenntnis verschiedener Reptilien der Vorwelt. Nova Acta Ac. Caes. Leop. — Car. XV. 1832.
9. **Quenstedt** F. A. Handbuch der Petrefaktenkunde. 2. Aufl., 174, 1867.
10. **Winkler** T. C. Le Pterodactylus Kochi. Arch. Musée Teyler, 1873.
11. **Nopcsa** F. Baron. Die Familien der Reptilien. Berlin, 1923, p. 182.
12. **Marsh** O. C. The wings of Pterodactyles. Amer. Journ. Sci., 3, 23, 1882.
13. **Zittel** K. A. Über Flugsaurier aus dem lithographischen Schiefer Bayerns. Palaeontogr. 29.
14. **Wanderer** K. Rhamphorhynchus Gemmingi H. v. Meyer. Ein Exemplar mit teilweise erhaltener Flughaut a. d. Kgl. Mineralog. Geol. Museum von Dresden. Palaeontogr. 55, 1908.
15. **Döderlein** L. Anurognathus Ammoni, ein neuer Flugsaurier. Sitzungsber. mathem. physik. Klasse der Bayer. Akad. Wiss., 1923.
16. **Wiman** C. Über Pterodactylus Westmani und andere Flugsaurier. Bull. Geol. Inst. Univ. Upsala, 20, 1925.
17. **Meyer** H. v. Beiträge zur näheren Kenntnis fossiler Reptilien. Jahrb. f. Min., 1857, 535.
18. **Meyer** H. v. Zur Fauna der Vorwelt. Reptilien a. d. lithographischen Schiefer der Jura in Deutschland. Frankfurt a. M., 1860, p. 65, Taf. 3, Fig. 3.



Tafel I.

Hauptplatte (No. 6928) und Gegenplatte (No. 6929) von *Pterodactylus crassipes* H. v. Meyer. Tageslichtaufnahme im Teyler Museum in Haarlem.

R
263

Aus den Beständen der Niedersächs. Staats- und Universitätsbibliothek ausgeschieden.
Göttingen, den 10. AUG. 1956

ARCHIVES

DU

MUSÉE TEYLER

SÉRIE III, VOL. VI.

FASCICULE 2.

A. D. Fokker, Introduction à la Mécanique Ondulatoire et à la Théorie des Quanta (conférences) . . 51

HAARLEM. — LES HÉRITIERS LOOSJES.
1928.

INLEIDING TOT DE GOLVINGS- EN DE QUANTUM-MECHANICA.

ZATERDAGMIDDAGVOORDRACHTEN IN TEYLER'S STICHTING
OP 3, 10 EN 17 MAART 1928

DOOR

A. D. FOKKER.

HOOFDSTUK I.

De analogie van de voortplanting van golven en stralen met de beweging van deeltjes.

Tusschen 1828 en 1830 publiceerde WILLIAM ROWAN HAMILTON in de deelen 15, 16 en 17 van de Transactions der Royal Irish Academy zijn verhandelingen over „Systems of Rays". Daar deze stralen werden opgevat als lichtcorpuskels overeenkomstig de emissietheorie, konden uit dit werk voortkomen grondstellingen van de theoretische mechanica, die niet zoozeer enkele bewegingen als wel bundels van naburige bewegingen betreffen, analoog aan die van bundels lichtstralen. Toch is HAMILTON's theorie van de lichtvoortplanting niet aan de corpusculaire hypothese gebonden. HAMILTON zelf toont aan dat op de voorstellingen der golftheorie zijn stellingen evenzeer toepasselijk zijn. Men heeft dan in de door hem ingevoerde „oppervlakken van constante werking" te zien de golffronten der ondulaties.

Wij hebben nu een tijdperk achter ons, waarin wij, gedwongen door de verschijnselen der photoëlectriciteit en der warmtestraling, ons gewend hebben aan de gedachte, dat er aan het licht ook een corpusculaire trek moet zijn, die wij in de benaming der lichtquanta tot uiting brengen. Thans, honderd jaar na HAMILTON, hebben verschillende physici, eerst theoretisch, dan experimenteel, aanleiding gevonden om, omgekeerd, bij de beweging van elementaire deeltjes te denken aan een beeld van een trillende golfbeweging eerder dan aan bewegende punten. Dat geeft aan de geniale concepties van HAMILTON een nieuwe actualiteit.

Beschrijving van een golfbeweging. De voortplanting van geluidsgolven kan men beschrijven indien men de waarde aangeeft, in elk punt en op ieder oogenblik, van de mate van luchtverdunning of luchtverdichting, die men daar aantreft. Beperkt men zich tot éen enkele plaats, dan zal de luchtverdichting een periodieke of nagenoeg periodieke functie van den tijd zijn. Beperkt men zich tot een enkel oogenblik, dan zal de luchtverdichting een functie van de plaats zijn, die eveneens periodieke schommelingen vertoont, zoo dat de plaatsen van maximale luchtverdichting gelegen zijn in een reeks oppervlakken, golffronten, die op golflengteafstand van elkander verwijderd zijn.

Een voortplanting van lichtgolven kan op dezelfde wijze beschreven worden door aan te geven welke functies de componenten der electrische en magnetische veldsterkten zijn van plaats en tijd.

Men zal in zulke gevallen het gedrag der golven resumeeren in de waarden van een „golffunctie", die in tijd en ruimte periodiciteitseigenschappen vertoont. Deze periodiciteitseigenschappen kunnen wij samengevat denken in een factor, die, als een cosinus of sinusfunctie, alleen het dobberen aangeeft, terwijl de hoogte, resp. diepte van golfbergen en golfdalen aangegeven wordt door een amplitudefactor a, die nog in ruimte en tijd veranderlijk kan zijn. Als algemeene gedaante der golffunctie willen wij nemen

$$\psi = a\, e^{i\chi},$$

waarbij de bedoeling is, dat het reëele gedeelte der functie ψ de golffunctie zal voorstellen.

Breiden de golven zich van een centrum uit, dan zal de amplitudefactor a kleiner worden naarmate wij ons van het centrum verwijderen. Neemt de trillingsbron in sterkte af, dan zal a mettertijd kleiner worden.

De periode, de golflengte en de richting der golfnormaal schuilen in de eigenschappen van de functie χ. Na een periode T moet deze met 2π zijn toegenomen, zoodat frequentie en periode bepaald worden door

$$2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} = \frac{\partial\chi}{\partial t}, \text{ stel } = \alpha_0,$$

Een golffront wordt, als oppervlak van gelijke phase, op zeker oogenblik in de ruimte gegeven door $\chi =$ constant, bij vastgehouden t. De richtingscosinussen van de normaal op het golffront worden dus bepaald door de afgeleiden van χ naar de coördinaten. Gaan wij in die normaalrichting over een golflengte λ voort, in de richting, waarin ook de golf zich voortplant, dan moet χ met 2π zijn afgenomen. Dit geeft ons

$$\frac{-2\pi\cos\alpha}{\lambda}=\frac{\partial\chi}{\partial x}=\alpha_1,\ \frac{-2\pi\cos\beta}{\lambda}=\frac{\partial\chi}{\partial y}=\alpha_2,\ \frac{-2\pi\cos\gamma}{\lambda}=\frac{\partial\chi}{\partial z}=\alpha_3.$$

De differentiaalquotiënten van χ naar t, x, y, z hebben wij hier aangeduid met de indices 0, 1, 2, 3, evenals wij verder nog vaak x_0, x_1, x_2 en x_3 zullen schrijven waar wij t, x, y, z bedoelen.

Wij willen aan de eene zijde een groote mate van algemeenheid openlaten. De periode T zal niet altijd, noch overal dezelfde behoeven te zijn. Indien de trillingsbron zich met variabele snelheid beweegt, zal wegens het Doppler-effect de periode mettertijd, en in verschillende richtingen, diverse waarden hebben. Eveneens zal de golflengte variabel zijn. Ook kan de voortplantingssnelheid van plaats tot plaats veranderen. De richting der golfnormaal, — denk aan door een draaiende spiegel gereflecteerde golven — zal ook veranderlijk mogen zijn.

Maar aan de andere zijde willen wij ons ter vereenvoudiging beperken tot zulke gevallen, waarbij de amplitude, de frequentie, de richting en golflengte zich slechts zeer weinig veranderen, indien wij ons verplaatsen over afstanden, resp. gedurende tijdsverloopen wachten, van een golflengte, resp. een periode. Dit zijn gevallen analoog aan dewelke met de klassieke of geometrische optica behandeld kunnen worden. Wiskundig kunnen wij deze beperking formuleeren door de kleinheid te stellen van

$$\frac{\partial a}{\partial x_i} \ll a\frac{\partial\chi}{\partial x_m},\quad\text{en}\quad \frac{\partial^2\chi}{\partial x_i\,\partial x_j} \ll \frac{\partial\chi}{\partial x_m}\,\frac{\partial\chi}{\partial x_n}.$$

De wetten der golfbeweging. Hebben wij in het voorgaande, om zoo te zeggen, het kinematische aspect der golfbeweging in de golffunctie ψ gevat, wij moeten ons ervan rekenschap geven, dat niet elke willekeurige golfbeweging mogelijk is. Het ligt voor de hand dat het medium met zijn eigenschappen daarbij een groote rol speelt, ja dat het die eigenschappen zijn welke zich in het verloop der golfbeweging uiten. De voortplantingssnelheid en de dispersie karakteriseeren het medium waarin zich het trillingsverschijnsel afspeelt.

Wij zijn eraan gewend, dat de voortplanting van golven wordt beheerscht door een partieele differentiaalvergelijking, waaraan de golffunctie heeft te voldoen. Bij de voortplanting langs een gespannen koord, bij de geluidsgolven, bij de electromagnetische golven is deze vergelijking van de tweede orde en lineair. In dubbelbrekende kristallen is zij lineair en van de vierde orde. Wij kunnen zulk een differentiaalvergelijking symbolisch weergeven door

$$F\,(D_t\,,\,D_x,\,D_y,\,D_z)\,\psi = 0\;.$$

waarbij F voorstelt een functie van de variabelen D_t, D_x, D_y, D_z, en deze voorstellen een partieele differentiatie naar resp. t, x, y, z, waaraan de functie welke volgt moet worden onderworpen. $D_t{}^2\,\psi$ zal beteekenen $\partial^2\psi/\partial t^2$, en $c^2 D_x{}^2\psi$ zal zijn $c^2\partial^2\psi/\partial x^2$, zoodat $(D_t{}^2 - c^2 D_x{}^2)\,\psi$ zal beteekenen $\partial^2\psi/\partial t^2 - c^2\partial^2\psi/\partial x^2$. De lezer kan hier vele andere voorbeelden aan toevoegen.

De functie F moet een veelterm zijn, een som van machten en producten der D_i. Met een wortel uit een differentiaaloperatie kunnen wij voorloopig nog niet werken.

Indien wij ons verder tot absorptievrije media beperken, dan beteekent dit dat de coëfficiënten bij de differentiaties van even orde reëel, bij die van oneven orde imaginair zijn. Overigens mogen die coëfficiënten willekeurige functies van de coördinaten en van den tijd zijn.

Welnu, laat de differentiaalvergelijking gegeven zijn en laat ons beproeven met een golffunctie van den vorm $\psi = a e^{i\chi}$ daaraan te voldoen. Indien wij vasthouden aan hetgeen omtrent de grootte der golflengte, vergeleken bij de afmetingen van het golfgebied, gezegd is, vinden wij bij substitutie van ψ, dat als eerste benadering voldaan moet worden aan

$$0 = a\,e^{i\chi}\Big[\,F\,(i\alpha_0,\,i\alpha_1,\,i\alpha_2,\,i\alpha_3) +$$
$$+ \sum(m)\,\frac{\partial\,F}{\partial i\alpha_m}\cdot\frac{\partial\,a}{a\,\partial x^m} + \frac{1}{2}\sum(m\;n)\,\frac{\partial^2\,F}{\partial i\alpha_m\,\partial i\alpha_n}\cdot\frac{\partial^2\,i\chi}{\partial x^m\,\partial x^n} + \;.\;.\;\Big]\,.$$

Met $F\,(i\alpha_0,\,i\alpha_1,\,i\alpha_2,\,i\alpha_3)$ wordt bedoeld dat men in de functie F voor D_t substitueert $i\alpha_0$, voor D_x zet $i\alpha_1$, enz. Met $\partial F/\partial i\alpha_m$ wordt bedoeld dat men F differentieert naar D_m, en vervolgens substitueert als voren. Bij de sommatie moet men alle indices 0, 1, 2, 3 nemen.

Deze vergelijking is, zij het in iets andere schrijfwijze, door **Lorentz** gegeven in zijn laatsten cursus waarin hij het onderwerp eener verhandeling van 1906 opnieuw uitwerkte *).

In deze vergelijking liggen opgesloten de wetten der golfuitbreiding. Met de genoemde onderstellingen omtrent de coëfficiënten in F is de eerste term tusschen de haken reëel, en het overige stuk zuiver imaginair. De vergelijking vereischt dus twee dingen. Ten eerste moet zijn

$$F\ (i\alpha_0,\ i\alpha_1,\ i\alpha_2,\ i\alpha_3) = F^*\ (\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3) = 0.$$

waarbij F^* de functie is, die bij substitutie van α_m hetzelfde geeft als F bij substitutie van $i\alpha_m$.

Deze voorwaarde geeft ons eene betrekking tusschen de verschillende α_m, dat wil zeggen tusschen de frequentie, de golflengte en de richting der golfnormaal. Kiest men een bepaalde frequentie, en een bepaalde richting der golfnormaal, dan is door deze betrekking de golflengte bepaald, of wel de voortplantingssnelheid. Ook de dispersie-eigenschappen van het medium liggen in deze betrekking opgesloten.

De tweede voorwaarde waaraan voldaan moet worden is

$$\sum \frac{\partial F^*}{\partial \alpha_m} \cdot \frac{\partial a}{a \partial x^m} + \frac{1}{2} \sum (m\,n) \frac{\partial^2 F^*}{\partial \alpha_m \, \partial \alpha_n} \cdot \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^m \, \partial x^n} = 0.$$

Dit is een betrekking die iets zegt over de verandering der amplitude a, en deze in verband brengt met de tweede afgeleiden van χ, dat is met de kromming van de phasefronten $\chi\ (t, x, y, z) =$ const.

De beweging van golfgroepen. Indien de golfvergelijking lineair is — en dat onderstelden we — zal de superpositie van twee mogelijke golfstelsels een golfstelsel leveren, dat wederom aan de vergelijking voldoet. Twee zulke elementaire golfstelsels zullen met elkander interfereeren. Op de plaatsen waar de maxima en waar de minima van beide op elkaar vallen, zal de golfbeweging heftig zijn, op de plaatsen waar de maxima van het eene met de minima van het andere samenvallen en omgekeerd, zal de golfbeweging gestild worden. Door superpositie van een groot aantal elementaire golfstelsels kan men bereiken, dat de golfbeweging zich tot een afgebakend gebied beperkt, en daarbuiten nul is. Zulk een afge-

---

*) H. A. **Lorentz**, Die Fortpflanzung von Wellen und Strahlen in einem beliebigen nicht absorbierenden Medium, Abh. ü. theor. Physik, p. 415.

bakend gebied, noemen wij een golfgroep, en de snelheid waarmede het zich verplaatst heet de groepsnelheid. Deze groepsnelheid kan een andere zijn dan die waarmede zich de golffronten in een elementair golfstelsel verplaatsen. Met name is dit het geval wanneer de voortplantingssnelheden der elementaire golfstelsels verschillend is, in geval van dispersie. Ieder heeft wel opgemerkt dat in den golvenkring, die zich om een steenplons op een vijver uitbreidt, de golven aan de binnenzijde van den kring op komen zetten, door den kring heen schuiven, en aan den buitenkant verdwijnen. De phasesnelheid is hier grooter dan de groepsnelheid.

De beweging der golfgroep wordt bepaald door de beweging van punten zoodanig, dat de phase, d. i. de χ, daarin dezelfde is voor de elementaire golfstelsels. Kies een punttijdstip uit, zoodanig dat daar voor twee golfstelsels, door α_m en $\alpha_m + \delta\alpha_m$ gekarakteriseerd, de phase χ dezelfde waarde χ^1 heeft. Dan is in de omgeving daarvan, in door de relatieve tijdsverloopen $\triangle t$ en relatieve coördinaten $\triangle x$, $\triangle y$, $\triangle z$ bepaalde punttijdstippen, de phase resp.

$$\chi = \chi^1 + \alpha_0 \triangle t + \alpha_1 \triangle x + \alpha_2 \triangle y + \alpha_3 \triangle z,$$
$$\chi = \chi^1 + (\alpha_0 + \delta\alpha_0) \triangle t + (a_1 + \delta\alpha_1) \triangle x + . + . .$$

De punttijdstippen, waar de beide golfstelsels dezelfde phase vertoonen, worden dus bepaald door

$$\delta\alpha_0 \triangle t + \delta\alpha_1 \triangle x + \delta\alpha_2 \triangle y + \delta\alpha_3 \triangle z = 0.$$

Zal nu de groep bestaan uit een groot aantal stelsels, door alle mogelijke $\delta\alpha_m$ gekenmerkt, dan zal de overeenstemming alleen bestaan voor die $\triangle t$, $\triangle x$, enz. die tegelijk aan al de vergelijkingen voldoen die door de verschillende stellen $\delta\alpha_m$ bepaald worden. Dit zou medebrengen $\triangle t = 0$, $\triangle x = 0$, enz., indien de $\delta\alpha_m$ willekeurig allerlei waarden konden hebben. Echter brengt de eigenschap van het medium $F^* = 0$ mede, dat telkens

$$\delta\alpha_0 \frac{\partial F^*}{\partial\alpha_0} + \delta\alpha_1 \frac{\partial F^*}{\partial\alpha_1} + \delta\alpha_2 \frac{\partial F^*}{\partial\alpha_2} + \delta\alpha_3 \frac{\partial F^*}{\partial\alpha_3} = 0.$$

Nu is er dus blijvende overeenstemming van de phase χ mogelijk in die punttijdstippen, voor welke een zelfde verhouding, du, bestaat tusschen

$$\frac{\triangle t}{\partial F^*/\partial\alpha_0} = \frac{\triangle x}{\partial F^*/\partial\alpha_1} = \frac{\triangle y}{\partial F^*/\partial\alpha_2} = \frac{\triangle z}{\partial F^*/\partial\alpha_3} = du.$$

Zulk een rij van punten en tijdstippen bepaalt een snelheid van beweging en dit is de gezochte groepsnelheid. De componenten der groepsnelheid worden dus gegeven door

$$\frac{\partial F^*/\partial \alpha_1}{\partial F^*/\partial \alpha_0}, \quad \frac{\partial F^*/\partial \alpha_2}{\partial F^*/\partial \alpha_0}, \quad \frac{\partial F^*/\partial \alpha_3}{\partial F^*/\partial \alpha_0}.$$

In deze uitdrukkingen moeten de gemiddelde waarden van α_m gezet worden, waaromheen zich de α_m-waarden voor de samenstellende golfstelsels groepeeren.

Tot dezelfde uitkomst kan men ook geraken door, met LORENTZ, op te merken dat de tweede vergelijking aan de amplitudeverandering alleen een beperking stelt in de „richting" van den tijd-ruimte-vector met de vier componenten $\partial F^*/\partial \alpha_0$, $\partial F^*/\partial \alpha_1$, $\partial F^*/\partial \alpha_2$ en $\partial F^*/\partial \alpha_3$. Immers, de $(1+3)$-dimensionale gradiënt van de amplitude staat scalair daarmede vermenigvuldigd. In een richting „loodrecht" op dien vector $\partial F^*/\partial \alpha_m$ kan men dus de amplitude naar willekeur laten veranderen, eventueel tot nul laten afnemen. De „lijnen" door dien vector gevormd kunnen dus dienen tot begrenzing der golfbeweging, zij kunnen en zullen dus aangeven de beweging eener golfgroep.

De kanonische bewegingsvergelijkingen. Laat ons thans een golfgroep in haar beweging volgen. De elementaire stappen dier beweging worden bepaald door

$$\frac{dx^i}{du} = \frac{\partial F^*}{\partial \alpha_i}, \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Gedurende die beweging moet steeds aan de conditie $F^* = 0$ voldaan worden. Bij de verplaatsing zullen de α_i dus niet constant kunnen blijven. Wij zullen moeten hebben

$$\sum(i)\ \frac{\partial F^*}{\partial x_i}\, dx^i = -\sum(i)\ \frac{\partial F^*}{\partial \alpha_i}\, d\alpha_i = -\sum(i)\ \frac{d\alpha_i}{du}\, dx_i\ ,$$

Dezelfde betrekking moet gelden wanneer wij, in een andere richting, een andere golfgroep volgen. De eenvoudigste conditie die voldoende is om dit te verzekeren is

$$\frac{d\alpha_i}{du} = -\frac{\partial F^*}{\partial x_i}, \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

al kunnen wij uit het voorgaande nog niet concludeeren, dat dit noodzakelijk is.

Het tweetal differentiaalvergelijkingen, dat wij nu gekregen hebben, gelijkt sprekend op de bewegingsvergelijkingen van

Hamilton voor een deeltje in den kanonischen vorm. Weliswaar hebben wij hier twee maal vier vergelijkingen, inplaats van tweemaal drie, maar dat ligt hieraan, dat wij de omgeving, waarin de golven zich afspelen, met den tijd veranderlijk hebben gedacht, en omdat wij de tijdsvariabele hier op denzelfden voet hebben behandeld, slechts door een index 0 aangeduid, als de ruimtevariabelen.

Frequentie en golfdichtheid als energie en impuls. De variabelen, welke in de gewone bewegingsvergelijkingen van Hamilton naast de coördinaten voorkomen, zijn de componenten van de hoeveelheid van beweging. In de bewegingsvergelijkingen voor de golfgroep zien wij α_0, α_1, α_2, en α_3. Daarvan is

$$\alpha_0 = 2\pi\nu.$$

Welnu, Planck heeft geleerd om tusschen de energie en de frequentie een betrekking te denken, n.l. $\varepsilon = h\nu$ waarin h het naar Planck genoemde elementaire werkingsquantum $6{,}5 \times 10^{-27}$ erg sec. is. Onze α_0 kan dus beantwoorden aan een energie. De energie van een deeltje, leert de relativiteitstheorie, behoort als tijdscomponent van een vector bij de drie componenten der tegengestelde hoeveelheid van beweging. Dit past heel mooi, wanneer α_1, α_2, α_3 beantwoorden aan die impulscomponenten, zooals de gelijkenis der kanonische vergelijkingen voor de golfgroep met die voor een deeltje suggereert.

Noemen wij de componenten van den (1+3)-dimensionalen energie-impulsvector p_0, p_1, p_2, p_3, dan ligt het dus voor de hand om te stellen

$$\alpha_0 = \frac{2\pi}{h} p_0, \quad \alpha_1 = \frac{2\pi}{h} p_1, \quad \alpha_2 = \frac{2\pi}{h} p_2, \quad \alpha_3 = \frac{2\pi}{h} p_3.$$

Louis de Broglie is het eerst op de gedachte gekomen, om de eerste dezer vier betrekkingen,

$$p_0 = h\nu,$$

de betrekking van Planck, toe te passen op een deeltje, dat massa, en dus energie heeft. Hij heeft het eerst aan een deeltje de gedachte van een golftrilling geassocieerd, en hij heeft ook de consequentie getrokken om deze stelling, die slechts één component van een (1+3)-dimensionale vectorvergelijking is, aan te vullen met de drie andere betrekkingen. Deze houden in

$$p_1 = -h\frac{\cos\alpha}{\lambda}, \quad p_2 = -h\frac{\cos\beta}{\lambda}, \quad p_3 = -h\frac{\cos\gamma}{\lambda}.$$

De impuls is aldus geassocieerd aan een ruimte-vector, die in zijn componenten geeft de golfdichtheid en de richting der golfnormaal.

Experimenteele vondsten. Ongeveer tezelfdertijd dat theoretici de conceptie uitspraken van aan materieele deeltjes geassocieerde golven, kwam er van de zijde der experimentatoren een dergelijke aanwijzing. Na de publicatie van de uitkomst van voorlooperwerk, deelde C. Davisson met L. H. Germer, in Nature **119,** p. 558, 1927 mede, wat zij bevonden hadden bij het onderzoek van de terugkaatsing van evenwijdige electronenbundels tegen zijvlakken van een nikkelkristal. De terugkaatsing was niet diffuus, zooals vroegere minder verfijnde proeven deden denken. Integendeel: in bepaalde richtingen was de reflectie overwegend sterker dan in andere, zelfs in zulke mate dat de gereflecteerde bundel nauwelijks minder scherp begrensd was dan de invallende. De oriëntatie van deze richtingen van selectieve reflectie vertoonde duidelijk de symmetrie die kenmerkend is voor het kristal en het reflecteerende kristalvlak.

Evenmin als men van een reflecteerend buigingstralie selectieve lichtreflectie in bepaalde richtingen kan begrijpen, indien men niet denkt aan een golfnatuur van het licht, kan men laten in dit geval te denken aan een golfnatuur van den electronenbundel.

G. P. Thomson (Proc. Roy. Soc. London, A 117, p. 600, 1928) heeft een bundel van 25000-volts-elektronen door zeer dunne huidjes van celluloid, goud en aluminium laten schieten. Enkele van die aluminiumhuidjes waren éen samenhangend kristal. De verstrooiïng der electronen bij dezen doorgang was niet diffuus. De figuur, die de electronen op een fluorescentiescherm opwekten, vertoonde een discrete structuur, op de manier van de opnamen die Laue kreeg bij de verstrooiïng van X-stralen die door een kristal heengingen. Ook dit wijst erop dat men bij die elektronen te denken heeft aan golven, die bij hun verstrooiïng door de regelmatig gerangschikte atomen in bepaalde richtingen elkander versterken, in andere elkander uitdooven.

Laat ons berekenen, welke golflengte volgens De Broglie bij zulke 25000-volts-elektronen gedacht moet worden. De lading van een elektron is 4.77×10^{-10} elektrostatische eenheid. De kinetische energie wordt dus

$$\tfrac{1}{2}\, mv^2 = 4{,}77 \times 10^{-10} \times 25 \times 10^3/300 \ erg.$$

De massa van een electron is 1/1850 van die van een waterstofatoom, en deze is $1,65 \times 10^{-24}$ gram. Daarmee vindt men voor de snelheid

$$v = 95 \times 10^{8} \text{ cm/sec.}$$

De golflengte wordt

$$\lambda = \frac{h}{mv},$$
$$= 0,75 \times 10^{-9} \text{ cm.}$$

Dit kwam overeen met de waarde die THOMSON uit de waargenomen interferentiefiguur, de kristalstructuur en atoomafstand in het aluminiumkristal bekend zijnde, kon afleiden.

De stationaire bewegingswijzen in een atoom. Volgens de aanvankelijke hypothese van BOHR zou in de stabiele bewegingswijze van het waterstofatoom een electron om de kern bewegen in een cirkelbaan met $0,53 \times 10^{-8}$ cm straal, terwijl de snelheid bedragen zou $7,29 \times 10^{-3}$ van de lichtsnelheid. Laat ons de golflengte berekenen die hierbij gedacht zou moeten worden. Wij krijgen

$$\lambda = \frac{h}{mv},$$
$$= \frac{6,5 \times 10^{-27} \times 1850}{1,65 \times 10^{-24} \times 7,29 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{10}} = 3,36 \times 10^{-8} \text{ cm.}$$

In de eerste plaats zien wij dat hier de te verwachten golflengte grooter uitvalt dan de dimensies van het atoom. Ja, bij nader toezien blijkt de golflengte gelijk aan den omtrek van de cirkelbaan van het elektron! Dit laatste gaf DE BROGLIE een interpretatie aan de hand voor de quantumvoorwaarden, waarmede BOHR de stationaire bewegingswijzen had bepaald: de golven die zich langs de gesloten baan van het electron zouden uitstrekken, moesten zichzelf door interferentie versterken en niet vernietigen. Het elektron moest als een golfslang langs zijn baan zichzelf zoo in den staart bijten, dat het netjes een geheel aantal golflengten vertoonde. Inplaats van tot een enkel punt gaat aldus bij het elektron onze voorstelling uit naar een golfbeweging die het geheele atoom omvat!

HOOFDSTUK II.

De toevoeging van een golfvergelijking aan een dynamisch probleem.

In het vorige hoofdstuk hebben wij gezien, hoe men aan een differentiaalvergelijking voor de voortplanting van golven kan toevoegen een dynamisch probleem, dat uitgedrukt wordt in een stel kanonische bewegingsvergelijkingen met de centrale functie F^*. Wij willen nu omgekeerd zoeken, welke golfvergelijking men aan een dynamisch probleem kan toevoegen, wanneer de kanonische bewegingsvergelijkingen bekend zijn.

De klassieke bewegingsvergelijkingen voor een elektron. Laat ons allereerst herinneren aan de bewegingsvergelijkingen van een elektron. Voor zijn kinetische hoeveelheid van beweging, bij een scalaire massa m, moeten wij met een veranderlijken inertiefactor, c de snelheid van het licht zijnde, stellen

$$\frac{mv_x}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}.$$

Wanneer wij den minkowskiaanschen „eigen" tijd τ als parameter invoeren, zoo dat

$$d\tau = dt\sqrt{1-v^2/c^2},$$

kunnen wij voor de kinetische hoeveelheid van beweging stellen $m\,dx/d\tau$, $m\,dy/d\tau$, $m\,dz/d\tau$.

De klassieke elektronentheorie leert nu de bewegingsvergelijking

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{d\tau}\right) = ed_x + \frac{e}{c}\left(v_y h_z - v_z h_y\right), \text{ enz.}$$

Hierin stellen d_x, h_z en h_y componenten voor van de elektrische en magnetische veldsterkte.

Dit kan, met invoering van den scalairen potentiaal φ en den vectorpotentiaal a_x, a_y, a_z, wegens

$$d_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial a_x}{\partial t}, \qquad h_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \text{ enz.}$$

geschreven worden als

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{d\tau}\right) = -\frac{\partial e\varphi}{\partial x} - \frac{e\partial a_x}{c\partial t} + \frac{e}{c}v_x\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial x}\right) +$$

$$+\frac{e}{c}\left(v_y\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) + \frac{e}{c}v_z\left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{dz}\right).$$

Uit het rechter lid kunnen wij naar het linker lid brengen. $(\partial./\partial t + v_x\,\partial./\partial x + v_y\,\partial./\partial y + v_z\partial./\partial z)\,ea_x/c$ als $d(ea_x/c)/dt$. Er blijft dan rechts een differentiaalquotiënt naar x staan:

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{d\tau} + \frac{e}{c}a_x\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(e\varphi + \frac{ea_x}{c}\frac{dx}{dt} + \frac{ea_y}{c}\frac{dy}{dt} + \frac{ea_z}{c}\frac{dz}{dt}\right).$$

Wij leeren uit deze vergelijking, dat ea_x/c op dezelfde plaats staat als $m\,dx/d\tau$. Met opzet hebben wij te voren gesproken van de kinetische hoeveelheid van beweging, omdat wij nu aanleiding hebben te spreken van een hoeveelheid van beweging, of zoo men wil impuls, die niet ontspringt aan de beweging van het elektron, maar aan het veld. Daar dit (magnetische) veld van den vectorpotentiaal opgewekt wordt door stroomen, kan men verdergaande ook zeggen dat die impuls in het elektron geïnduceerd wordt door de beweging van andere elektronen.

Wij zijn in een dergelijk geval, wanneer energie te danken is aan een veld, anders gezegd aan de tegenwoordigheid van andere lichamen, gewend te spreken van potentieele energie, U. Wij willen dus nu ook spreken van potentieele hoeveelheid van beweging, welker componenten wij A_x, A_y, A_z noemen willen. Voor een elektron is $U = e\varphi$, $A_x = ea_x/c$, enz.

De centrale functie der kanonische vergelijkingen. Wij willen nu algemeen rekening houden met de mogelijkheid van potentieele energie en potentieele hoeveelheid van beweging naast de kinetische. Voor de, in den zin der relativiteitstheorie covariante, componenten van den energie-impulsvector schrijven wij,

voor de energie:

$$p_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + U\,,$$

voor den impuls:

$$p_1 = -\frac{mv_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - A_x\,,\ \text{enz.}$$

Het is bekend, en aanstonds te verifieeren, dat er een identieke betrekking tusschen deze componenten moet bestaan, namelijk:

$$\frac{1}{c^2}(p_0 - U)^2 - (p_1 + A_x)^2 - (p_2 + A_y)^2 -$$

$$- (p_3 + A_z)^2 - m^2c^2 = 0 = 2\,mf.$$

Men kan het ook anders opvatten en zeggen dat eerst deze betrekking de scalaire massa m definieert. Maar dit heeft voor andere beschouwingen beteekenis dan waarmee wij ons thans willen bezighouden.

Wij hebben den vorm in het linkerlid $2mf$ genoemd, omdat wij in f de centrale functie hebben, waaruit de kanonische bewegingsvergelijkingen voortkomen. Inderdaad mogen wij beweren dat deze gegeven worden door

$$\frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial p_i}.$$

Het tweede stel dezer vergelijkingen loopt uit op

$$\frac{dx}{d\tau} = -\frac{1}{m}(p_1 + A_x), \text{ enz.,}$$

zoodat, indien wij bij de centrale functie beginnen, wij de vergelijkingen terugkrijgen, waarmede wij voor p_i in zee wilden steken.

Het eerste stel kanonische vergelijkingen levert bij uitwerking

$$\frac{d}{d\tau}\left(-m\frac{dx}{d\tau} - A_x\right) = \frac{dt}{d\tau}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{dx}{d\tau}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{dy}{d\tau}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{dz}{d\tau}\frac{\partial A_z}{\partial x},$$

en men verifieert aanstonds, dat dit in het geval van het elektron overeenkomt met hetgeen wij hiervoor aan de klassieke elektronentheorie ontleend hadden.

De golfvergelijking. Uit de centrale functie f die wij hier hebben kunnen wij de functie F vormen van de golfvergelijking. Daar $\alpha_j = 2\pi p_j/h$, vinden wij, met het oog op de kanonische vergelijkingen van pag. 57, eerst F^* door f te vermenigvuldigen met $2\pi/h$, en daarin overal in de plaats van p_j te schrijven

$$p_j = \frac{h}{2\pi}\alpha_j.$$

De functie F^* die wij daardoor krijgen, moet nu eerst geschreven worden als een functie F van de $i\alpha_j$, en daarna kunnen wij, om den differentiaaloperator der golfvergelijking te krijgen, elke $i\alpha_j$ vervangen door het symbool D_j. Ten slotte moet dus elke p_j in $2\pi f/h$ vervangen worden door

$$p_j \rightarrow \frac{h}{2\pi i} D_j \, .$$

Een constante factor voor den differentiaaloperator, die nul moet opleveren, heeft niets te beteekenen. Deze substitutie kunnen wij dus, evengoed als in $2\pi f/h$, uitvoeren in $2mf$, nadat wij deze voluit geschreven hebben en de coëfficiënten, die niet door de differentiaties D_j aangegrepen moeten worden, vóór de p_j hebben gebracht.

Aldus ontstaat de differentiaalvergelijking

$$\left[-\frac{h^2}{4\pi c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{h^2}{4\pi^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + i\frac{Uh}{\pi c^2}\frac{\partial}{\partial t} - \right.$$

$$- i\frac{h}{\pi}\left(A_x\frac{\partial}{\partial x} + A_y\frac{\partial}{\partial y} + A_z\frac{\partial}{\partial z}\right) +$$

$$\left. + \frac{U^2}{c^2} + A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2 - m^2 c^2 \right] \psi = 0 \, .$$

Dit is de differentiaalvergelijking, die rekening houdt met de details van de mechanica der relativiteitstheorie.

De eerste om zulk een differentiaalvergelijking op te stellen was ERWIN SCHRÖDINGER. Hij heeft echter niet gebruik gemaakt van deze zelfde vergelijking. De details der relativiteitstheorie heeft hij aanvankelijk geheel terzijde gelaten. De golfvergelijking van SCHRÖDINGER heeft daardoor het karakter van een benadering. Wij zullen zijne vergelijking ontmoeten bij de toepassing op enkele problemen die wij van de golfvergelijking zullen maken.

HOOFDSTUK III.

Toepassing op een harmonischen oscillator.

Klassieke mechanica en atoommechanica. Wij hebben in het eerste hoofdstuk uitdrukkelijk de onderstelling gemaakt dat de golflengten en de perioden klein zouden zijn vergeleken bij de gebieden en tijdsverloopen, waarin de amplitude der golfbeweging merkbaar veranderde, ook klein vergeleken bij de kromtestralen van de isophase fronten.

Zulk een onderstelling maakt, in de optica, dat wij van buigingsverschijnselen af mogen zien. Wanneer de schermen en openingen groot zijn vergeleken bij de golflengte, verkeeren wij in het geval dat de lichtbeweging als een stralenloop volgens de klassieke of geometrische optica kan worden behandeld. Hoe anders wordt dit niet wanneer de spleten waardoor het licht komt nauw zijn, of de lichtgolven om kleine obstakels heen spoelen! Dan verliest de meetkundige optica, met haar stralen, haar toepasselijkheid, en wij moeten letten op de golfbeweging.

Sinds in 1913 de theorieën van BOHR haar intrede deden weet men dat in de wereld der atomen de klassieke mechanica slechts tot op zekere hoogte opgaat. Als echt onbewijsbare, zelfs onbegrijpelijke axiomaas gaan BOHR's postulaten aan de atoomtheorie vooraf.

SCHRÖDINGER heeft uiteengezet, dat men deze inbreuk op de klassieke mechanica heeft te zien in het licht der buigingsverschijnselen. Wij hebben immers reeds kunnen opmerken, dat de golflengte die DE BROGLIE aan een elektron associeerde, in het geval van het waterstofatoomelektron vergelijkbaar is met de dimensie van het geheele atoom! Welnu, wanneer de afmetingen der trillingsgebieden zoo klein zijn, mag men niet meer verwachten, dat de bewegingen van deeltjes zouden verloopen overeenkomstig de vergelijkingen der klassieke mechanica. Zulke klassieke bewegingen immers, dat ligt in het werk van HAMILTON, zijn geheel te vergelijken met den stralengang in de geometrische optica.

Neen, in deze gevallen, waar de banen zoo sterk gekromd zijn, zal men van de toepassing der kanonische bewegingsvergelijkingen afstand moeten doen, en ook hier moeten teruggaan op de golfvergelijking. SCHRÖDINGER wil dat wij ons vertrouwen blijven stellen in de differentiaalvergelijking der golfbeweging, ook indien de omstandigheden ons niet veroorloven een toepassing te maken van hetgeen wij omtrent de beweging van golfgroepen uit de differentiaalvergelijking hebben afgeleid.

De harmonische lineaire oscillator. Indien een massa m elastisch aan een evenwichtstand gebonden is, en de frequentie van den oscillator ν_0 per secunde is, dan kunnen wij daaruit de potentieele energie vinden bij eene uitwijking x. Deze zal moeten bedragen

$$U = 2\,\pi^2\,\nu_0{}^2\,m\,x^2,$$

Wij zullen stellen dat er geen potentieele hoeveelheid van beweging is, zoodat $A_x = 0$. De y- en de z-dimensie laten wij weg.

Door het substitueeren van deze waarden is de differentiaalvergelijking van het vorige hoofdstuk reeds bepaald.

Geen van de coëfficiënten hangt van den tijd af. In het dynamische probleem zou dus de energie constant zijn. Wij schrijven daarvoor

$$p_0 = mc^2 + E,$$

waarbij E klaarblijkelijk de energie in den zin der gewone mechanica voorstelt, afgezien van de inwendige energie bij stilstand van de massa, mc^2.

Aan deze energie p_0 beantwoordt een frequentie, een zeer hooge frequentie, die men niet verwarren mag met de oscillatiefrequentie ν_0. De frequentie van DE BROGLIaansche trillingen is immers p_0/h! Laat ons nu oplossingen zoeken der golfvergelijking, die ons staande trillingen levert met deze frequentie. Laat ons dus beproeven in de differentiaalvergelijking te stellen

$$\psi = e^{2\pi i \frac{m c^2 + E}{h} t}\,\varphi\,,$$

en dan voor φ een functie te vinden, die alleen van x afhangt.

Zet men deze waarde van ψ in de vergelijking, dan krijgen wij

$$\left[\frac{(mc^2+E)^2}{c^2} + \frac{h^2}{4\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{2\,U\,(mc^2+E)}{c^2} + \frac{U^2}{c^2} - m^2\,c^2\right]\psi = 0.$$

De factor die den tijd bevat, kan nu verder worden weggelaten, en dus kan φ voor ψ geschreven worden. Voorts kunnen wij, afziende van de finesses der relativiteitsmechanica, met een eerste benadering genoegen nemen, waarbij gebruik gemaakt wordt van de uiterstkleinheid van E en van U vergeleken bij mc^2. Zulk een verwaarloozing leidt tot

$$\left[2m\,(E-U) + \frac{h^2}{4\,\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\varphi = 0\,.$$

en dat is de vergelijking van Schrödinger, voor welke wij nu oplossingen moeten vinden. Zij is een amplitude-vergelijking, eigenlijk niet meer een golfvergelijking.

Wij kunnen nog ter vereenvoudiging der schrijfwijze de letters invoeren

$$a = \frac{8\,\pi^2\,m}{h^2}\,E\,, \qquad b = \frac{16\,\pi^4\,m^2\,\nu_0{}^2}{h^2}\,.$$

waardoor de differentiaalvergelijking wordt

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + (a - b\,x^2)\,\varphi = 0\,,$$

Wij zoeken overal eindige oplossingen.

Algemeen verloop der oplossing. Wij kunnen ons voorstellen dat wij de oplossingen dezer vergelijking graphisch opzoeken. Uit een gegeven punt in een φ-x-vlak trekken wij in bepaalde richting het begin van de kromme die de oplossing zal voorstellen. (Fig. 1). Zoolang $(a - bx^2)$ positief is, heeft de tweede afgeleide het tegengestelde teeken van φ. De kromme kromt zich naar de X-as toe, en snijdt zij de as, dan heeft zij daar een buigpunt, en keert weer naar de X-as terug.

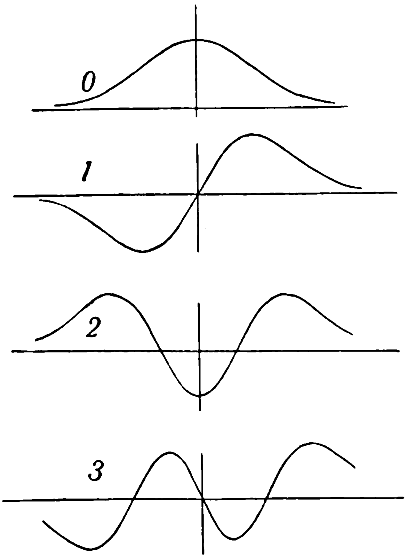
Wordt echter $(a - bx^2)$ negatief, hetgeen voor groote waarden van x het geval wordt, dan keert de kromme zich van de X-as af. Snijdt zij die, dan zal ze daarna steeds verder zich van die as verwijderen. Dan komt er geen eindige oplossing tot stand.

Wij moeten dus om te beginnen een dergelijke beginrichting kiezen, dat de kromme, naar den kant der positieve x geteekend, vanaf de abscis $x = \sqrt{(a/b)}$, de X-as asymptotisch nadert.

Daarmee zijn wij echter niet gereed. Ook naar den kant der negatieve x voortgezet, mag de functie niet divergeeren, maar nu hebben wij geene keus meer.

In het algemeen zal er dus geen overal eindige oplossing te vinden zijn. Lukt dit wel, dan verkeeren wij in een bijzonder geval. Dan heeft de parameter a een bijzondere waarde, die het bestaan der functie mogelijk maakt. Alleen voor zeer speciale waarden van a kan men φ aan beide kanten asymptotisch tot de X-as laten naderen. Dit zijn de z.g. eigenwaarden van den parameter der differentiaalvergelijking.

FIG. 1.



Er is een reeks van zulke waarden, die een overal eindige functie φ mogelijk maken. De φ-kromme kan daarbij de X-as of niet, of eens, of twee, drie keer snijden, en zoo voort. Wij zullen dan spreken van de nulde, eerste, tweede, derde, enz. oplossing der differentiaal-vergelijking.

De discrete trillingswijzen en golfgroepen. Wanneer wij, geleid door den vermoedelijken vorm der nulde oplossing, beproeven daarvoor te stellen

$$\varphi = e^{-\frac{1}{2}\alpha x^2},$$

dan blijkt dit te gelukken.

Substitueert men, dan vindt men, daar $\varphi'' = \varphi \,.\, (\alpha^2 x^2 - \alpha)$,

$$\varphi \,.\, \{ \alpha^2 x^2 - \alpha + a - b x^2 \} = 0.$$

en dus

$$a = \alpha = \sqrt{b},$$

en hieruit

$$E_0 = \frac{1}{2} h\nu_0 \,.$$

Bij de wiskundigen zijn trouwens de oplossingen onzer differentiaalvergelijkingen reeds lang bekend. Het zijn functies van **HERMITE**.

De n^{de} oplossing is

$$\varphi = e^{\frac{1}{2}\alpha x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\alpha x^2} \,.$$

Substitueert men dit, dan vindt men, (voor alle waarden van x),

$$\varphi \, . \left\{ \alpha^2 x^2 - (2n+1)\,\alpha \;\; + a - b\,x^2 \right\} = 0$$

en dus

$$a = (2n+1)\,\alpha \;\;,\;\; \alpha = \sqrt{b}\,,$$

en hieruit

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\,\nu_0 \,.$$

Het verrassende en mooie is, dat men hier een reeks waarden E_n vindt, die met de eigenwaarden van a spontaan uit den aard van het trillingsprobleem te voorschijn komen. In de vroegere voorstelling heeft men gezegd, dat deze waarden voorstelden de discrete waarden die de energie van den oscillator kon aannemen. Waarom juist deze waarden en geen tusschenliggende konden voorkomen, bleef geheel in het duister. Hier is de oorsprong van de discrete reeks opgehelderd: het is de reeks der verschillende eigen trillingswijzen waarin het systeem kan golven. Het zoogenaamde quantumgetal, n, blijkt hier eenvoudig het rangnummer van de oplossing aan te geven, het aantal nulpunten dat zij heeft.

Echter blijft in het duister, wat de waarden E_n met energie te maken hebben. Wij vinden ze als waarden van een parameter uit de amplitudenvergelijking, die daarin gekomen is met de frequentie der gezochte bewegingswijze. Primair heeft E_n nu beteekenis voor de frequenties.

De frequenties der oplossingen van de golfvergelijkingen zijn

$$\frac{mc^2 + E}{h} = \frac{m\,c^2}{h} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \nu_0 \,.$$

Wij zeiden reeds dat de oscillator frequentie ν_0 zeer klein is, vergeleken bij deze der discrete trillingswijzen. Inderdaad, wij maakten immers onze benadering door E zeer klein te stellen vergeleken bij mc^2! Opmerkenswaard is, dat alle trillingswijzen onderling gelijke frequentieverschillen, ν_0, vertoonen, zoodat de zwevingsfrequentie van twee naburige overeenkomt met de oscillatorfrequentie.

Indien een baszanger een a zingt, is de grondtoon haast niet aanwezig, zeer sterk echter de vierde, vijfde en zesde boventonen die een frequentie in de buurt van 920 per sec. hebben. De combinatietoon van deze is hetgeen de toonshoogte van zijn geluid bepaalt.

Op soortgelijke wijze kan de oscillator, door combinatie van naburige trillingswijzen, een „toon" geven van de frequentie ν_0. Het is SCHRÖDINGER gelukt, te doen zien hoe men een golfgroep kan construeeren, welker amplitude maximum heen en weer loopt zooals een trillend deeltje zou doen. Dit geschiedt door geraffineerde superpositie van oneindig veel trillingswijzen, met geschikte amplituden die sterk worden vooral in de onmiddellijke omgeving van de n^e bewegingswijze. Het maximum van de intensiteit in die golfgroep loopt dan heen en weer met dezelfde maximumuitwijkingen als een harmonisch vibreerend deeltje zou doen dat met de energie $nh\nu_0$ zijn beweging zou uitvoeren.

Opmerkelijk zijn voorts de halven, waarmede de quantumgetallen vermeerderd zijn in wat men de „energie" der trillingswijzen zou willen blijven noemen. Voor $n = 0$ houdt men de zoogenaamde nulpuntsenergie over.

HOOFDSTUK IV.

Toepassing op het waterstofatoommodel.

De differentiaalvergelijking. Wij willen trachten ook het dynamische probleem van het waterstofatoom, de beweging van een elektron rondom een aantrekkende kern, te zien als een trillings-probleem, en zoeken, welke staande trillingen mogelijk zijn, d. w. z. voldoen aan de golfvergelijking van hoofdstuk I. De potentieele energie in dit dynamische probleem is de elektrostatische energie der ladingen $+e$ en $-e$ op een afstand r, zij bedraagt

$$U = -e^2/r\,,$$

waarin e de lading van het elektron voorstelt. Een magnetisch veld zij afwezig, zoodat ook hier de potentieele impuls nul is: $A_x = A_y = A_z = 0$.

Geen der coëfficiënten van de vergelijking bevat den tijd, p_0 is dus constant. Dat is hier als bij den oscillator aanleiding om te zoeken naar een trillingswijze met constante frequentie. Laat ons, evenals daar, stellen

$$\psi = e^{\frac{2\pi i}{h}(mc^2 + E)t} \,.\, \Phi\,,$$

en onderzoeken of het mogelijk is, zij het slechts voor bijzondere waarden van E, functies $\Phi\,(x\,y\,z)$ te vinden, die ψ tot een oplossing der golfvergelijking maken.

Bij het substitueeren maken wij dezelfde verwaarloozing als den vorigen keer. Wij stellen zoowel E als U zeer klein vergeleken bij mc^2, en laten daarmede de fijne details der relativiteits-mechanica varen. Wij krijgen dan eerst SCHRÖDINGER's amplitudenvergelijking

$$\left[2\,m\,(E - U) + \frac{h^2}{4\,\pi^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]\Phi = 0.$$

die met de gegeven waarde voor de potentieele energie wordt

$$\Delta\Phi + \frac{8\,\pi^2 m}{h^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\Phi = 0\,.$$

Invoering van poolcoördinaten. Men herinnert zich, dat aan de vergelijking

$$\varDelta V = 0$$

voldaan wordt door

$$V = \frac{1}{r},$$

en door alle functies, die men krijgen kan door deze functie V een willekeurig aantal malen te differentieeren naar x, naar y of naar z. Stel dat men l keer naar x, m keer naar y en n maal naar z differentieert. Indien $l + m + n = k$, dan zal men tenslotte een homogene functie van x, y en z gekregen hebben van den graad $-(k+1)$. Gaat men tot poolcoördinaten over,

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi, \\ z &= r \cos\theta, \end{aligned}$$

dan kan men die *k-de* afgeleide functie schrijven als

$$V_k = \frac{1}{r^{k+1}} Y_k(\theta, \varphi).$$

waarin $Y_x(\theta, \varphi)$ een functie voorstelt van louter cosinussen en sinussen van de hoeken θ en φ, een bolfunctie.

In poolcoördinaten neemt de differentiaaloperator van LAPLACE den vorm aan:

$$\varDelta\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta},$$

en dit toepassende op V_k krijgen wij

$$0 = \frac{k(k+1)}{r^{k+3}} Y_k(\theta, \varphi) + \frac{1}{r^{k+1}} \varDelta Y_k(\theta, \varphi),$$

waaruit wij concludeeren

$$\varDelta Y_k(\theta, \varphi) = -\frac{k(k+1)}{r^2} Y_k(\theta, \varphi).$$

Dit zullen wij aanstonds gebruiken, want wij willen zoeken of niet aan de amplitudenvergelijking kan worden voldaan door een produkt van een functie van alleen r met de bolfunctie Y_k:

$$\Phi = Y_k(\theta, \varphi) \,.\, F(r),$$

Na het gezegde vinden wij bij substitutie, wanneer wij eerst weder ter afkorting stellen

$$a = \frac{8\pi^2 m}{h^2} E, \text{ en } \qquad b = \frac{8\pi^2 m e^2}{h^2},$$

en vervolgens deelen door $Y_k(\theta, \varphi)$, dat voldaan moet worden aan

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right) + \left(a + \frac{b}{r} - \frac{k(k+1)}{r^2}\right)F = 0,$$

of

$$\frac{d^2}{dr^2}(rF) + \left(a + \frac{b}{r} - \frac{k(k+1)}{r^2}\right)(rF) = 0.$$

Wij zullen zoeken naar een functie F, die bij $r = 0$ eindig blijft, zoodat daar rF nul wordt, terwijl wij voor $r \rightarrow \infty$ eveneens rF nul wenschen.

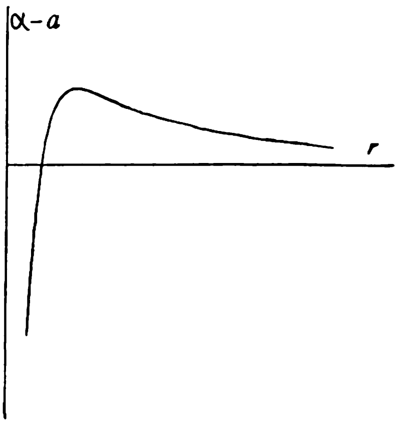
Het algemeen verloop der oplossing. Wanneer wij nu graphisch de oplossing $f = rF$ van de vergelijking willen zoeken en teekenen, komt het in de eerste plaats aan op de waarden van

$$\left(a + \frac{b}{r} - \frac{k(k+1)}{r^2}\right) = \alpha.$$

Van het verloop van α kunnen wij ons gemakkelijk rekenschap geven.

Immers, $\alpha - a$ zal bij $r = 0$ van $-\infty$ komen, positief worden bij $r = k(k+1)/b$, door een maximum gaan bij $r = 2k(k+1)/b$, en ten slotte hyperbolisch asymptotisch nul worden wanneer $r \rightarrow \infty$ aangroeit (Fig. 2).

FIG. 2.

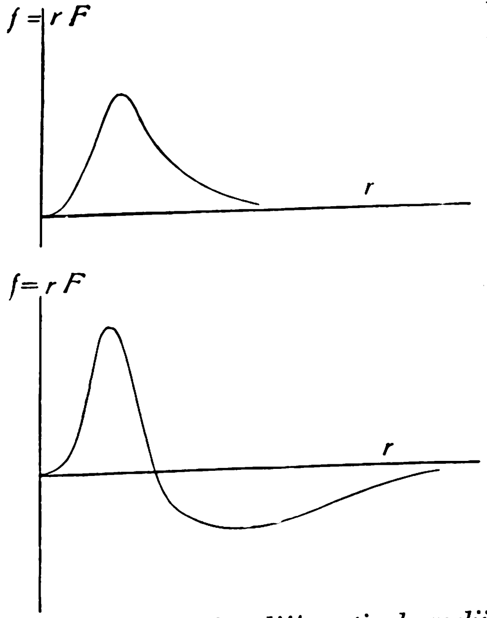


Welnu, indien α positief is, zal de tweede afgeleide van y het tegengestelde teeken hebben van f. De f-kromme zal op en neer om de r-as blijven dobberen.

Dit geval doet zich bij $r \rightarrow \infty$ voor, wanneer a positief is, immers $\alpha - a$ wordt daar precies nul, en dus α positief. Het is dus uitgesloten een oplossing te vinden van de gezochte soort, wanneer a positief is. Ook wanneer a nul is, zullen er kleine dobberingen overblijven.

Wanneer a negatief is, dan zijn er twee nulpunten voor α, en wordt voor $r \to \infty$ ook α negatief. Bij negatieve α mag de f-kromme stellig niet de r-as snijden. Want de tweede afgeleide heeft dan hetzelfde teeken als de f zelf, de kromme keert zich van de r-as af, en wij zouden steeds verder van huis raken. Wel hebben wij nu de mogelijkheid om in het oneindige de kromme asymptotisch tot nul te laten naderen. Wij hebben dan echter af te wachten, of zij bij $r = 0$ wel door den oorsprong gaat. Daar keert zij zich namelijk ook van den oorsprong af, en de oplossing zou dus divergeeren, indien ze niet nul werd in den oorsprong (Fig. 3).

FIG. 3.



De parameter a zal ook hier speciale waarden moeten hebben, opdat een oplossing mogelijk zij. In ons probleem gaat het wederom om de eigenwaarden van den parameter eener differentiaal vergelijking.

Er zal een reeks van eigenwaarden gevonden worden. Elk daarvan maakt een oplossing mogelijk. Wij verwachten, dat deze oplossingen hierdoor zullen worden gekenmerkt, dat de f-kromme de r-as niet snijdt, of éénmaal, tweemaal, ... $(n - 1)$ maal.

Reconstructie der differentiaalvergelijking. Het gezegde omtrent het algemeene beloop der oplossing doet ons denken aan een functie van den vorm $r^p e^{-r}$, en afgeleiden van deze. Zulke functies namelijk hebben zulk een beloop. Het kan echter heel wel gebeuren, dat wij zulk een functie nog zouden moeten vermenigvuldigen met een functie van r, die aan het gedrag bij $r = 0$ en bij $r \to \infty$, noch aan het aantal nulpunten iets zou veranderen. Wij zullen nagaan aan welke differentiaalvergelijking van de tweede orde deze functies voldoen, en of wij daaruit tot een functie kunnen komen die aan een differentiaalvergelijking gehoorzaamt die in vorm met de onze overeenkomt.

Nu voldoet

$$y = r^{p} e^{-r}$$

aan de differentiaalvergelijking

$$r y' - p y + r y = 0 \, .$$

Differentieer dit $(q + 1)$ maal naar r, en men zal krijgen

$$r \, D^{q+2} y - (p - q - 1 - r) \, D^{q+1} y + (q + 1) \, D^{q} y = 0 \, ,$$

waarin D het symbool voor differentiatie naar r is.

Hieruit blijkt, dat een functie

$$z = D^{q} r^{p} e^{-r}$$

voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$r z'' - (p - q - 1 - r) z' + (q + 1) z = 0 \, .$$

Deze vergelijking is van de tweede orde. Zij bevat echter nog de eerste afgeleide. Er moet dus aan de functie z nog iets veranderd worden, om in de passende vergelijking de eerste afgeleide op te ruimen. Wij willen dit in twee stappen doen. Eerst maken wij de coëfficiënten van tweede en eerste afgeleiden gelijk, door te stellen

$$z = r^{\frac{p - q - 1}{2}} \chi \, .$$

Dat geeft

$$r^{2} \chi'' + r^{2} \chi' + \left(\frac{p + q + 1}{2} r - \frac{(p - q)^{2} - 1}{4} \right) \chi = 0 \, .$$

Vervolgens zetten wij

$$\chi = e^{-r/2} P \, ;$$

dat geeft

$$\chi' = - \chi'' - \frac{1}{4} \chi + e^{-r/2} P'' \, ,$$

en men krijgt

$$P'' + \left(- \frac{1}{4} + \frac{p + q + 1}{2 r} - \frac{(p - q)^{2} - 1}{4 r^{2}} \right) P = 0 \, .$$

De oplossingen en de eigenwaarden. De vergelijking, die wij op te lossen hadden, luidde

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\,F)+\left(a+\frac{b}{r}-\frac{k\,(k+1)}{r^2}\right)(r\,F)=0\,.$$

Dit lijkt verbazend veel op de vorige vergelijking, maar het verschil tusschen de termen a hier, en $-{}^1/_4$ ginds, maakt dat wij in beide vergelijkingen niet dezelfde beteekenis aan de variabele r kunnen hechten. Zij zullen door een constanten factor $\varkappa$ onderscheiden moeten zijn. Indien wij in de vergelijking voor rF stellen

$$r=\varkappa\,\varrho\,,$$

$$\text{met }\ \varkappa^2\,a=-\frac{1}{4}\,,\ \text{ of }\ \varkappa=\sqrt{-\frac{1}{4a}}$$

dan komt er

$$\frac{d^2}{d\,\varrho^2}(\varrho F)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{b}{\varrho\sqrt{-4\,a}}-\frac{k\,(k+1)}{\varrho^2}\right)(\varrho\,F)=0\,,$$

Deze vergelijking sluit onmiddellijk aan met de te voren gereconstrueerde. De variabele ϱ hier komt dus overeen met de variabele r ginds, en wij kunnen voor ϱF dezelfde functie van ϱ schrijven als de functie van r die wij nu kennen als oplossing van de gereconstrueerde vergelijking, mits wij de p en q ginds uitdrukken in de a en b hier.

Stel dus

$$\frac{b}{\sqrt{-4\,a}}=\frac{p+q+1}{2}\,,$$

$$\text{en }\ (p-q+1)\,(p-q-1)=2k\,(2k+2).$$

Uit de laatste vergelijking blijkt, dat $p-q+1$ en $p-q-1$, die niet beiden oneven kunnen zijn, beide even zijn. Daarmede is ook $p+q+1$ even. Dus

$$\frac{b}{\sqrt{-4\,a}}=n$$

moet *een geheel getal* zijn, n, en voorts

$$p=n+k\,,\qquad\qquad q=n-k-1\,.$$

Wij schrijven nu de oplossing ϱF neer door omkeering van de successieve substituties der vorige paragraaf, namelijk:

$$\varrho\,F=P\,(\varrho)=\varrho^{\frac{-p+q+1}{2}}\,e^{\frac{\varrho}{2}}\,D^q\,\varrho^p\,e^{-\varrho}$$

De oplossing onzer amplitudenvergelijking wordt daardoor

$$\Phi = Y_k(\theta, \varphi) \,.\, \varrho^{-(k+1)} e^{\frac{\varrho}{2}} D^{n-k-1} \left(\varrho^{n+k} e^{-\varrho} \right),$$

en daarin is

$$\varrho = r \frac{8 \pi^2 m e^2}{h^2 n}.$$

Deze oplossing en de behandelingsmethode, die ook bij den oscillator toegepast is, zijn gegeven door Professor KRAMERS.

De exponent van D kan niet negatief worden. Bij de afleiding zijn slechts differenties en geen integraties beschouwd. Daaruit besluiten wij, dat k steeds minstens één kleiner is dan n. De waarden die k mag aannemen zijn dus:

$$k\,(=)\,0, 1, 2, \ldots (n-1).$$

Om dezelfde reden kan ook n niet kleiner zijn dan 1. Overigens kan de waarde van n alle geheele getallen doorloopen.

Indien $k = 0$ is, dan is $Y_k = 1$, en dan wordt de amplitude nul in $(n-1)$ bolschillen, en in het oneindige.

Indien $k = 1$, dan wordt Y_k nul in een plat vlak door den oorsprong, en F wordt nul in $(n-2)$ bolschillen, en in het oneindige.

Bij nog andere waarden van k wordt de amplitude nul in den door $Y_k(\theta, \varphi) = 0$ bepaalden kegel van den k-den graad, in $(n-k-1)$ bolschillen en in het oneindige.

De genoemde oplossingen voor het amplitudenveld bestaan alleen dan, wanneer voor de frequenties der trillingswijzen bepaalde waarden gekozen zijn. Deze worden bepaald door de reeks „eigenwaarden" van den veranderlijken parameter a der differentiaalvergelijking, die immers afkomstig is van de genoemde frequentie. Deze reeks is gegeven in de betrekking, die n bepaalt, of

$$4\,a = -\frac{b^2}{n^2},$$

en indien wij nazien wat a en b beteekenen, dan blijkt

$$E_n = \frac{-2 \pi^2 m e^4}{n^2 h^2}.$$

De frequenties der trillingswijzen zijn dus

$$\nu_n = \frac{mc^2}{h} - \frac{2 \pi^2 m e^4}{n^2 h^3}.$$

Ook hier vinden wij ongedwongen de reeks van waarden terug voor den parameter E, die in de vroegere atoomtheorie gezien werd als energie in de stationaire bewegingswijzen van het elektron om het atoom. De aard van het probleem zelf leidt tot de discrete reeks. Evenals de boventonen van een klok een discrete reeks vormen, zoo hebben wij hier de afzonderlijke mogelijke trillingswijzen. De amplitude van zulk een trillingswijze blijft op een constanten factor na onbepaald. Dat verandert niets aan de waarde van E, zoodat de analogie van de boventonen eener klok en deze trillingswijzen zich niet uitstrekt tot de energie dier boventonen en den parameter E in de frequentie dezer trillingswijzen.

Als een triomfkreet klinkt het in den aanhef van **Schrödinger**'s verhandeling, dat er in den grondslag zijner theorie geen woord over „geheele getallen" voorkomt. Inderdaad beteekent dit een zeer aantrekkelijke ongedwongenheid.

HOOFDSTUK V.

De correspondentieregel en de matrixrekening.

De correspondentie in de frequenties. Ik behoef er slechts aan te herinneren dat men weet, van welke postulaten NIELS BOHR in de atoomtheorie in 1913 is uitgegaan. Het eerste was, dat de atomen in verschillende stationaire bewegingswijzen konden verkeeren, met verschillende energiewaarden. Deze bewegingswijzen werden gekenmerkt door één, of door meer, quantumgetallen: n, k, enz. Deze quantumgetallen zouden niet alleen de bewegingen bepalen, maar ook de energieën der bewegingswijzen zouden uit te drukken zijn in die getallen.

Een uitgestraald lichtquantum moest voorts in verband gedacht worden met twee bewegingswijzen, een aan het begin van het uitstralingsproces, en een aan het eind, en de frequentie van het uitgestraalde licht zal dan bepaald zijn door

$$h\nu = E\,(n', k') - E\,(n'', k'').$$

De quantumgetallen werden in verband gebracht met de periodiciteits-eigenschappen van het atoom. Indien in de bewegingswijze frequenties ω_n en ω_k, enz. te onderkennen waren, dan kan men verschillende grootheden, bijvoorbeeld het resulteerend elektrisch moment, uitdrukken als een meervoudige, reeks van FOURIER, in $\omega_1 t$ en $\omega_2 t$, enz. Abstract technisch kan men de voorschriften tot het vinden der bewegingswijzen als volgt formuleeren: zoek de dynamische variabelen I_1, I_2, enz. die in den zin der bewegingsvergelijkingen van HAMILTON kanonisch toegevoegd zijn aan de variabelen $w_1 = \omega_1 t$, $w_2 = \omega_2 t$, enz. en stel die gelijk aan een geheel aantal malen de werkingsconstante h.

Wij behoeven ons met die technische kwesties thans niet bezig te houden. Slechts willen wij aanteekenen, dat die kanonische toevoeging meebrengt

$$\frac{dw_i}{dt} = \frac{\partial E}{\partial I_i},$$

of, als

$$\begin{aligned} I_1 &= nh\ , \quad \omega_1 = \omega_n\ , \\ I_2 &= kh\ , \quad \omega_2 = \omega_k\ , \\ &\text{enz.} \end{aligned}$$

dat

$$\omega_n = \frac{\partial E(n\,,k\,.\,.)}{h\partial n}\,, \quad \omega_k = \frac{\partial E(n\,,k\,.\,.)}{k\partial n}\,, \text{ enz.}$$

Het groote succes der toepassingen, die de uitwerking van Bohr's theorie gevonden heeft, kan niets wegnemen van de raadselachtigheid in de grondslagen, die hierin gelegen is, dat de frequentie van het uitgezonden licht in het geheel niet overeenkomt met de frequenties die men in de bewegingswijze van het atoom aantreft. Inderdaad: de grondfrequenties der bewegingswijze, dat zien wij in de juist geschreven betrekking, zijn differentiaalquotiënten van de energie naar de quantumgetallen, terwijl in Bohr's frequentierelatie een differentie staat.

Nu is er nog wel een brug mogelijk. Indien men tusschen de bewegingswijzen (n', k') en (n'', k'') duizend andere denkt, zoodanig dat het verschil in de waarden n' en n'', k' en k'' in duizend stapjes overbrugd wordt, en indien men op de frequentie let van al die tusschenliggende bewegingswijzen, dan kan men uit de reeds gegeven relaties bewijzen dat de frequentie ν van Bohr's relatie het gemiddelde is van een reeks frequenties in de tusschengelegen bewegingswijzen.

Heeft men te maken met twee bewegingswijzen, die onder elkander relatief maar weinig verschillen, zoodat de quantumverschillen $n' - n''$ en $k' - k''$ slechts klein zijn vergeleken bij de getallen n' en k', dan mag men bij benadering stellen

$$E\,(n', k') - E\,(n'', k'')\ (=)\ \frac{\partial E}{\partial n}\,(n' - n'') + \frac{\partial E}{\partial k}\,(k' - k'')\ ,$$

zoo dat de uitgezonden frequentie, de waarde der differentiaalquotiënten in aanmerking genomen, wordt

$$\nu = (n' - n'')\,\omega_n + (k' - k'')\,\omega_k\,.$$

Ziehier nu een zekere correspondentie: de uitgezonden frequentie komt in dit geval bij benadering overeen met de frequentie van een „boventoon" van de fundamenteele frequenties ω_n en ω_k. Wij bedoelen, dat deze frequentie overeenkomt met die van een term uit de meervoudige Fourier-reeks waarin wij de componenten van het resulteerende elektrisch moment bij de door n en k bepaalde bewegingswijze kunnen ontbinden:

$$x_{nk} = \Sigma A \; (\tau, \varkappa) \, e^{2\pi i \, (\tau \omega_n \, + \, \varkappa \omega_k \,) \, t},$$

waarbij over τ en $\varkappa$ tusschen $- \infty$ en $+ \infty$ gesommeerd moet worden. De uitgezonden frequentie namelijk correspondeert met dien term, voor welken

$$\tau = (n' - n'') \quad \text{en} \quad \varkappa = (k' - k'').$$

Correspondentie der stralingsintensiteiten. Volgens de klassieke theorie is de uitgestraalde energiestroom evenredig met het kwadraat der versnelling. De intensiteit der diverse lijnen zou dus bepaald moeten worden door het kwadraat der coëfficiënten $A(\tau, \varkappa)$ maal de vierde macht der frequentie. Aanstonds heeft BOHR geloofd, dat er ook een correspondentie zou zijn tusschen deze grootheden uit de klassieke theorie en de intensiteitsverdeeling in de spectra.

In verscheidene gevallen was de toepassing duidelijk. In het geval van het ZEEMAN-effect bijv. kan men gebruik maken van de stelling van JOSEPH LARMOR, volgens welke na het aanzetten van het veld een elektronensysteem zich zoodanig zal bewegen, dat de ongestoorde beweging behept wordt met een gelijkmatige precessie om de richting van het magnetisch veld als as. Stel dat de frequentie dezer precessie is ω_k. Vat een component der ongestoorde beweging in het oog in een richting dwars op het magneetveld, en laat deze ontwikkeld zijn in een reeks van FOURIER. Bij de door het magnetische veld teweeg gebrachte praecessie van de beweging zal er van die beschouwde component der beweging een wisselend gedeelte langs de oorspronkelijke richting vallen. Wij moeten om dit gedeelte te vinden dien component met $\cos \omega_k t$ vermenigvuldigen. Het gevolg zal zijn, dat in de FOURIER-ontwikkeling der componenten van het elektrisch moment dwars op het veld uitsluitend termen zullen optreden met $(\tau \, \omega_n + \omega_k) \, t$ en $(\tau \, \omega_n - \omega_k) \, t$, terwijl de component in de richting van het veld ongestoord blijft.

De toepassing van BOHR's correspondentieregel leidt er toe om te zeggen, dat aangezien in de FOURIER-ontwikkeling der dwarscomponenten de $\varkappa$ alleen $+ 1$ en $- 1$ kan zijn, de uitstraling van licht dat dwars op het veld gepolariseerd is, ook alleen bij zulke overgangen zal plaats hebben waarbij $k' - k'' = \pm 1$.

Daar in de Fourier-ontwikkeling van de longitudinale component $\varkappa$ alleen met de waarde 0 voorkomt, zal het longitudinaal gepolariseerde licht alleen uitgestraald worden bij overgangen met $k' = k''$. Aldus werd het normale Zeeman-effect en de polarisatie daarbij uit den correspondentieregel verklaard.

Een andere toepassing, waar het geldt nul zijn of niet nul zijn van coëfficiënten uit de Fourier-reeks, kan rekenschap geven van de door de spectroscopie gevonden beperkings- of selectieregels, welke in de combinaties van de zg. „termen" der spectraalanalyse blijken te gelden.

De algemeene toepassing van den correspondentieregel is echter niet zoo eenvoudig. Hendrik Antonie Kramers heeft bij zijn berekening van de intensiteiten van het Stark-effect voor de overgangswaarschijnlijkheid een combinatie gemaakt van de coëfficiënten, in begin- en eindbewegingswijze, van den betrokken Fourier-term. Men zou geneigd zijn om voor deze „kans" amplitude $A_{n''k''}^{n'k'}\downarrow$, evenals voor de frequentie, te denken aan een gemiddelde van hetgeen de Fourier-reeks levert voor al de bewegingswijzen die „tusschen" de $n'k'$- en de $n''k''$-bewegingswijze gelegen zijn. Op welke manier dit gemiddelde moet worden genomen, is echter niet gemakkelijk aan te geven.

Hoe het zij, al kan men de correspondentie niet expliciet aangeven, er zal een uitstralingskans $A_{n''k''}^{n'k'}\downarrow$ moeten beantwoorden aan den correspondeerenden term der Fourier-reeks, en het is een variant op den correspondentieregel, wanneer men zegt, dat in de beschouwde $n'k'$-bewegingswijze wat de uitstraling betreft de atomen zich gedragen alsof zij „virtueele" oscillatoren bevatten, met de frequentie $\nu = \{E\,(n'k') - E\,(n''k'')\}/h$ en de amplitude $A_{n''k''}^{n'k'}\downarrow$.

Ter vereenvoudiging zullen wij verder niet meer dan één quantumgetal schrijven.

Emitteerende en receptieve virtueele oscillatoren. Een atoom kan niet alleen licht uitstralen, het kan ook opvallend licht verstrooien, of er een gedeelte van absorbeeren. Het zou onnatuurlijk zijn, indien de virtueele oscillatoren, d. i. de door hen gesymboliseerde eigenschap der atomen wat hun uitstraling betreft, niet tevens betrokken zouden zijn bij de dispersie en de absorptie. Aangezien een atoom, in de bewegingswijze n'' verkeerende, door absorptie kan opstijgen tot de n'-bewegingswijze, ligt het in de lijn om ook hier in beeldspraak te denken aan de aanwezigheid van receptieve virtueele oscillatoren, met dezelfde frequentie, en een amplitude $A_{n''}^{n'}\uparrow$, en men is geneigd een reciprociteit te denken, zoodat

$$A_{n''}^{n'}\downarrow = A_{n''}^{n'}\uparrow .$$

Bij de poging om tot een *dispersietheorie* te komen, vond Kramers dat men inderdaad om zoo te zeggen met „positieve" en „negatieve" virtueele oscillatoren moest werken.

Indien monochromatisch licht van de frequentie ν valt op atomen, die uit de bewegingswijze waarin zij verkeeren kunnen overgaan zoowel in eene bewegingswijze met meer energie (met absorptie van straling ν_a), als in een bewegingswijze met minder energie (onder uitstraling van ν_e), dan kunnen er drie dingen gebeuren. Het opvallende licht kan zonder verandering van frequentie verstrooid worden. Het kan worden verstrooid met de frequentie $\nu + \nu_e$, ten koste van de atoomenergie, of met de frequentie $\nu - \nu_a$, ten profijte van de atoomenergie. Dit alles kan men beredeneeren met behulp der voorstelling van de lichtquanta, zooals door Adolf Smekal was geschied, maar ook de klassieke elektronentheorie geeft een analoge uitkomst, indien men de inwerking van een monochromatischen lichtbundel op een atoom volgens het model van Bohr nagaat door de beweging te berekenen die het gevolg van die inwerking is.

Deze klassieke berekening is door Kramers uitgevoerd. In een publicatie met Heisenberg stelt hij, geleid door den correspondentieregel, een theorie op voor de verstrooiing, zoowel voor de cohaerente straling met de frequentie ν van het invallende licht als voor de incohaerente straling met de frequenties $\nu + \nu_e$ en $\nu - \nu_a$. Het zou ons te ver voeren indien wij dit wilden reproduceeren. De gidsende gedachte is deze, dat waar de klassieke theorie als uitkomst levert een differentiaal quotiënt naar de op pag. 79 en 80 genoemde variabelen I, men in de quantumtheorie te stellen heeft een differentie van twee waarden der (in de klassieke theorie gedifferentieerde) grootheid gedeeld door h, juist zooals wij hiervoren bij de frequenties hebben gezien. Daarbij treden de amplituden $A_{n''}^{n'}$ op het eerste plan. Ja, zij verdringen reeds geheel de meervoudig periodieke bewegingsvoorstelling van het electron. Zooals het in Kramers' publicatie met Heisenberg heet: de grootheden

$$A_{n''}^{n'}\, e^{2\pi i \{ E(n') - E(n'') \} t/h},$$

zijn voor de absorptie- en emissieprocessen van het atoom kenmerkend, het komt daarbij veel meer aan op deze karakteristieke amplituden dan op de coëfficiënten der FOURIER-termen in de stationnaire bewegingswijzen.

Reeds eerder, in een voorloopige mededeeling in Nature had KRAMERS het een voordeel genoemd, dat men in deze grootheden uitsluitend te maken had met iets wat voor de waarneming toegankelijk was: met frequenties en met intensiteiten, terwijl de stationnaire bewegingswijzen als zoodanig louter in de berekeningen, maar nooit in waarnemingen voor den dag kwamen. Inderdaad, wanneer men aan het complex denkt van het geheele waterstofspectrum, dan bedoelen de genoemde grootheden $A_n^{n'}$ gezamenlijk rechtstreeks dit spectrum te vertegenwoordigen en berekenbaar te symboliseeren.

Matrices. WERNER HEISENBERG is in deze lijn doorgegaan. Hij proclameert, dat de theorie zich moet onthouden van het werken met niet-waarneembare dingen, als daar zijn baan, en snelheid, en frequentie van een electron, en dat in de plaats van al die bewegingswijzen van het atoom eenvoudig als representant voor zijn gedrag, wat de X-richting betreft, moet gerekend worden met een samenstel van grootheden

$$x_m^n = A_m^n e^{2\pi i(\nu_n - \nu_m)t},$$

waarbij x_m^n en x_n^m toegevoegd complex zullen zijn, terwijl de indices n en m alle woorden van $-\infty$ tot $+\infty$ kunnen doorloopen. Men kan zich een kwadratisch net denken, en in elk hoekpunt daarvan een term van de opgeschreven soort.

In de wiskunde noemt men zulk een complex een *matrix*, en daar wij de coëfficiënten A_m^n en A_n^m toegevoegd complex stellen, zoodat ook x_m^n en x_n^m toegevoegd complex zijn, zullen wij te maken hebben met z.g. Hermitiaansche matrices.

Hoe kan men met zulke matrices rekenen? Het product van twee matrices zal weer een matrix zijn. De matrix q moge als kentallen hebben q_m^n, dan zullen wij onder $Q = q^2$, het kwadraat van de matrix q, hebben te verstaan een matrix met de kentallen Q_m^n:

$$\begin{aligned} Q_m^n &= \Sigma(i)\, q_i^n q_m^i\,, \\ &= \Sigma(i)\, A_i^n A_m^i e^{2\pi i(\nu_n - \nu_m)t}. \end{aligned}$$

Bij vermenigvuldigingen heeft men in acht te nemen, dat een product van twee factoren niet meer commutatief is. Dit is een gevolg van de definitie der matrixvermenigvuldiging. Immers:

$$(ab)_m^n = \Sigma(i)\, a_i^n\, b_m^i\,; \quad (ba)_m^n = \Sigma(i)\, b_i^n\, a_m^i\,.$$

en het hangt nu maar van de kentallen der matrices af, of deze twee producten gelijk uitvallen of niet.

Max Born en Paul Jordan hebben na Heisenberg's publicatie opgemerkt, dat de matrixrekenmethode der wiskundigen de passende toestel is om de berekeningen uit te voeren die tot het opsporen van de karakteristieke amplituden A_m^n zullen leiden. Wanneer men voor zoo'n matrix symbolisch een letter invoert, kan men in formules daarmede gemakkelijk opereeren, mits men gedurig let op het onverwisselbare der factoren in een product. Men mag dus bijvoorbeeld niet ab^2, bab en b^2a aan elkander gelijkstellen. Karakteristiek voor de quantumtheorie in haren matrixvorm is, hoe zij, voor twee in den zin der klassieke mechanica kanonisch toegevoegde variabelen, een coördinaat q en de daaraan toegevoegde hoeveelheid van beweging p, stelt, dat $pq - qp$, — als verschil van twee matrices weer een matrix — een matrix is met louter diagonaaltermen. Alle kentallen die niet boven- en beneden-index gelijk hebben zullen nul zijn, en de overige zullen alle dezelfde waarde $h/2\pi i$ hebben:

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi i}\,.$$

Een curieus gevolg van dezen commutatieregel is, dat men differentiaalquotiënten symbolisch kan gebruiken om zulke commutatieverschillen te vervangen, of omgekeerd ze kan interpreteeren als zulke verschillen.

Laat ons bijv. eens uitwerken $pq^2 - q^2p$. Daarvoor kunnen wij schrijven

$$pq^2 - qpq + qpq - q^2p,$$

en daar de vermenigvuldigingsregel de associatieve eigenschap heeft, en wij dus gemeenschappelijke factoren buiten haken kunnen brengen levert dat ons

$$(pq - qp)\,q + q\,(pq - qp) = \frac{h}{2\pi i}\,2q.$$

Hetzelfde kunnen wij doen met $qp^2 - p^2q$:

$$qp^2 - p^2q = (qp - pq)\,p + p\,(qp - pq),$$
$$= -\frac{h}{2\pi i}\;.\;2p\;.$$

Men kan zich nu overtuigen dat algemeen geschreven kan worden, bij een geheele functie f van p en van q:

$$pf - fp = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial f}{\partial q}\,; \qquad qf - fq = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial f}{\partial p}\,.$$

Het is een nieuwe curieuse correspondentie, die hier aan den dag treedt, en men kan die, geheel in de lijn van BOHR's correspondentieregel, gebruiken om uit de klassieke theorie, waar deze met differentiaalquotiënten werkt, en waar het pas geeft, tot een correspondeerende theorie in de quantummechanica over te gaan.

Onafhankelijk van de matrixrekening, en tegelijk met de publicatie van BORN en JORDAN, heeft P. A. M. DIRAC een formuleering van de quantummechanica gegeven, waarin hij een eenvoudige algebra ontwikkelt voor symbolische getallen — in analogen zin symbolisch als de complexe getallen ook symbolische getallen zijn — die gefundeerd is op de hier besprokene vermenigvuldigingsregels. Sommige van die getallen kunnen in producten met elkander en met alle overige gecommuteerd worden. Dat zijn „c-numbers", het zijn de gewone getallen. Andere kunnen met vele, maar niet met alle overige getallen gecommuteerd worden. Deze noemt hij „q-numbers", door „q" herinnerende aan „quantum". Hij heeft het ver daarmee kunnen brengen. Tenslotte loopt deze rekenmethode van DIRAC volkomen parallel met de matrixrekening, en wij zullen er niet in het bijzonder bij stilstaan.

In verband met de commutatieregels kunnen wij nog aanstippen, dat, zooals ook door SCHRÖDINGER werd opgemerkt, indien p voorstelt een differentiatiesymbool naar q, n.l. $h\partial./2\pi i\partial q$, en dus ook de functie f een operator voorstelt, die werken moet op hetgeen volgt, de commutatieregels volgen uit de gewone differentiatieregels.

Quantum-mechanica. Het zoo juist opgemerkte over de correspondentie tusschen differentiaalquotiënten en commutatieverschillen maakt het mogelijk om aan elk probleem uit de gewone mechanica te doen beantwoorden een probleem van de quantumtheorie. Daartoe gaan wij uit van de onderstelling, dat het klassieke probleem geresumeerd is in de kanonische bewegingsvergelijkingen met behulp der functie van HAMILTON, H, die uitgedrukt is in de coördinaten, q_j, en de momenten, p_j, van het systeem, dus:

$$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \qquad \frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j} .$$

Welnu, dezelfde Hamiltoniaansche functie H kan een quantummechanisch probleem bepalen. Het komt dan in die functie ook op de volgorde der factoren aan, en indien men geen andere aanwijzingen heeft, moet men de volgorde zoo symmetrisch maken, dat onderlinge plaatsverwisseling van de toegevoegde q's en p's geen verandering in de functie brengt. Vervolgens kan men eerst de vergelijkingen opstellen die uitdrukken dat de variabelen met alle andere commuteeren behalve met hun kanonisch toegevoegde en voorts in de kanonische vergelijkingen de differentiaalquotiënten, door commutatieverschillen vervangen, dus:

$$p_j\, q_j - q_j\, p_j = \frac{h}{2\pi i},$$

$$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{2\pi i}{h}\,(p_j\, H - H p_j)\ ; \qquad \frac{dq_j}{dt} = -\frac{2\pi i}{h}\,(q_j\, H - H q_j)\ ;$$

Het probleem is nu, matrices p_j en q_j te vinden zoodanig, dat de H een diagonaalmatrix, en daarmede een constante wordt.

Het quantum steekt in den eersten regel, de mechanica in den tweeden.

Wij zullen hier geen voorbeelden van ontwikkelen, omdat gebleken is, dat SCHRÖDINGER's methode equivalent is met de matrixrekening, en zelfs de geschiktste manier om de matrices te vinden. Omgekeerd heeft men de matrices noodig, en de correspondentie-opvatting die eraan ten grondslag ligt, om SCHRÖDINGER's resultaten physisch te interpreteeren.

HOOFDSTUK VI.

Matrices en golfoplossingen.

Mathematische relaties. Alvorens te laten zien hoe men met behulp van de oplossingen der golfvergelijkingen de oplossingen der matrixvergelijkingen van de quantummechanica kan construeeren, moeten wij aan enkele mathematische relaties herinneren, die voor deze oplossingen gelden, evengoed als zij gelden voor de oplossingen der snaarvergelijking. Indien wij twee oplossingen nemen, dan kunnen wij hun produkt integreeren over het geheele gebied waarvoor die oplossingen geldig zijn. Denkt men aan een snaar van de lengte 2π, dan kan men bijvoorbeeld nemen de functies die de trillingsvormen van den eersten, en van den derden boventoon voorstellen, dat zijn $\sin 2x$ en $\sin 4x$. Integreert men $\sin 2x . \sin 4x$ over de geheele snaar, dan krijgt men nul.

Neemt men echter het kwadraat van zoo'n functie, bijv. $\sin^2 nx$, en integreert men dat, dan krijgt men $n\pi$. Door het toevoegen van een geschikten factor, in dit geval $1/\sqrt{(n\pi)}$, kan men bereiken dat de integraal van het kwadraat 1 wordt. Dit prepareeren van die functies heet normeeren. Wij willen aannemen, dat dit normeeren voor de functies φ_n geschied is. Met behulp van het teeken δ^n_m voor 0 of 1 naar gelang de indices n en m verschillend of gelijk zijn, kunnen wij dit uitdrukken door

$$\int dS \; \varphi_n \, \varphi_m = \delta^n_m .$$

Een tweede eigenschap, die de mathematici voor ons bewezen hebben is dat een of andere functie f, tenzij ze onprettige bijzondere eigenschappen heeft, in een oneindige reeks ontwikkeld kan worden naar de functies φ_m, met constante coëfficiënten, zoodat men heeft

$$f = \Sigma\,(a)\, A_a \, \varphi_a \quad , \quad \text{en ook} \quad g = \Sigma\,(a)\, B_a \, \varphi_a .$$

De coëfficiënten worden bepaald door het verloop der functie f, resp. g, in het geheele gebied waarvoor de functies φ_a geldigheid hebben. Inderdaad kan men, met behulp van de hoogergenoemde betrekking, afleiden dat moet zijn

$$A_a = \int dS\, f \varphi_a \quad ; \quad B_a = \int dS\, g \varphi_a \,.$$

Verder hangt hier nog mee samen, zooals men vindt door f^2, en door g^2, en vervolgens ook $(f + g)^2$ in een reeks te integreeren: dat gelden moet

$$\int dS\, f^2 = \Sigma\,(a)\; A_a^2 \;\; ; \int dS\, g^2 = \Sigma\,(a)\; B_a^2 \;\; ; \int fg\, dS = \Sigma\,(a)\; A_a\, B_a \,.$$

Meer dan dit hebben wij in het volgende niet noodig.

Constructie der matrixoplossingen. Laat ons ter bekorting in het volgende maar één coördinaat en impuls expliciet neerschrijven. Stel dat de quantummechanica een probleem stelt door uit te gaan van een functie van HAMILTON met een potentieele energie U:

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + U.$$

Hierbij, dit zij ter loops opgemerkt, is van te voren aangenomen dat van de fijne details, waartoe de relativiteitstheorie aanleiding zou kunnen geven, wordt afgezien. Op de in de hoofdstukken III en IV toegepaste wijze kunnen we nu, uit den gegeven vorm, een differentiaalvergelijking volgens SCHRÖDINGER afleiden, en wij nemen aan dat de parameterwaarden E_n en de amplitude functies φ_n thans bekend zijn, zoodat bevredigd wordt de differentiaalvergelijking

$$2m\, E_n\, \varphi_n = \left(2\, m\, U - \frac{h^2}{4\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \varphi_n \,.$$

De oplossingen der eigenlijke golfvergelijking zijn dan

$$\psi_b = \varphi_b \exp\, 2\pi i\, \left(mc^2 + E_b \right) t/h.$$

Wij willen de complexe toegevoegden van deze functies aanduiden door $\overline{\psi}_b$.

Welnu, met behulp dier oplossingen kunnen wij de matrices vormen, die in de volgende regels gedefinieerd zijn:

$$x_b^a = \int dS\, x\, \psi_a\, \overline{\psi}_b = e^{2\pi i\, (E_a - E_b) t/h} \int dS\, x\, \varphi_a\, \varphi_b \,,$$

$$\frac{2\,\pi i}{h}\, p_b^a = \int dS\, \psi_a\, \frac{\partial \overline{\psi}_b}{\partial x} = e^{2\pi i\, (E_a - E_b) t/h} \int dS\, \varphi_a \frac{\partial \varphi_b}{\partial x} \,.$$

Wat de exponentieelen betreft zien wij dat de vermenigvuldigingsregel meebrengt dat een kental van een product in den exponent ook steeds $(E_a - E_b)$ zal hebben, waarbij a de matrix-index boven, b beneden voorstelt. In de diagonaaltermen $a = b$ van alle matrices die hieruit gevormd worden verdwijnt dus de exponent.

Wat nu de amplituden betreft, die wij ξ^a_b, resp. π^a_b noemen, wij zullen aanstonds moeten bewijzen dat

$$\Sigma\,(i)\,(\pi^a_i\,\xi^i_b - \xi^a_i\,\pi^i_b) = \delta^a_b\,\frac{h}{2\,\pi\,i}\;.$$

Dit bewijs is te leveren met behulp eerst van den derden en vierden regel der vorige paragraaf. Heeft men namelijk

$$\frac{2\,\pi\,i}{h}\,\Sigma\,(i)\,\pi^a_i\,\xi^i_b = -\,\Sigma\,(i)\int dS\,\varphi_i\,\frac{\partial\,\varphi_a}{\partial\,x}\,.\int dS\,x\,\varphi_i\,\varphi_b\;,$$

dan kan men $f = \partial\varphi_a/\partial x$ en $g = x\varphi_b$ nemen. De genoemde regels leiden dan tot de gelijkheid

$$= -\int dS\,x\,\frac{\partial\varphi_a}{\partial x}\,.\,\varphi_b\;.$$

Op dezelfde wijze levert het gecommuteerde product

$$\frac{2\,\pi\,i}{h}\,\Sigma\,(i)\,\xi^a_i\,\pi^i_b = \int dS\,x\,\varphi_a\,\frac{\partial\varphi_b}{\partial x}\;,$$

en wanneer wij nu het commutatieverschil nemen, kunnen wij de integranden samenvatten.

Bij den tweeden stap kunnen wij partieel integreeren. Aan de grenzen van het gebied verdwijnen krachtens de gestelde randvoorwaarden bij onze problemen de functies φ_a, zoodat wij krijgen:

$$\frac{2\,\pi\,i}{h}\,\Sigma\,(\pi^a_i\,\xi^i_b - \xi^a_i\,\pi^i_b) = -\int dS\,x\,\frac{\partial\,(\varphi_a\,\varphi_b)}{\partial\,x} = \delta^a_b\;,$$

en dit is hetgeen wij bewijzen moesten, om te laten zien dat de gedefinieerde matrices werkelijk matrices zijn die aan de quantumvoorwaarden, dat zijn de commutatieregels voor coördinaat en impuls, voldoen.

De matrix, U^a_b, die de potentieele energie voorstelt, zal op dezelfde wijze uit U bepaald kunnen worden als de matrix x^a_b uit x, namelijk:

$$U^a_b = \int dS\,U\,\psi_a\,\psi_b\;.$$

Dit bewijst men uit de definitie van de matrix x^a_b. Stel, wij willen het verifieeren voor $U = x^2$. Wij zullen dan stuiten op een som van integralenproducten, die wij wederom met de formules der vorige paragraaf herleiden kunnen:

$$\Sigma(i) \int dS\; x\varphi_a \varphi_i \,.\, \int dS\; x\varphi_i \varphi_b = \int dS\; x^2 \varphi_a \varphi_b \,.$$

Ten slotte rest ons nog te laten zien, dat de functie van HAMILTON voor deze matrices een diagonaal matrix wordt. Dan namelijk zullen de matrices een oplossing mogen heeten van het quantummechanische probleem dat door die functie H gesteld was. Op soortgelijke wijze als hierboven verifieeren wij dit. Afgezien van den exponentieelen factor vinden wij als amplitude voor H^a_b:

$$\frac{1}{2m} \cdot \frac{-h^2}{4\pi^2} \int dS\; \varphi_a \frac{\partial\varphi_i}{\partial x} \cdot \int dS\; \varphi_i \frac{\partial\varphi_b}{\partial x} + \int dS\; U \varphi_a \varphi_b \;.$$

Den eersten factor in den eersten term kunnen wij door partieele integratie omzetten. De reeds meer toegepaste relatie levert dan voor den eersten term

$$\frac{h^2}{8\pi^2 m} \int dS\; \frac{\partial\varphi_a}{\partial x} \cdot \frac{\partial\varphi_b}{\partial x} \;.$$

Nogmaals een partieele integratie brengt thans de amplitude van H^a_b tot

$$\int dS \left\{ \frac{-h^2}{8\pi^2 m} \frac{\partial^2\varphi_a}{\partial x^2} + U\varphi_a \right\} \varphi_b \;.$$

Maar de factor tusschen de accoladen is krachtens de differentiaalvergelijking voor φ juist $E_a \varphi_a$, zoodat wij inderdaad vinden:

$$H^a_b = E_a\, \delta^a_b \;.$$

en daarmede is geverifieerd dat men uit de oplossingen van SCHRÖDINGER's amplitudenvergelijking dadelijk de matrixoplossing van het correspondeerende probleem der quantummechanica kan vinden.

De wederkeerige aanvulling van matrixrekening en golftheorie. Uit het voorafgaande zal reeds gebleken zijn, dat de twee theorieën, die van zoo verschillende uitgangspunten beginnen, tenslotte equivalent zijn. Wel zijn de gezichtspunten zeer verschillend geweest!

Aan de eene zijde zien wij de ontwikkeling van den correspondentieregel van **Bohr**. De gapende kloof tusschen de frequenties van het spectrum en de frequenties van het atoommodel wordt overbrugd door de parallele correspondentie tusschen de klassieke theorie en de postulaten der quantumtheorie. Deze evenwijdigheid is een gids dien men tracht te volgen ook waar hij leidt naar de uitstralingseigenschappen der atomen. De uitstralingskans-amplituden worden gezien als tegenhangers van coëfficiënten in een **Fourier**-reeks. Zij krijgen als ,,karakteristieke amplituden'' een eigen bestaan en ontpoppen zich ten slotte als een matrix. Had een **Fourier**-reeks altijd betrekking op een bepaalde bewegingswijze van het atoom, bij de matrix is die voorstelling losgelaten. Zij heeft gelijkelijk betrekking op alle mogelijke, laat ons zeggen virtueele, bewegingswijzen van het atoom, beter nog, zonder met bewegingswijzen te maken te hebben is zij, de matrix, datgene waarmede wij te doen krijgen indien wij met de eigenschappen van het atoom in wisselwerking met de straling te rekenen hebben.

Aan de andere zijde begint het met de stoute stelling van **De Broglie**, dat een electron begeleid zou zijn, of misschien bestaan zou, uit een trillingsverschijnsel. De snelheid van het electron interpreteert hij reeds als groepssnelheid van die trillingsgolven. Hij interpreteert de stationnaire bewegingswijzen van het gangbare atoommodel als trillingsverschijnselen, of althans begeleid door trillingen, die het geheele gebied vullen dat door het atoom beslagen wordt. **Schrödinger** slaagt erin de golfvergelijking op te sporen, en de staande trillingswijzen aan te geven die aan deze vergelijking voldoen.

Is er reden om de twee theorieën tegen elkander af te wegen? Wij hebben gezien dat ze mathematisch equivalent zijn.

Men heeft aan de matrixtheorie verweten haar gebrek aan aanschouwelijkheid. Voorstellingen van een elektron, van snelheid en omloopsfrequentie in een atoom werden aan kant gezet. In de plaats kwamen oneindige complexen van complexe getallen met bijzondere in de gewone rekenkunde ongebruikelijke rekenregels. Daartegenover werd met nadruk beweerd, dat de theorie zich alleen bezig hield met hetgeen voor de waarneming en meting toegankelijk was.

Aan de vergolfde mechanica werden geroemd de ongedwongenheid waarmede zij de zg. stationnaire bewegingswijzen gevangen had in de discrete reeks van oplossingen harer differentiaalvergelijking, en de aanschouwelijkheid van dit beeld der trillingswijzen. Maar wat leerde zij omtrent waarneembare dingen? Waren de „eigenwaarden" van den parameter harer vergelijking energieën? Neen. Hoe kon zij rekenschap geven van de uitgezonden frequenties? Slechts door aan te nemen dat twee trillingswijzen tegelijk aangeslagen waren, en de „zwevings"toon uitgestraald werd in de frequentie van het geëmitteerde licht.

Men moet de beide theorieën beschouwen in haar wederkeerige aanvulling.

De matrixmethode stelt zeer concrete vergelijkingen op. Het is meestal moeilijk daar rechtstreeks de oplossingen voor te vinden. Aan die oplossingen kan de golvingsmechanica haar helpen. De golvingsmechanica weet niet wat zij aan moet vangen met haar oplossingen. Welnu, dat zij daar matrices van make, en zij zal de beschikking gekregen hebben over de waarden van zekere uitstralingskansen van het atoom.

HOOFDSTUK VII.

Slotbeschouwingen.

De golffunctie als waarschijnlijkheidsmaat. Wat heeft men zich bij de golffunctie ψ te denken? Wat is er dat trilt? Moet men zich daar iets bij voorstellen?

Het valt slecht te voorspellen, hoe het antwoord op deze vraag tenslotte luiden zal. Voorloopig onthouden de auteurs zich het liefst van bespiegelingen daarover. SCHRÖDINGER heeft gepoogd, in het kwadraat der golffunctie, dat is dus het product van ψ en de toegevoegd complexe $\bar{\psi}$, te zien de ladingsdichtheid, die bij de trillingen fluctueeren zou. Het dipoolmoment der lading zou dan in de aparte trillingswijzen nul zijn, maar bij de superpositie van twee trillingen, $\psi = c_1\psi_a + c_2\psi_b$, zouden er fluctuaties zijn in het resulteerende dipoolmoment, met de frequentie $(E_a - E_b)/h$. Inderdaad, men zou dan te maken krijgen met $\int dS\, x\, \bar{\psi}\psi$, en dat zou leiden tot hetgeen wij als matrix x_b^a gevonden hebben, op een factor na. Volgt men deze interpretatie, dan verliest men echter alle houvast voor de potentieele energie, die $-e^2/r$ gesteld was bij het waterstofatoom. Indien er geen geconcentreerde lading is, vanwaar dan de straal r die de potentieele energie bepaalt? —

De matrices symboliseerden overgangswaarschijnlijkheden, kansen. Vandaar dat de auteurs die van de zijde der matrices kwamen, meer aan eene interpretatie dachten welke in die richting wees. Het meest op den voorgrond treedt de hypothese, dat het kwadraat van ψ, $\bar{\psi}\psi$, met het volumenelement dS vermenigvuldigd, aangeeft de kans dat men het deeltje, dat in vergelijking gebracht is, binnen dS zal aantreffen. De quantummechanica zal dienovereenkomstig niet het verloop eener bepaalde beweging voorschrijven, maar de kans, dat men in verloop van tijd het deeltje hier of daar aantreft.

Daarbij wordt wel degelijk gedacht aan een deeltje, aan een elektron, of, zooals bij BORN's theorie van de botsingsproeven, aan een α-deeltje. In deze lijn zou men, eerder dan aan een negatieve ladingsverdeeling om de waterstofkern op de manier van SCHROEDINGER, kunnen denken aan een gemiddelde ladingsverdeeling die men daaromheen aantreft.

Bij deze interpretatie treedt sterk op den voorgrond het statistische element: bij gegeven aanvangscondities, d. w. z. plaats en impuls van een deeltje verschaft de theorie ons niet de mogelijkheid om ondubbelzinnig te voorspellen hoe het er verder mee loopen zal, zij kan niet meer doen dan ons de waarschijnlijkheid doen kennen, waarmede men het later in een zeker volumenelement ontmoeten zal.

Vaststelbaarheid en voorspelbaarheid. In hoeverre men verliest, uit het gezichtspunt van het waarneembare beoordeeld, wanneer deze statistische gegevens voor lief genomen moeten worden, en men af moet zien van een strikt voorspelbare gedetermineerdheid, is het onderwerp geweest van beschouwingen van HEISENBERG. Hij stelt de vraag, in hoeverre men experimenteel begincondities, plaats en impuls, tegelijk scherp bepalen kan? Inderdaad, het meetinstrument zal niet het te metene verschijnsel mogen storen of ook maar beïnvloeden, men zal niet een temperatuur in een reageerbuisje met een badthermometer kunnen meten.

Hoe zal men dan atomen en electronen waarnemen? Het allerfijnste wat wij gebruiken kunnen zal op zijn minst een ander atoom zijn, of een lichtstraal, en deze kunnen niet gebruikt worden zonder het te meten proces ingrijpend te veranderen.

Uit de theorie van het microscoop weten wij, dat de details van een object, m. a. w. de plaats van zekere structuren, niet fijner kunnen worden vastgesteld dan de golflengte van het gebruikte licht aangeeft. Er zullen lichtquanta moeten worden verstrooid. De richtingsverandering van een lichtquantum gaat gepaard met een verandering van zijn impuls $h\nu/c$. Dezelfde verandering van impuls moet het object dulden. Bepaalt men dus zijn plaats met een speling van de orde van λ, de impuls wordt daarbij veranderd met een bedrag van de orde $h\nu/c$, of h/λ. Het product der onzekerheden is dus van de orde

$$\Delta x \,.\, \Delta p_x \,(=)\, h.$$

Aan de hand van nog enkele voorbeelden en gedachte-experimenten licht HEISENBERG toe, dat dergelijke onzekerheden altijd aan de experimenteele bepalingen zullen moeten kleven.

Het zou dus niet rechtvaardig zijn, van de theorie voorspellingen te eischen, indien in de wereld van het waarneembare, meer in het bijzonder bij de atoomprocessen, de mogelijkheid ontbreekt zoowel om de gegevens voor de voorspelling voldoende nauwkeurig te verschaffen, als om de uitkomst voldoende nauwkeurig te controleeren. Herhaling van astronomische waarnemingen maken de gegevens nauwkeuriger bekend, omdat daar het product van de experimenteele onzekerheden de elementaire h verre overtreffen. Herhaalde waarneming van een electron of atoom maken echter de gegevens steeds slechter.

De ondeelbare individualiteit der atoomprocessen. Laat ons weder aan een golfgroep denken. Hoe kleiner h is, des te kleiner is in het ψ-veld de golflengte, des te sterker puntvormig geconcentreerd kan men zich een golfgroep denken, des te scherper kan men een deeltje localiseeren in ruimte en tijd. Echter is h eindig, de golfgroepen hebben een zekere uitgebreidheid, en er is een onzekerheid in de localiseering, althans indien wij de golfgroep als beeld van het elementaire deeltje denken en niet als een graphisch voorgestelde kans op het aantreffen van een puntvormig als singulariteit op te vatten deeltje. Van zoo'n singulariteit willen wij afzien, en de golfgroep als het te beschouwen verschijnsel nemen.

Van deze onzekerheid is de reeds besproken onzekerheidsrelatie van Heisenberg een afspiegeling. Dat zij echter dieper ligt, en voor de theorie fundamenteel is, daarop legt Bohr den nadruk. Zij is inhaerent aan de golfvoorstelling, reeds in haar eerste verschijning bij De Broglie.

Wij kunnen dit aan bekende voorbeelden uit de leer van het onderscheidend vermogen van optische instrumenten toelichten.

Men zou zich kunnen voorstellen, dat men een lichtstraal heel precies na wil gaan, wat richting betreft en wat de plaats betreft. Wil men dit doen door precieser den straal af te zonderen, door den straal nauwer te diaphragmeeren, dan doet zich de golfnatuur van het licht hierin gevoelen, dat men de richting verliest; het buigt zich zijdelings om. Omgekeerd: om van een bundel licht de richting scherp gedefinieerd te bepalen moet men hem breed maken: het oplossend vermogen van sterrekijkers wordt bepaald door de grootte van de opening.

Hetgeen men aan plaatsverscherping wint, verliest men aan richtingsscherpte; hetgeen men aan richtingsscherpte wint, moet men opofferen aan bepaaldheid van plaats.

Zoo is het ook met de dynamische golven. De golven zijn slechts scherp gedefinieerd wat hun richting betreft, dat is wat de „hoeveelheid van beweging" betreft, wanneer zij een groote uitgestrektheid beslaan. Aan den anderen kant, om de golfgroep smal te houden, moet men golfstelsels laten interfereeren, die eenigszins in richting verschillen, en buiten het beschouwde gebied elkander vernietigen. De scherpte van de concentratie geschiedt aldus ten koste van de scherpe definitie van de richting van de hoeveelheid van beweging. Verder: wil men de golfgroep kort maken, dan moeten er golfstelsels van verschillende golflengte interfereeren: verkorting gaat ten koste van de scherpte in de grootte der hoeveelheid van beweging.

De speelruimte in de coördinaten Δx, en de speelruimte in de toegevoegde hoeveelheid van beweging, Δp_x, die essentieel onontbeerlijk zijn, geven een product van de orde van grootte h,

$$\Delta x \,.\, \Delta p_x \;(=)\; h.$$

Men kan ook zoo zeggen: om zijn innerlijke dynamische kwaliteiten voldoende scherp te ontvouwen, heeft een elementair voorval een zeker gebied, een minimum aan speeltooneel in ruimte en tijd noodig. Moet het zich binnen kleiner tooneel afspelen, dan kan dat alleen ten koste van de scherpte, met een breedere speelfranje om impuls en energie. Met een bepaalde scherpte van dynamischen inhoud kan het met niet minder dan zeker minimum van speeltooneel toe. Binnen minder tooneel kan het met die kwaliteiten geen plaats vinden. Het is in dien zin ondeelbaar. Men kan niet zeggen of het deeltje in dezen of in geenen hoek van dat elementaire speeltooneel zich bevindt. Slechts de samenwerking van den inhoud van alle stukjes van dat speeltooneel kan de inhoud uitmaken van hetgeen wij dit deeltje met dezen impuls, dit deeltje met zijn met deze onzekerheidsfranje behepten impuls noemen. Elk der golfjes van de groep doet evenzeer mee aan het geheel der groep. BOHR drukt dit uit door als wezen der quantumtheorie te stellen dat de atomaire processen worden gekenmerkt door een trek van individualiteit.

Over BOHR's beschouwingen naar aanleiding dezer dingen is stellig het laatste woord nog niet gesproken.

SLOT.

INHOUD.

Bladz.

HOOFDSTUK I. **De analogie van de voortplanting van golven en stralen met de beweging van deeltjes** 51
Beschrijving van een golfbeweging 52
De wetten der golfbeweging 53
De beweging van golfgroepen 55
De kanonische bewegingsvergelijkingen 57
Frequentie en golfdichtheid als energie en impuls 58
Experimenteele vondsten 59
De stationnaire bewegingswijzen in een atoom. 60

HOOFDSTUK II. **De toevoeging van een golfvergelijking aan een dynamisch probleem**. 61
De klassieke bewegingsvergelijkingen voor een elektron. 61
De centrale functie der kanonische vergelijkingen 62
De golfvergelijking 63

HOOFDSTUK III. **Toepassing op een harmonischen oscillator** . . . 65
Klassieke mechanica en atoommechanica 65
De harmonische lineaire oscillator 66
Het algemeen verloop der oplossing 67
De discrete trillingswijzen en golfgroepen 68

HOOFDSTUK IV. **Toepassing op het waterstofatoom** 71
De differentiaalvergelijking 71
Invoering van poolcoördinaten. 72
Het algemeen verloop der oplossing 73
Reconstructie der differentiaalvergelijking. 74
De oplossingen en de eigenwaarden 76

HOOFDSTUK V. **De correspondentieregel en de matrixrekening** . . 79
De correspondentie in de frequenties. 79
Correspondentie der stralingsintensiteiten 81
Emitteerende en receptieve virtueele oscillatoren 82
Matrices 84
Quantummechanica 86

HOOFDSTUK VI. **Matrices en golfoplossingen** 88
Mathematische relaties 88
Constructie der matrixoplossingen 89
De wederkeerige aanvulling van matrixrekening en golftheorie . 91

HOOFDSTUK VII. **Slotbeschouwingen**. 94
De golffunctie als waarschijnlijkheidsmaat. 94
Vaststelbaarheid en voorspelbaarheid 95
De ondeelbare individualiteit der atoomprocessen 96

R

Aus den Beständen der Niedersächs. Staats- und Universitätsbibliothek ausgeschieden.
Göttingen, den 10. AUG.

ARCHIVES

DU

MUSÉE TEYLER

SÉRIE III, VOL. VI.

FASCICULE 3.

A. SCHREUDER, *Conodontes (Trogontherium)* and *Castor* from the Teglian Clay compared with the Castoridae from other localities (with 16 Plates) 99

HAARLEM. — LES HÉRITIERS LOOSJES.
1929.

263

A. SCHREUDER

CONODONTES (TROGONTHERIUM) AND CASTOR FROM THE TEGLIAN CLAY COMPARED WITH THE CASTORIDAE FROM OTHER LOCALITIES

INTRODUCTION

The comparative study of the fossil remains which, under the names of *Trogontherium* and *Castor*, are scattered through various Musea, would not have been practicable without the ready willingness of the Keepers of these collections to send all this material to me for study at the "Mineralogisch-Geologisch Laboratorium" of the Amsterdam University. For the remains from the Teglian Clay I am greatly indebted to Professor EUGÈNE DUBOIS, Curator of the Palaeontological Department of the TEYLER Museum at Haarlem, to Professor P. G. KRAUSE, geologist at the Preussische Geol. Landesanstalt and to Professor P. KRUSCH, President of the same Institute at Berlin, to the Rev. REGINALDUS WEINGÄRTNER, Conservator of the collections of St. Joseph's College of the Dominicans, at Vechta in Oldenburg, to the Rev. Jos. CREMERS, Conservator of the Natural History Museum at Maestricht, to the Rev. KARL RIOTTE and the Rev. BERCHMANS, Conservators of the Natural History Museum of the Mission House at Steyl, near Tegelen, and to Professor L. RUTTEN, of Utrecht.

For the use of the material of *Trogontherium* from Mosbach and of *Castor fiber* from Mosbach, Taubach, Mauer, etc., my thanks are due to Professor O. SCHMIDTGEN, Director of the Natural History Museum of the City of Mainz, to Mr. FETZER, Custodian of the Nassau Museum at Wiesbaden, to Professor P. KRUSCH, President, and Professor R. MICHAEL, Departmental Director, of the Preussische Geol. Landesanstalt, to Professor O. **Haupt**, Keeper of the Hessische Landesmuseum at Darmstadt and to Professor F. **Drevermann**, Director of the Palaeontological Collections in the Senckenberg Museum at Frankfort a/M.

The remains of both the castorids found at Jockgrim were submitted to me for investigation by the kindness of Professor E. **Stromer von Reichenbach**, Hauptkonservator of the Bayerische Staatssammlung für Palaeontologie etc. at Munich, Dr. F. **Berckhemer**, Conservator of the Württemberg Natural History Collection at Stuttgart, and Professor W. **Freudenberg** at Schlierbach, near Heidelberg, to whom I am further obliged for the names of the Museums where the remains from Jockgrim are preserved, as also for information regarding this locality.

It is a pleasure also to express my gratitude to Dr. F. A. **Bather**, former Keeper of the Geological Department of the British Museum, for the assistance accorded me in obtaining some remains from the Forest Bed, as also to Professors M. **Boule** and G. J. **Painvain**, at Paris, for the fine plaster cast of the *Trogontherium* skull from St. Prest. All of this material was of great value for the purpose of comparing the remains from different localities.

I also desire to tender my thanks to Professor L. F. **de Beaufort**, Director of the Museum of the Zoological Gardens at Amsterdam, and to Professor E. D. **van Oort**, Director of the Rijks Museum for Natural History at Leiden, who entrusted to me some recent beaver skeletons.

Further, by the sending of their publications, or by letters in reply to my inquiries, my work was materially lightened by many of the gentlemen above-mentioned and by Professors **Charles Depéret** and **Lucien Mayet** at Lyons, Mr. R. **Vaudrey**, attaché à l'Institut de Paléontologie Humaine at Paris, Dr. F. **Pontier** at Lumbres (P. de C.), Dr. G. **Dubois** at Lille, Professor H. G. **Stehlin** at Basle, Professor E. T. **Newton**, Dr. **Hopwood** and Miss **Bate**, at London, Professor W. D. **Matthew** at Berkeley, Dr. O. A. **Peterson** at Pittsburg, Professor A. S. **Romer** at Chicago and Professor J. W. **Gidley** at Washington, Professor **Marie Pavlowa** at Moskow, the late Professor W. **Ramsay** and Dr. A. **Th. Metzger** at Helsingsfors, Professor G. **Dainelli** at Florence, Professor R. **Mariani** at Milan, Professor Ch. **Fraipont** at Liége.

Without this very valuable assistance, I should not have had reliable data, in particular for the first chapter of this publication.

To distinguish remains of *Conodontes* and *Trogontherium* from those of *Castor fiber* is difficult, as became evident to me from the many errors occurring in the various collections. I have therefore not merely endeavoured to give a description of the skeleton from a comparative anatomical, a systematical and a biological point of view, but have also tried to bring out minor morphological differences. It is in general fragments of bones that are gathered, and their identification may prove to be of great stratigraphical value.

For this reason, too, I have preferred to give photographs of the fragments of the bones, rather than a drawing of the entire bone restored, because the way in which the bone is broken is sometimes typical of a species and may facilitate identification.

For the sake of succinctness the name of *Trogontherium cuvieri F.* has been adhered to in the first three chapters, as well as in the Table on page 00, for all specimens which bear this designation in the different collections. The reasons for distinguishing the species *Conodontes boisvillettii* LAUGEL (to which the Teglian remains belong) from *Trogontherium cuvieri* FISCHER, will be explained in Chapter IV.

I take pleasure in expressing here my deep sense of indebtedness to Directors of "Teyler's Stichting", at Haarlem, who accepted this treatise for publication in the "Archives", and who generously had the Plates executed in heliotype.

CHAPTER I

LOCALITIES WHERE TROGONTHERIUM REMAINS HAVE BEEN FOUND AND PARTICULARS REGARDING THE SPECIMENS

The region in which remains of *Trogontherium* [1]) have been found beyond all doubt, extends from the south-east of England to the mouth of the Don in the south of Russia (text fig. 1).

RUSSIA. The most easterly locality was the first known. Here it was, near Taganrok, on the Sea of Azov, that the skull was discovered which has been described and illustrated by FISCHER (1809), by CUVIER (1824—1825) and by ROUILLIER (1847). This skull, which is preserved in Moscow, is still the largest and most perfect ever found, and presents the type of the species *Trogontherium cuvieri* FISCHER.

The statement made by LYDEKKER (1885), to the effect that this skull came from the "Pleistocene of Siberia", is based upon error. VON LINSTOW (1908) deems such a mistake hardly credible, but that it actually was committed is proved by LYDEKKER's own words: "The genus *Trogontherium* was originally *described by Fischer* on the evidence of a cranium from the Pleistocene of Siberia".

Another locality in Russia we find alluded to in 1846 by NORDMANN, who mentions the discovery of "parties séparées de squelette d'un animal ressemblant au *Castor* (*Trogontherium*)" in the Quarantine Ravine, near Odessa, in a yellow clayish deposit. The fossils collected there are now in the Geological-Palaeontological Institute of the University of Helsingfors, where NORDMANN at a later period was Professor of Zoology, as I learned from the late Professor RAMSAY, Director of the Palaeontological collections there. Dr. METZGER, Keeper of these collections, did not, however, succeed in finding the remains of the beaver-like animal in question; it is probable they may have been lost in the successive removals which NORDMANN's collections have experienced.

---

[1]) For the use of the name *Trogontherium* see p. 101.

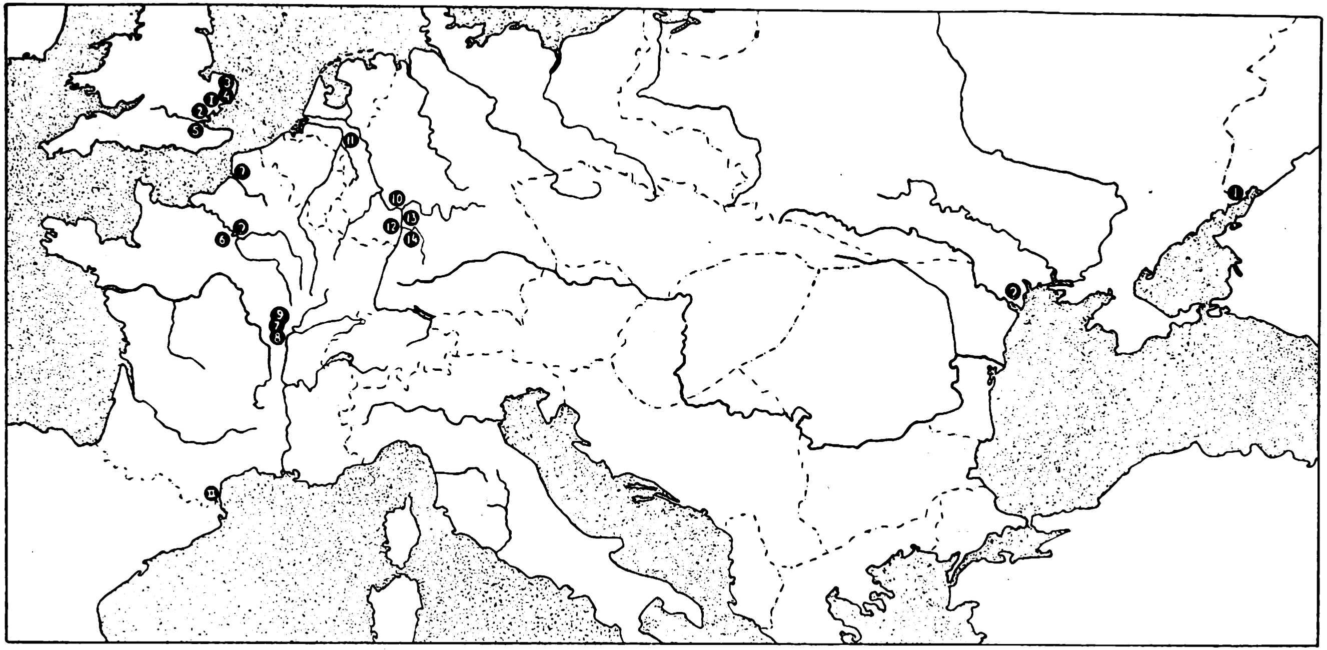


Fig. 1.

Map showing localities in Europe where remains of *Trogontherium* have been found.
1. Taganrok. 2. Copford. 3. Norfolk. 4. Suffolk. 5. Greenhithe. 6. St. Prest. 7. Chagny. 8. Chalon-St.-Cosme. 9. Curtil. 10. Mosbach. 11. Tegelen. 12. Jockgrim. 13. Hochsachsen. 14. Mauer. I. Woodbridge. II. Perpignan.
The localities indicated with ? are Odessa in Russia, and Abbeville and Chelles in France.

Thus, Odessa may not be named among the undisputably established localities where *Trogontherium* remains have been discovered.

ENGLAND. Numerous fossil remains of *Trogontherium* have been found in England; they have been described by Lyell (1840), Owen (1846, 1869), Brown (1852), Newton (1881, 1882, 1890, 1891, 1892, 1902, 1916), Reid (1890) and Hinton (1914), and nearly all come from the Upper Freshwater Bed and the Forest Bed along the coast of Norfolk (Cromer, Overstrand, East and West Runton, Mundesley, Paston, Bacton) and from Suffolk (Kessingland).

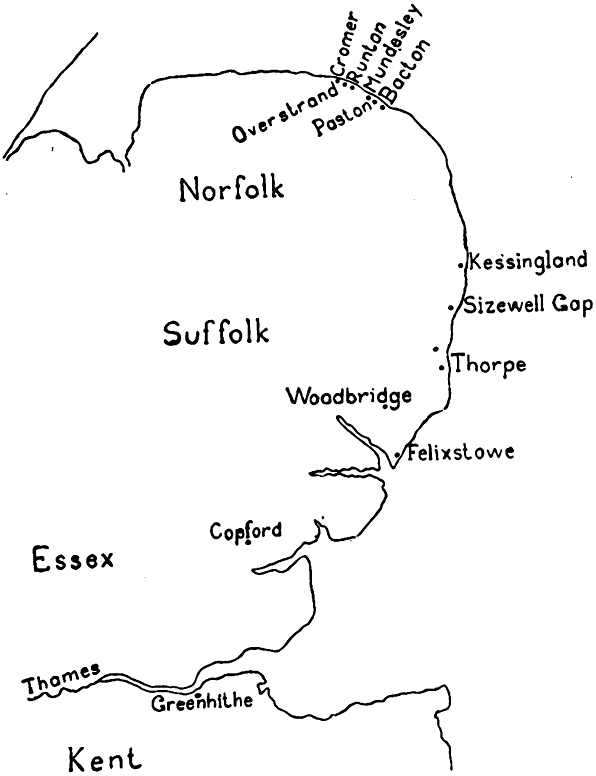

Cromer
Runton
Mundesley
Bacton
Overstrand
Paston
Norfolk
Kessingland
Sizewell Gap
Suffolk
Thorpe
Woodbridge
Felixstowe
Copford
Essex
Thames
Greenhithe
Kent

Fig. 2.
Map of localities on the east coast of England where *Trogontherium* remains have been found.

Some specimens are mentioned from the Weybourn Crag (East Runton), viz. mandibula fragments and teeth, a fragment of a femur and another of a tibia-fibula. NEWTON (1891) mentions this occurrence in the Weybourn Crag, yet OSBORN (1922) does not give *Trogontherium* in his list of the fauna of this deposit. OSBORN probably did not know of this publication of NEWTON's, as it does not occur in the former's list of literature consulted, although, quoting from Mr. A. C. SAVIN's "notes", OSBORN states that "the Forest Bed on the foreshore of East Runton is often so mixed up with the shelly Weybourn Crag that it is difficult to say which bed the bones are in."

In the still somewhat older Norwich Crag of Thorpe, and of Sizewell Gap, portions of incisors and the distal extremity of a femur have been found.

In deposits of younger date than the Forest Bed series, the remains are still more sparse.

First of these to be mentioned is the premolar from the Pleistocene (Glacial Drift) of Copford in Essex, which NEWTON, in 1916, recognised as a cheek-tooth of *Trogontherium*. This premolar had already been described and illustrated in 1852 by BROWN, and was named by SCHLOSSER (1902) *Dipoides Lydekkeri* n. sp.

The second Pleistocene discovery is an incisor of the lower jaw, from the High Terrace near Greenhithe, in the Thames valley (Kent), which is illustrated and described by NEWTON (1902).

Formerly (1882) this author had given a survey of the English discoveries of remains up till that year, and a discussion on the nomenclature of *Trogontherium* (*Conodontes*, *Diabroticus*).

Although the English material of *Trogontherium* remains is large quantitatively, it consists chiefly of portions of the jaw (mainly of the lower jaw), of cheek-teeth and incisors, of femur and tibia-fibula fragments. Neither of the spinal column nor of the pelvic and pectoral girdles has anything been described; of the fore-leg possibly a humerus fragment (OWEN 1869), of the hind-leg the calcaneum (OWEN 1869) and the navicular (HINTON 1914). The skull from East Runton, although more damaged than the Russian skull, forms a very rare and valuable document.

Trogontherium minus NEWTON (1890) is a smaller species, of which an upper jaw with three grinders was discovered in the base of the Red Crag near Woodbridge (Suffolk).

This will presumably be a smaller forerunner of the species *cuvieri*, these strata being older than those in which this larger species has been found.

It has probably been discovered in France too. (The author, Pal. Zeitschr. Bd. IX, 1928.)

As I was kindly informed by Professor E. T. NEWTON, all the remains of *Trogontherium* found in England were scattered through various private as well as public collections, which are noticed in his Survey Memoir of the "Forest Bed" Vertebrates 1882, but the greater part are now preserved in the British Museum, S. Kensington; the Geol. Survey Museum, Jermyn Street; and in the Norwich Museum.

That some remains from Bacton, Norfolk and Mundesley are to be found in the Nat. Hist. Museum at Milan (v. LINSTOW, 1908) is a mistake. Professor E. MARIANI, Director of the Museo Civico di Storia Naturale at Milan, was so kind as to write me that these are plaster casts, namely, of a tibia and of two mandibula fragments from the English localities.

FRANCE. Compared with the numerous remains found in England, the material known as discovered in France is very scanty. The first and most important discovery was mentioned in 1862 by LAUGEL, and refers to a skull and a metatarsal IV, from the "Sables de Saint-Prest" near Chartres (Eure-et-Loir). This skull, which among other parts lacks the premaxillary region, was illustrated by GERVAIS (1867—1869) after it had been minutely described by A. LAUGEL and had received the name of *Conodontes Boisvillettii*. It is preserved in the collections of the "École des Mines" at Paris. LAUGEL terms it distinctly different from the Russian skull, an opinion which is shared by SCHLOSSER (1885); probably this author was acquainted only with CUVIER's somewhat poor illustrations (1823) of the latter skull.

Not until thirty years later do we find mention by DEPÉRET (1893) of the second discovery in France, a metatarsal II, found near Saint-Cosme in the valley of the Saône, near Chalon.

In the same publication a description is to be found, with illustrations, of a mandibular ramus with the three foremost cheek-teeth in place, a lower premolar and a fragment of an upper incisor, under the name of *Castor Issiodorensis* CR. et JOB. As COLLOT (1906) quite rightly points out, these remains, found at Chagny in somewhat older strata which DEPÉRET terms "horizon des sables et graviers de Chagny", are to be ascribed to *Trogontherium.*

As likewise having belonged to this animal COLLOT mentions two femora, one of which was discovered at Curtil with a right mandible and a few fragments of incisors, the other at Bligny-sous-Beaune. The latter locality, according to COLLOT, is geologically slightly older than that of Curtil, but both localities belong to the "horizon de Chagny" and are rather older than the strata of Saint-Prest and of Chalon-Saint-Cosme, which are considered to be synchronous (DEPÉRET, MAYET and ROMAN, 1923).

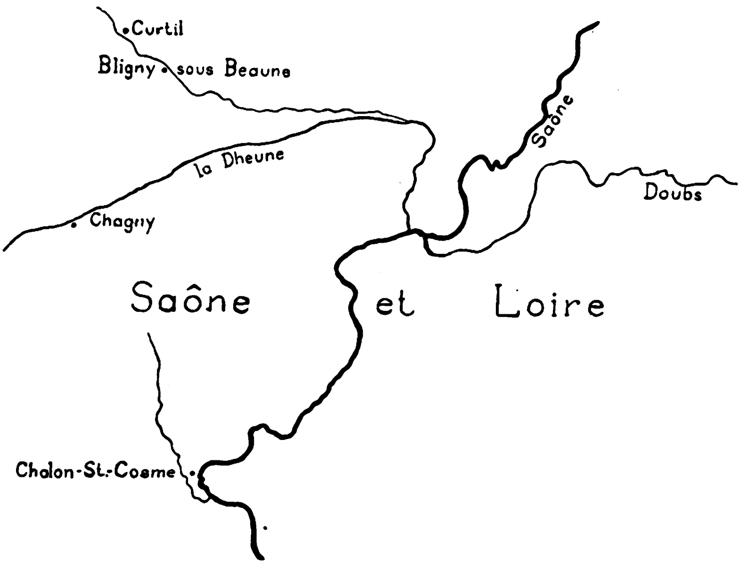


Fig. 3.

Map of localities in the French département Saône et Loire where *Trogontherium* remains have been found.

The fossils found at Curtil and at Bligny are preserved in the Museum at Beaune; those found near Chagny and Chalon-Saint-Cosme in the one at Lyons.

As other localities in France where *Trogontherium* is found, Chelles is cited by AMEGHINO (1881), who writes about "trois molaires de ce grand rongeur de Saint-Prest" from this place, while Abbeville is first mentioned by d'AULT DU MESNIL (1896), who collected there a number of fossil bones which were identified by **Gaudry**. These remains from Chelles and Abbeville have been neither described nor illustrated, nor is there any mention of the collection in which they are preserved. On inquiry Professor **Boule** informed me that there are no remains of *Trogontherium* among the collections from Chelles or from Abbeville in the Natural History Museum at Paris. Dr. **Pontier**, at Lumbres, was at considerable pains to obtain for me some information regarding these remains from geologists in the north of France, but without material result. Much of what **Ameghino** collected at Chelles has been carried by him to La Plata in Argentina, from where I have received no reply to my inquiries.

The collection **d'Ault du Mesnil**, from Abbeville, is now in the hands of the Abbé **Breuil**. Mr. R. **Vaudrey**, attaché à l'Institut de Paléontologie Humaine, at Paris, where this collection is preserved, wrote me with respect to the remains of *Trogontherium* which, according to **Rutot** (1900) and G. **Dubois** (1924), were found at Abbeville, as follows: "Il y avait en effet dans la collection **d'Ault du Mesnil** un fragment (que j'ai vu) d'une incisive appartenant probablement au *Trogontherium*. Malgré toutes mes recherches je n'ai pu le retrouver. La perte n'est pas très grande, puisqu'il n'y avait pas d'indication de provenance. Cependant il est probable qu'il venait, comme la plupart des ossements de cette collection, d'Abbeville."

The collection gathered at the same locality by **Commont** is now the property of Mr. **Vayson de Pradelles**, and will shortly be transferred from the Vaucluse, where it is at present, to Paris where it will be available for study.

Thus, neither Chelles nor Abbeville may be cited as localities where *Trogontherium* has been found beyond all doubt, since it is not impossible that fossil specimens of this animal may have become confused with *Castor* remains, as is frequently the case in most of the collections.

The small forerunner of *Trogontherium cuvieri*, which occurs in the older Pliocene of England, is, in my opinion (1928), represented in France by the femur of **Depéret**'s *Castor praefiber* from Perpignan in Roussillon (1890—1897).

GERMANY. According to the notes on the labels in the German collections of fossil remains of *Trogontherium*, the first discoveries date from 1882, when **Karl Koch** and A. **Römer** made collections from the Sands of Mosbach. **Schlosser**, in 1885, did not mention the occurrence of *Trogontherium* in Germany, although, according to SCHROEDER (1890), SANDBERGER, in 1875, and KOCH, in 1880, had already made account of it among the fauna of Mosbach.

In later years various collections of *Trogontherium* remains have been gathered at this locality, which are now at Mainz, Wiesbaden, Berlin, Darmstadt and Frankfort a.M. All that was present in the two first-named collections in 1912 has been described, and partially illustrated, by W. VON REICHENAU (1912); it comprised lower jaws, cheek-teeth and fragments of incisors. It was evident that the collection at Mainz had been augmented since then with valuable specimens, as, besides ten lower jaws and four femora, I now found there two valuable skull fragments. At Darmstadt, also, a portion of a skull is preserved, viz. an upper jaw with both rows of teeth, found in analogous strata at Hessler, close to Mosbach.

The other German collections mentioned above consist of more or less perfect lower jaws, teeth and incisors. All these remains were found "im tiefsten Niveau der Mosbacher Sande" (SOERGEL, 1925).

FREUDENBERG (1909) states that in 1905 he found remains of *Trogontherium* in the palaeontological collection at Munich, among the fossils from the clay of Jockgrim, near Ludwigshafen. This locality had already been cited by SCHLOSSER in 1906.

In 1911 FREUDENBERG made mention of a discovery of *Trogontherium* from Hohensachsen (Pilgerhaus), near Weinheim, "aus altdiluvialen Neckarsanden." This proved to be a second molar out of the lower jaw. (As the author informed me by letter in 1927, the correct name of this locality is Hochsachsen.)

Further a discovery of *Trogontherium* at Mauer, consisting of an upper premolar, was made mention of by FREUDENBERG in 1922/23.

RÜGER (1928) apparently did not know of this publication by FREUDENBERG, as he described two left lower jaws as the first discoveries of *Trogontherium* at Mauer. He proposes for those remains the name of *Trogontherium soergeli* n. sp. because, in his opinion, they present remarkable differences from *Trogontherium cuvieri* FISCHER. Unfortunately his arguments are based upon a deplorable error, for he compares the *lower* grinders from Mauer with the *upper* teeth from Taganrok and from East Runton.

All these German specimens were with the utmost willingness sent to me for study, and thus I could ascertain that the *Trogontherium* remains from Jockgrim, in the collection at Munich, comprise 4 fragments of rami mandibulae, 8 of incisors, 11 molars, 2 fragments of the radius, 2 of the tibia-fibula, 2 of the femur; further, a

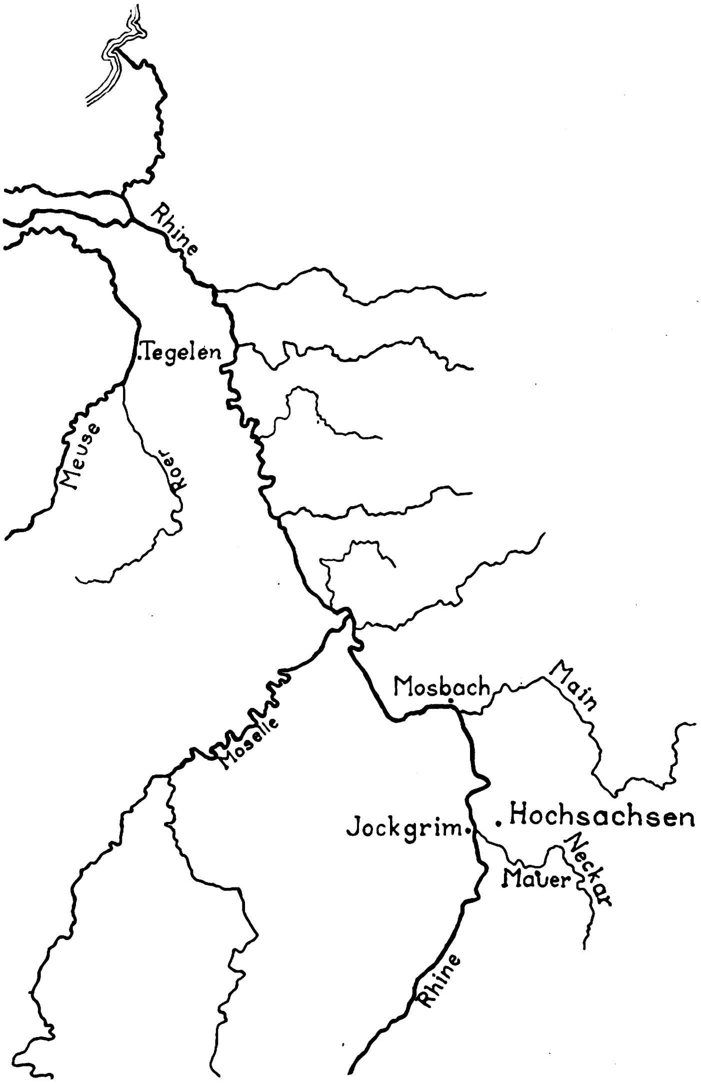

Rhine
Tegelen
Meuse
Roer
Moselle
Mosbach
Main
Hochsachsen
Jockgrim
Mauer
Neckar
Rhine

Fig. 4.

Map of localities in the basins of Rhine and Meuse where *Trogontherium* remains have been found.

portion of an ilium, a clavicle fragment and a petrotympanicum.

The Württembergische Naturaliensammlung at Stuttgart possesses from the same locality a fragment of an upper incisor, a worn off first molar out of the right upper jaw, a young first and a young third molar from the left upper jaw. Besides the premolar from Mauer and the molar from Hochsachsen, there are, from Jockgrim, in the private collection of Professor FREUDENBERG a humerus fragment and one of a juvenile right mandibula with all the grinders.

VON LINSTOW (1908) gives only Mosbach and Jockgrim as localities in Germany where without doubt remains of *Trogontherium* have been found. As a presumable locality he mentions Taubach, because POHLIG (1890) has written of remains found there of a very large race of beavers, known also from Mosbach.

This account, however, refers to the remains of *Castor fiber*, which were found at Mosbach as well as at Taubach. *Trogontherium*, as Prof. MICHAEL, at Berlin, and Prof. FREUDENBERG, at Heidelberg, have informed me, has not been found in Taubach.

Neither are remains known from Marquede nor from Rixdorf, localities cited by VON LINSTOW (1908) as places where remains of *Trogontherium* have possibly been discovered. BRANCA mentions, namely, a lower jaw of a beaver, much resembling *Trogontherium*, from Marquede (province of Saxony), and PORTIS (1896) writes about "Sabbia di Mosbach e Rixdorf con *Trogontherium*" in his Contribuzioni alla storia fisica del bacino di Roma etc.

Taubach, together with Rixdorf and Marquede, must thus be deleted from the list of localities. Only from Mosbach, Jockgrim, Hochsachsen and Mauer are remains of *Trogontherium* known.

Although the somewhat younger deposits of Jockgrim have yielded far fewer specimens than those of Mosbach, the material is nevertheless of considerable value, as, owing to the soft clay in which it was found, it is in a much better state of preservation than that from the sandy strata of Mosbach. On these bones the surface is rough and the marks of muscle and blood-vessel impressions are obliterated.

While SOERGEL (1925) discusses the fauna of Jockgrim, he bestows only the following words on the Rodentia: "*Trogontherium cuvieri* FISCHER. Dieser grosze Biber soll nach FREUDENBERG (1911) in Jockgrim häufig vorkommen. In den Mosbacher

Sanden ist er nicht häufig und auf die untersten Schichten beschränkt; in Mauer und Süszenborn fehlt er".

As said above, much more *Trogontherium* material is preserved from Mosbach than from Jockgrim, and discoveries at Mauer have been known since 1923. Besides of this rodent, however, the same strata of Jockgrim have disclosed remains of *Castor fiber* L., which are now in the Museum at Munich, but erroneously ascribed to *Trogontherium*. For this reason the beaver had not hitherto been known as belonging to the fauna of Jockgrim, and SOERGEL (1925) does not mention it in his list. The beaver remains comprise a portion of a tibia and of an ulna, a mandibula fragment, fragments of incisors and eight cheek-teeth. Thus, in Jockgrim, just as in Mosbach and in Mauer, in the Forest Bed and in Tegelen, both animals lived together.

THE NETHERLANDS. In the Netherlands the remains of *Trogontherium* were recognized among the fossils from the clay deposits of Tegelen (near Venlo, in the valley of the Meuse, in the Dutch province of Limburg) by Professor EUG. DUBOIS (1904), who has presented his rich collection, gathered by him in these layers, to the TEYLER Museum. The greater part by far came from the clay-pits of the firm of Canoy and Herfkens (Canoy, Herfkens and Smulders), and a smaller number from the pit of Teeuwen Brs. The almost perfect hind-foot and the bones of the neck, as well as some elements of the fore-foot, an almost perfect mandible, together with the many caudal vertebrae, the large fragments of the nasale, of the scapula, of the clavicle and of some ribs, combined with the more resistant parts of the skeleton usually found in collections, stamp this collection as one of the most important ever brought together of *Trogontherium*.

A second collection has been gifted to the Museum of the Preussische Geologische Landesanstalt, at Berlin, by Professor P. G. KRAUSE, who gathered it in the Teglian Clay (which he terms "*Trogontherium*-Tone von Tegelen") during the years from 1907—1912. This likewise comprehensive collection, mainly from the clay-pits belonging to the firm of Herfkens & Smulders, with much less from "Teeuwen's Grube", "Thiessen's Grube" and "Berger's Grube", contains the largest pelvic and skull fragments and some hundreds of teeth and fragments of incisors, besides a unique specimen of a proximal epiphysis of the tibia.

The third large collection, gathered between 1909 and 1912 by the Rev. REGINALDUS WEINGÄRTNER O. P. (at that time residing at Venlo) in the clay-pits of Teeuwen Bros., between Venlo and Tegelen, is preserved at Vechta (Oldenburg), in the Mineralogical-Geological Collection of St. Joseph's College of the Dominicans. Of this collection the undamaged navicular and the very young incisors and cheek-teeth deserve special mention, besides one milk tooth and large complete incisors out of one and the same upper jaw.

The *Trogontherium* material in the Museum for Natural History at Maestricht [1]) and in that of the Mission House at Steyl, near Venlo, though less than in the above collections, is still considerable. The first-named Museum possesses a sacrum and some thoracic vertebrae, a humerus with a perfect distal extremity and a basioccipital bone, none of which are found in any other collection. The last-named Museum contains, among other specimens, the only perfect metatarsal IV that I have seen.

Some remains of *Trogontherium* may be found in the collections of the Geological Institute of the University of Utrecht. These were collected at Tegelen in 1907 by Dr. J. LORIÉ.

As the fossils from Tegelen, like the fossils from Jockgrim, come from soft fine clay layers, they are perfectly preserved. Their colour, too, from light to dark brown, is similar as regards the bones and the dentine of the teeth, whereas the enamel has become very dark blue in colour.

These various collections from Tegelen form together such a wealth of material, that we have been enabled to acquire a knowledge of nearly the whole skeleton of *Trogontherium.* It is regrettable, however, that no skull or even any considerable fragment of one could ever be secured at Tegelen, neither a whole skeleton nor any large part of one, so that there can be no question of describing a type and co-type, as PETERSON did of *Palaeocastor fossor.* The reason of this lies in the fact that in working the pits the clay is dug out vertically, so that all larger elements of the skeleton are broken.

To give an idea of the extent of the material from Tegelen lent me so readily, I may merely mention that the number of mandibular rami was about 80, that of femora and also of the tibiae-fibulae more than 30, while the cheek-teeth and incisor-fragments were present in hundreds.

---

[1]) This collection is still being added to by the remains gathered annually in the clay-pits of Canoy-Herfkens and of Alfred Russel.

Von Linstow (1908) mentions this unique locality in the Netherlands, but only one collection, namely that at Berlin. Rutten (1909) mentions, besides the collection in the Teyler Museum, only the specimens at Utrecht, collected by Lorié.

BELGIUM. Regarding the identity of the remains of a large rodent, which have been described and illustrated by Schmerling (1833), various opinions are entertained. These remains consist of a fragment of a mandibula with one cheek-tooth, and of two separate teeth found together in a cave at Chokier, on the Meuse above Liége. Schmerling himself referred them to an agouty. Pomel (1848) discerned a resemblance between Schmerling's cheek-teeth and those of Owen's *Trogontherium cuvieri* from the Forest Bed. He deems this name, however, incorrect for the English remains, as, in his opinion, they are not identical with those of the type specimen described by Fischer.

To the cheek-teeth from Chokier, together with the remains from the Forest Bed, Pomel gave the name of *Diabroticus schmerlingii*.

As Newton (1882) quite justly remarks, however, Schmerling's illustrations are so poor that it is impossible to draw any reliable inference from them.

E. Lartet (1864), after having seen a plaster cast of the grinding surfaces, which was sent to him from Liége, referred them to "l'Urson de Canada (*Hystrix dorsata* Gm.)". Through the kindness of Professor Ch. Fraipont, of Liége, who lent me these objects for examination, I am able to state with certainty that these teeth are not those of *Trogontherium*. They are smaller, more brachydont, and the crown is rounder; also the number and position of the enamel islands is different in these teeth, which most probably will be of *Hystrix*.

SPAIN. Jagor (1873) gives an account of a collection of bones from the Cueva de Dima, in Biscay, which he has presented to the Berliner Gesellschaft für Anthropologie, Ethnologie und Urgeschichte. Lartet, according to the letter which accompanied this gift, had found in this collection a fragment of a "grosse incisive que je ne peux attribuer qu'à un *Castor* de grande taille".

VON LINSTOW (1908) reckons this incisor to the doubtful specimens of *Trogontherium.*

Prof. FREUDENBERG, in his capacity as a member of the abovementioned Society, was so kind as to beg for fuller particulars about this collection of JAGOR's. The answer ran as follows: "Wir haben uns bei allen in Betracht kommenden Stellen erkündigt, um zu ermitteln, wo sich diese Knochenreste finden. Leider vergeblich". Signed Dr. TRAEGER.

There is thus no certainty to be obtained regarding the identity of this tooth. As the name of *Trogontherium* is not mentioned by LARTET, there is no reason to include the Cueva de Dima among the localities where remains of this animal have been found, nor even among the doubtful ones. No other discoveries in Spain are known.

ITALY. But one locality in Italy is given for *Trogontherium,* and here, too, it is very doubtful if we have to do with remains of this animal. In 1899 BOSCO mentioned that, in 1875, in the lacustrine Upper Pliocene of Valdarno, a last molar from the right lower jaw was found at Terranova. This molar is now in the Palaeontological Museum at Florence. Prof. DAINELLI, Director of that Museum, could not give me any further information regarding this molar, as he was not sure if the said molar was still in the Museum and, as many collections were packed in cases preparatory to being removed to another building, no search could be made for it. BOSCO's illustrations of this molar are clear enough, however, and his description detailed. Judging from these it appears to me very doubtful if this molar is to be attributed to *Trogontherium.* BOSCO bases his determination upon the resemblance he saw to the third grinder (m_2) illustrated in Pl. XI, figs. 1 and 2 of NEWTON's publication (1882). And certainly in the illustrations the outline of the grinding surface and the position of the enamel islands are very similar, but, as NEWTON quite rightly remarks, the number (more than four) and the form of these islands is caused by this row of old teeth being almost worn out, whereby the typical four islands have broken up into a larger number. The molar from Valdarno is still 12.5 mm. high, and so its five islands cannot be compared with those on the nearly worn out molar from Kessingland.

A fifth fold (later an island) may appear in a not far advanced stage of wear on p_4 and on m^3 in *Trogontherium.* But Bosco also mentions on the tooth from Valdarno four roots, one large and three smaller ones, and this precludes the possibility of this tooth being a premolar of *Trogontherium* where never more than two flat roots occur. Thus the only possibility would be that it was an m^3 of this animal, were it not that Bosco's description of the outer wall refutes this supposition: "Uno strato di smalto spesso uniformemente circa 1 mm. ricopre all' ingiro tutto il dente, sul quale scorgesi una sola piega, che si trova verso l'esterno a breve distanza dallo spigolo anteriore, disposta verticalmente, discremente profonda *fra le radici* ed attenuantesi sensibilmente in alto".

A similar single fold, thus, to what we see in *Castor* on the outside of the lower cheek-teeth and on the inner side of the upper ones, and which also occurs in *Trogontherium,* but never visible here on the wall further than to half of the original height of the teeth. Consequently the tooth from Valdarno is not to be attributed to *Trogontherium,* if the fold can be seen as far as to "between the roots", as is distinctly visible in fig. 2 of Bosco's Table XII. Moreover, such a position of the enamel islands towards each other as fig. 2*a* shows, I never saw in *Trogontherium.*

Up till the present, thus, *Trogontherium* is only known with certainty from the north coast of the Sea of Asov and the basins of the Saône, Seine, Meuse and Rhine.

◆

CHAPTER II

VERTICAL DISTRIBUTION

From the localities enumerated in the first chapter it is evident that the large *Trogontherium* ¹) species is met with during a comparatively short geological period, namely in the strata of transition between the Pliocene and the Pleistocene (Calabrian and Sicilian) and in the Under and Middle Pleistocene. After the Tyrrhenian (Chellean) no remains of this animal have been recognised (G. DUBOIS, 1925).

In England the Norwich Crag, and in France the "Horizon de Chagny", are the oldest deposits in which *Trogontherium* has been found, being there a contemporary of *Hippopotamus major*, *Mastodon arvernensis*, *Elephas meridionalis* and *trogontherii*, *Rhinoceros etruscus*, *Equus stenonis*, etc., a typical Villafranchian fauna. Discoveries in the younger strata of St. Prest, the Forest Bed, Tegelen, Mosbach and Jockgrim show that it also lived together with *Elephas antiquus*, *Rhinoceros merckii*, *Alces latifrons*, *Cervus elaphus*, *Bison priscus*, etc.

EUG. DUBOIS (1905) places the fauna of Tegelen in the Netherlands in the first interglacial period (which he regards as Mindel-Risz Interglacial, denying the existence of a Günz Glaciation), as SOERGEL (1925) does that of Jockgrim. The Teglian remains point to a typical transition fauna which, according to BERNSEN (1927), exhibits close resemblance to the fossil fauna of the Saint-Prestian type.

At Mauer, and at Greenhithe in the Thames valley, and possibly at Chelles and Abbeville, *Trogontherium* was contemporaneous with Man in the Chellean (Tyrrhenian), which period is counted in the last Interglacial by some French palaeontologists, *e. g.* HAUG and BOULE (1923). PENCK and G. DUBOIS (1924) among others, however, reckon the Chellean to the Mindel-Risz Interglacial being, according to Penck, the second, or last but one, interglacial period, Osborn's First Faunal sub-zone.

---

¹) For the use of the name of *Trogontherium* see page 101.

At all events, it is certain that *Trogontherium* did not survive the Last Glacial Period, in contrast to *Castoroides*, its very large beaver-like contemporary in North America, the remains of which are found together with those of the Mammoth in post-glacial deposits.

The small *Trogontherium* species was found in England in the base of the Red Crag; in France in the fauna of Roussillon, deposits which are older than the Norwich Crag and the Villafranchian and accounted by DEPÉRET (1893) to the middle Pliocene, by other geologists, however, to the upper Pliocene.

It is noteworthy that in England, as well as at Tegelen, Mosbach, Jockgrim and Mauer, remains of *Trogontherium* and of *Castor* have been found together. In France this has not yet occurred, but in my opinion the reason can only be the very small number of remains of the two animals met with in that country.

The fauna of Roussillon, however, as well as the base of the English Red Crag, contain most probably both *Castor* and *Trogontherium minus*.

CHAPTER III

OSTEOLOGY AND COMPARISON OF THE SKELETON WITH THAT OF THE OTHER CASTORIDAE

> "At the present time we cannot be too "exact in the observation of the minute. Every "rudiment of a cusp on a tooth, or facet, or "articulating surface on a bone has its value, "not as a sign-post on which to hang a new "species, but as suggestive of the dawn of "some new character or the instrument of "some function or relationship." OSBORN.

Skull

It is in the description and illustration which GOTTHELF FISCHER (1809) has given of a large rodent skull, found on the sandy shore of the Sea of Azov, near Taganrok, that we first meet with the name of *Trogontherium*, bestowed by the above author on this "animal rongeur par excellence".

FISCHER sent a rather indifferent illustration of this skull to CUVIER, who used it, reduced to half-size, in his "Recherches sur les Ossemens fossiles". In the second edition of this work, this author adds the remark that, in so far as he can make out from the illustration, the skull of *Trogontherium*, besides being about $^1/_5$ larger, differs from that of *Castor* only in the long narrow form of the last molar and in the place of the postorbital process which lies further back here, whereby the portion of the skull behind the eye-socket is relatively smaller. CUVIER deemed these differences too insignificant to separate this fossil generically from the beaver, and therefore calls it *Castor trogontherium*. Curiously enough, CUVIER (1823) headed his article: "Des Castors des terrains meubles, et notamment de la grande espèce nommée *Trogontherium Cuvieri* par M. DE FISCHER". As NEWTON (1891) with truth observes, FISCHER had never mentioned a specific name in any publication; possibly, however, in a letter to CUVIER.

In 1847 ROUILLIER illustrated this skull again, natural size, in his "Études palaeontologiques sur les environs de Moscou". These figures are particularly fine; the ventral view is reproduced partly in Plate II, fig. 1, of the present work.

More than fifty years after **Fischer**'s publication, **Laugel** (1862) described a skull from Saint-Prest near Chartres, which he calls "le plus curieux peut-être de la faune de Saint-Prest". The ventral view of a very good cast is given on Plate II, fig. 6, of the present publication. This skull lacks the zygomatic arches and the premaxillary region and is damaged on the base. **Laugel** observed that, in contrast to that of *Castor*, the skull is quite flat on the top and the hinder part is lower in proportion to the front part owing to the high maxillaries. **Laugel** rejects any identity with the Russian skull on the grounds that the cheek-teeth in the latter decrease towards the back and that the postorbital process is absent. It is incomprehensible how **Laugel** came to make such an assertion, since the contrary is apparent from **Fischer**'s illustration, and **Cuvier** expressly drew attention to the length of the last molar and to the position of the process in question. **Laugel** bestowed on the French specimen the generic name of *Conodontes*, for the reason that the grinding surface of the hindermost molar is conical, and the specific name of *Boisvillettii*, after the discoverer.

This skull was illustrated a few years later by **Gervais** (1867), in his "Zoologie et Palaeontologie générales". It is to be regretted that the premaxillaries have been reconstructed after the model of *Castor*, whereby this portion of the skull has been drawn too short and thereby presents an aspect totally different from the Russian skull with the very long diastema, of **Fischer**'s and **Rouillier**'s illustrations.

Schlosser (1885) therefore writes: "Der von **Cuvier** beschriebene und abgebildete Schädel (his bibliography shows that he was not acquainted with **Fischer**'s and **Rouillier**'s descriptions and the latter's fine illustrations, **Schr.**) dürfte trotz seiner Grösse doch wohl nur als ein riesiges Exemplar von *Castor fiber* anzusprechen sein. Dagegen erweisen sich die unter dem gleichen Namen beschriebenen Stücke aus dem englischen und französischen Diluvium als eine selbständige Species."

The skull has belonged to an older specimen than the one from Taganrok, and is about the same size, as I was able to ascertain from measurements made on the beautiful plaster-cast that I was privileged to receive from Paris. Only the length of the row of teeth is notably greater on the Russian skull, while the dimensions of the region before the orbita cannot be compared as this is missing on the French skull.

Another 30 years later NEWTON (1892) published the third skull of *Trogontherium* [1]), one from the Forest Bed of East Runton, near Cromer. This skull (partly reproduced on Pl. II, fig. 4 of the present treatise) is appreciably smaller than the Russian specimen, as appears from NEWTON's comparison, and lacks, like the two earliest known, the nasal bones and the zygomatic arches, while, moreover, it is damaged on the muzzle and the pterygoid region.

NEWTON, who had the use of a plaster-cast of the Russian skull and of the grinding surface of the teeth rows of the French one, came to the conclusion, after a most careful comparison, that all three skulls belong to the same species, and must thus be named *Trogontherium cuvieri* FISCHER.

Besides these three specimens but few fragments of skulls have been found: in the Forest Bed some portions of upper jaws with cheek-teeth and a few incisors, earlier described by OWEN (1869), and some pieces of less value, such as a fragment of the premaxillary (NEWTON, 1882), in which one incisor is still in place.

The length of the skull from East Runton in 133 mm., measured from the basioccipital between the condyles to the point between the incisors. In adult beavers this measurement averages 135 mm. in the recent animal from the Elbe, as well as in the fossil skulls from the peat of England and in the one in the TEYLER Museum, from the peat in the moat round the ruins of Brederode Castle, near Haarlem.

The width of the skull of *Trogontherium* is not known, as the zygomatic arches on none of the three classic skulls have been preserved.

The length of the skull of *Castoroides* is given by MARTIN (1912) as 270 mm. (greatest length from tip of nasals to occipital condyle), and by WOOD (1914) as 280 mm. from occipital angle to forward end of nasals. This dimension in *Castor* varies between 140 and 145 mm., and the width across the zygomatic arches is 105 mm. on an average. WOOD gives for *Castoroides* 230 mm., but WYMAN (1846) 180 mm., which is more in accordance with the illustrations given of some skulls.

---

[1]) For the use of the name of *Trogontherium*, see page 101.

Castoroides, therefore, has certainly more title than *Trogontherium* to the name of Giant Beaver, as it is not merely larger, but at the same time, as we shall further see, resembles the beaver considerably more in the form of its skeleton.

The knowledge of the skull of *Trogontherium*, as we saw above, requires some supplementing, which the numerous, though unfortunately never large, fragments from the Teglian Clay and a portion of a skull from Mosbach can supply.

Among the former there are a pair of premaxillaries which show on the right side (Pl. I, fig. 2) an uninjured contour of the ventral border of the nasal orifice and of the remainder of the incisor. Also fragments of the whole zygomatic arch, of the cranial base and of some nasal bones were found in Tegelen. A fragment from Mosbach is highly remarkable as regards the base of the cranium, which differs from that in the specimens from Tegelen.

NEWTON's description of the English skull is most exact and very detailed, and is completely applicable to the numerous fragments from Tegelen.

Nasalia. (Pl. I.)

The Haarlem collection possesses the anterior portion of a left nasal bone (fig. 1) which is broken off longitudinally at the outer side, so that neither the real length nor the width of this bone can be measured. The width may be deduced, however, from the cavity exposed dorsally between the premaxillaries (fig. 2*d*). The total width of the nasals in the middle, where this is the greatest (in contrast to *Castor* where the greatest breadth of the nasals lies further forward), is then about 35 mm.

The length, on the specimens of *Trogontherium* from Tegelen, will have been about 60 mm., thus less than in the European beaver where, according to VON REICHENAU (1912), this dimension is frequently 64 to 66 mm.; the same measurement is found in the beavers from the peat-land. On the smaller skull of the Canadian beaver the nasal bones are also relatively shorter and seldom more than 46 mm. long.

The nasals of *Trogontherium* are also relatively rather shorter than in the European beaver; the naso-frontal suture lies hardly further back than the fronto-premaxillary suture, as is distinctly shown by NEWTON's illustration (1892), as also in fig. 4 of the present publication, where the oral boundary of the frontals is most perfect on the left side. We find here, thus, a remarkable resemblance to the American beaver, where **Brandt** (1855) noted this feature as being a point of difference with the palaeartic beaver, illustrating it with several figures. **Von Reichenau**, after many measurements, arrives at the same result, namely, that the beaver skulls from both regions can be recognised at the first glance by the form of the naso-frontal suture being U shaped in the European beaver, caused by the rather long nasals penetrating between the frontals.

The anterior border of the nasal bones of *Trogontherium*, in so far as this has been preserved, is the same as in *Castor*; medially it projects in a blunt point. The thickness of the bone on the symphysis is 6 mm.; towards the side it becomes thinner and bends slightly over downwards. Like the mandibles and the premaxillaries, the nasals also continue to grow during life, so that the proportions between the anterior and the posterior part of the skull constantly change.

Ivor Montagu (1924) drew attention to this fact in his description of several beaver skulls from the peat deposits of Cambridge.

Premaxillae. (Pls. I, II.)

As these robust bones of the muzzle have been found in great number in the Teglian Clay, we are enabled to obtain a more correct idea of the ventral boundary of the nasal orifice (Pl. I, fig. 2) than was possible from the three classic skulls.

With regard to the premaxillae of the English skull, **Newton** (1892) writes that the cavity exposed by the absence of the nasals is about equally long as in *Castor*, but that the premaxillae are relatively shorter, because they do not extend, as in the latter animal, slightly behind the maxillary buttress, but end before the orbita almost on a line with the nasals.

Newton further mentions that the premaxillae are more strongly developed in accordance with the powerful incisors. As these teeth continue to grow during the whole life of the animal, the arch of their sockets, too, becomes wider and wider, and thus we see a great increase in the length and height of this region.

In front of the snout (fig. 2*b*), the premaxillae show a vertical, rough, triangular area between the nasal orifice and the alveoli of the incisors. The upper portion is cut off by a transversal groove, and forms two tubercles which stand out on the bottom of the nasal aperture, so that this does not run to a point ventrally, as in *Castor*, but is broad, with a small pointed notch in the middle. *Castoroides* also has a "more quadrangular nasal orifice" (WYMAN, 1846).

If we bear in mind that this area is the place of attachment for the elevator muscle of the upper lip, we may assume that this was a very powerful one; the lip may perhaps have been an organ of routing.

Comparing NEWTON's (1892) fig. 3 with fig. 2*a* of the present publication, it is noticeable that the contour of the nasal orifice in the Berlin specimen from Tegelen, as indeed in all other fragments from the same locality, differs still more from the beaver muzzle than does the English skull in the drawing. For the height of the premaxillae measured at the anterior end of the incisiv foramina is more considerable (appr. 37 mm.) than in *Castor*, where I found an average of 33 mm., while in NEWTON's illustration I measured only 27 mm. at this place. Also the length of these bones, measured at the height over the infraorbital foramen as well as quite dorsally, is greater on the Teglian fragments and likewise on the Russian skull. The distance between the incisiv foramina (NEWTON's palatal foramina) and the point between the incisors is, according to the latter author, 30 mm. on the English skull and 44 mm. on the Russian; on the premaxillae from Tegelen this dimension is about 38 mm.

The plate of bone separating the alveoli of the incisors has most probably been broken off on the English skull. The anterior profile line of the muzzle projects slightly forward ventrally on the fragments from Tegelen. The height of this line on the Berlin specimen (fig. 2) is 38.7 mm. and about 10 mm. higher than that in NEWTON's illustration.

The dimensions given by this author for the width of the premaxillae, viz. oral: 38 mm. and aboral: 43 mm., agree with those on the Teglian fragments.

Viewed from below, the premaxillary bones present the following points of difference with those of *Castor*: they are broader, especially anteriorly, and the longer incisiv foramina do not lie, as in *Castor*, about the middle of the diastema, but their distance from the alveolar border of the incisors, particularly in the older specimens, is nearly double their distance from the premolars. The premaxillo-maxillary suture lies just in the middle of the foramina, in *Castor* at their posterior end. Further, it may be mentioned that the ventral contour line is much less convex than in this animal, as the powerful incisors form segments of a much larger circle and their shafts are thus less curved. The dorsal profile line differs widely from that seen in the beaver in the angle (nearly 90°) with which it bends over downwards behind the nasal orifice and in the above-mentioned tubercles at the base of this opening.

It is just the injury to this profile, so characteristic of *Trogontherium*, which creates the strong resemblance between the English skull and the beaver's, a resemblance further accentuated by the ventral portion of the interdental septum being broken off.

The premaxillary region is relatively most developed in *Trogontherium*, rather less in *Castoroides* and still less in *Castor*; in *Steneofiber* this region is the narrowest and shortest in comparison with the other portions of the skull. In the last-mentioned, as well as in *Palaeocastor* and in *Euhapsis*, the portion of skull situated behind the row of teeth is nearly as long as that lying before it. In *Castor* this proportion is as 3 : 4, in *Trogontherium* from the Forest Bed and in WYMAN's *Castoroides* as 5 : 8; in *Castoroides ohioensis* of MARTIN as 4 : 7, and in the Russian skull of *Trogontherium* as 5 : 9. In *Palaeocastor fossor* PETERSON the premaxillary region is relatively broader and shorter than in all the European castorids. In *Euhapsis platyceps* PET. the length is but slightly less than the width (PETERSON, 1905).

Maxillae. (Pls. I, II, III, IV, VIII.)

No perfect maxillary bone has ever been found yet. Usually its jugular buttress is broken off at the base, and the very thin region round the infraorbital foramen is much damaged. Therefore we cannot ascertain the exact size of this foramen, but it will not have been much larger than in *Castor*. What has been larger, however, is the strong plate of bone which projects on the lateral side to beyond the foramen (Pl. I, figs. 2*a*, *c*, 3, 5*b*; Pl. II, fig. 5).

This place, indicated in *Castor* merely by a ridge, serves for the attachment of the retrahens muscle of the upper lip, which, in *Trogontherium*, has been as extraordinarily strong as the elevator muscle.

In *Castoroides* there is no indication of any ridge, and the foramen does not lie on the premaxillo-maxillary suture but behind it.

In *Trogontherium* the concavities in front of the premolars are separated from each other by a median crest with two longitudinal grooves. These grooves, the sulci palatini, indicate the course of the palatal blood-vessels and nerves; they run from the small foramina on the anterior boundary of the palatine bone forwards along the maxillae as far as the incisiv foramina. These foramina (= palatine foramina NEWTON) are formed in *Castoroides*, as in *Castor*, *Euhapsis*, *Steneofiber* and *Palaeocastor*, almost entirely by the premaxillaries, and lie at the same place as in the beaver. In *Castoroides* they are conspicuously small. In *Trogontherium* they are much nearer to the premolars than to the incisors and are formed almost wholly by the premaxillae. The three skull fragments from the Mosbach Sands exhibit the peculiarity that these grooves do not continue so far forward, but terminate before the foramina, where the median crest ends in a point (Pl. II, fig. 2).

As in the beaver the orbita is not bounded ventrally; GERVAIS' figure shows this very clearly. The sharp boundary of the eye-socket in the English illustration must be due to some injury to the object.

The jugular process of the maxilla (Pl. I, figs. 3, 5) is at the root broad and thick, and, as FISCHER has already mentioned, lies considerably higher up than in *Castor*. The sharp ventral border continues to the alveolar border between the premolar and the first molar in *Castor*, *Steneofiber* and *Palaeocastor*; it does not do so in *Trogontherium* and in *Castoroides*. The transversal arch, seen from the front, is higher (fig. 5*a*) than in the recent animal where the buccinator muscle has a large place of attachment there. In this respect the American beaver resembles *Trogontherium* more than the European form does.

As the teeth will be described later, attention will be drawn here merely to the place and form of their alveoli. The angle made by their rows (Pls. II, VIII) averages 40°, in *Castor* 30°. The length of the row varies in the Teglian jaws from 37.4 to 39.0 mm., and on the skull fragments from Mosbach in the Mainz collection it is 40 mm. and 41 mm., while on the maxilla from Mosbach in the collection at Darmstadt the row measures 41 mm. NEWTON gives for the Russian skull 44 mm., for the English one 38 mm. In the beaver from the peat this dimension is 34 to 35 mm., being the same as in the adult Elbe beaver. VON REICHENAU measured ten recent beaver jaws where the length of the rows varied from 25.6 to 36 mm.

The collection at Steyl contains some maxillae from which the teeth could be easily removed. A left upper jaw with teeth is shown in Pl. VIII, fig. 10, and the same jaw without teeth in Pl. I, fig. 6.

Every alveolus shows in the outer posterior angle a small, round and deep hole, separated from a broad anterior cavity by a thick wall that protrudes into the latter slightly, whereby its cross-section appears kidney-shaped.

The outer extremity of this cavity is, in the two first molars, frequently separated from a larger inner part by a short sagittal septum, so that two round holes lie behind each other on the outer side of the socket. In the socket of the last molar, with its large antero-posterior dimension, another larger hole occurs quite behind.

The protrusion of the open pulp cavities of the grinders into the temporal fossa, sometimes so pronounced in young beavers, I have never found in any *Trogontherium* specimens; the maxillary bone here is thicker and the temporal cavity less deep. Another reason, however, is that the greatest curvature of the teeth in *Castor* lies in the transversal plane, in *Trogontherium* in the sagittal plane. (Cf. figs. 35—38 on Pl. VIII.) On many jaw fragments of *Trogontherium* from Tegelen some teeth pierce the walls of the nasal cavity, so that the vertical plates of the maxillae show three small oval orifices through which a small part of the inner surface of each of the three first cheek-teeth is to be seen. This is never the case with the last molar, as it is much shorter and less convex on the inner side. On older jaws, where the sockets are partially filled up, nothing is to be seen of this penetration of the maxillae, either from the outside by the three hindermost teeth, as in *Castor*, or from the inside by the three front teeth, as in *Trogontherium.*

The ductus naso-pharyngeus in *Castor* is long, high and narrow, towards the front narrower than behind, and below slightly wider than above where the roof is formed by the narrow corpus of the presphenoid. On the floor a median ridge, less than 1 mm. in height, runs along the maxillar portion, but not over the palatinum. The same conditions are to be found in *Trogontherium* from Tegelen. As that locality, however, has yielded no presphenoid, neither the height of the passage nor its width superiorly can be determined with exactitude, as the vertical, slightly concave walls formed by the maxillae are very thin at the top and have been broken off. The maximal width of the passage (Pl. IV, fig. 5) in front is 8 mm., and it increases gradually to 12 mm. at the level of the posterior border of the palatine. The height under the anterior point of the presphenoid will have been about 18 mm., against approx. 15 mm. in *Castor*; posteriorly the passage becomes a little lower.

To my astonishment I found on the large fragment of skull from Mosbach, in the Mainz collection, a different form of this naso-pharyngeal passage. Frontally (Pl. IV, fig. 1), between the sockets for the incisors, the passage is narrow, more so than in the Teglian specimens, while towards the roof, where it comes out above these sockets, it broadens to 9 mm., and is closed by the upper portion of the maxillae from both sides coming in contact with each other and being covered there by the ventral part of the strongly pneumatised presphenoid. Behind this comparatively narrow entrance the passage widens to a space 24 mm. wide and 18 mm. high, which is slightly subdivided by three vertical ridges on the side walls. The two front ridges are short, low and rounded off, and are caused by the two front teeth of each side bulging out slightly, although they do not pierce the wall, as we observed in the Teglian jaws. The posterior pair of these ridges, in the upper part of which the third molars are enclosed, is the strongest, and towards the floor of the passage (*i. e.* where there is no further connection with m^3) they almost meet each other. The space between this pair of side wings is not more than 12 mm. wide, the same width, as we have seen, at the widest portion of the passage in the fragments from Tegelen.

From the roof of this wide naso-pharyngeal cavity there hangs on each side of the median line a lobed longitudinal ridge about 11 mm. long, which is probably part of the maxillae (Pl. III, fig. 1).

On the floor of the passage runs a median ridge which (Pl. IV, fig. 1) is a few millimetres high quite in front, but gradually lessens backwards until it disappears altogether, immediately before the posterior pair of side wings. A few millimetres still further back, the ridge arises anew on the palatinum, and grows gradually higher, to disappear again in the posterior border of the palatine bone.

This low median crest on the palatinum, and also the wide naso-pharyngeal cavity with its transverse contractions and its peculiarly formed roof, are typical of the skull fragment from the Mosbach Sands. Unfortunately, on only one fragment from this locality has this part of the skull been preserved. The fragment in the Wiesbaden collection lacks the palatinum, while the naso-pharyngeal cavity is so much damaged that only the two anterior contractions are to be seen on it, caused, as is plainly to be seen here, by the convex inner sides of the premolar and the first molar.

In describing the basis of the brain-case, we shall find still more differences between the skulls of the animals from these two localities. I will merely point out here that the considerably greater width and height of the maxillaries from Mosbach is also evident if the skull fragments be viewed from the front (Pl. IV, figs. 1, 5), where distinct remains of maxillo-turbinated bones lie above the deep circular concavities formed by the bottoms of the incisor shafts. In the Teglian specimens where these holes are less deep, there is on each side only one shallow concavity, which may be from a turbinated bone.

The sudden narrowing of the ductus naso-pharyngeus round the posterior nares (Hay's "lower posterior nares" in *Castoroides*, 1914), caused by the very peculiar position of the pterygoid plates, will be discussed in the description of the basisphenoid.

Palatinum. (Pls. II, VIII.)

The palatinum, as NEWTON indicates, is not so pointed in front as in *Castor*, for it stretches hardly further forward than the anterior palatine foramina on the posterior boundary of the maxillae. These foramina are extremely small in *Trogontherium*, in contrast to the extraordinary size of the posterior palatine foramina, which were not easily identifiable as such on the English skull by NEWTON who denied their presence in *Castor*. Although small, they are nevertheless distinctly visible in all beaver skulls on the maxillo-palatine suture behind the last molar. They are also drawn in OWEN's illustration of the beaver skull in "British Fossil Mammals and Birds." In *Castoroides* these foramina are likewise larger than in the beaver, but relatively smaller and narrower than in *Trogontherium*. In the latter, where the grinding surface of the last molar is very long, the foramen lies on the inner side behind this molar, and leads into a wide, very short canal that runs straight upwards, and the anterior wall of which is formed by the maxillary, the posterior wall by the horns of the palatine projecting outwards. This canal (which in *Castor* is very slender) has its other opening, on the Teglian fragments, inward of the place where the pterygoid process of the alisphenoid adjoins the maxilla, *i. e.* quite at the back of the orbito-temporal fossa.

The posterior border of the palatinum is another instance of a typical difference between the Teglian and the Mosbach animals, the latter of which agree with the description and illustrations of the Russian skull of *Trogontherium*. This border, in the last-named animals, shows one median notch between the bases of the pterygoid plates which, on all the fragments, are broken off. The two skull fragments from Tegelen, on which this palatine border is fairly well preserved, exhibit two smaller notches separated by a flat process a few millimetres in width (Pl. II, fig. 5).

This feature and the absence of the dorsal ridge on the floor of the ductus naso-pharyngeus are characteristic of the palatine of the Teglian specimens.

The French skull, in GERVAIS' illustration of the ventral side, exhibits a posterior border of the palatine as is seen in the Russian skull (Pl. II, fig. 1), only somewhat broader. It seems to me, however, judging from the plaster-cast, that the palatine border of the French skull bears more resemblance to that on the specimens from Tegelen (Cf. Pl. II, figs. 5 and 6). The illustration of GERVAIS is, moreover, not quite correct as regards the measurements; NEWTON (1902) has already remarked on this.

In *Castor* (Pl. III, fig. 10) the concavity of the posterior border is also interrupted in the middle, but here by a spine, the extremity of a median ridge occurring here on the ventral side of the palatine.

The skull fragment from Mosbach shows very clearly how the vertical plates of the palatine are connected posteriorly with the remarkable pterygoid plates to be described later. Whether, as HAY (1914) has mentioned of *Castoroides*, these palatal plates unite dorsally and adjoin each other to form part of the walls and roof of the wide naso-pharyngeal cavity, as the maxillae do on the anterior end of this cavity and the united pterygoid plates quite posteriorly, is not certain. If such might be the case, they would form but a very small section between the large parts formed by the maxillae and the pterygoid plates. (? on fig. 2, Pl. III).

The posterior notch of the palatine in *Castoroides* lies still further forwards with respect to the hindermost molars than in *Trogon-*

therium. The large posterior palatine foramina also occur in the Giant Beaver, but are narrower and more elongated. In respect to this region of the skull, *Palaeocastor* and *Steneofiber* agree completely with *Castor.*

Basisphenoid and pterygoids. (Pls. II, III, IV.)

The pterygoid processes in all the skulls of *Castor* that I have seen, even in the youngest of them, are so completely anchylosed with the basisphenoid that no trace of a suture is to be seen. I observed on the fragments of the cranial base of *Trogontherium* a similar ossification between these bones.

In the skull from West Runton (Pl. II, fig. 4) the basisphenoid is almost entirely covered by the hard sandy matrix, while in the two other classic skulls this interesting portion is badly damaged (Pl. II, figs. 1, 6).

On the two isolated basisphenoid bones from Tegelen (Pl. II, fig. 7; Pl. III, figs. 4, 5) only the posterior half is uninjured, the anterior half is broken off like the pterygoid processes. Among the sparse specimens of *Castor* from the same locality, I happened to find also a basisphenoid similarly damaged (Pl. II, fig. 8), which rendered a comparison easy. In comparing the ventral surfaces (Pl. II) of the basisphenoids of both animals, we see that in the extinct animal the corpus of the bone lying between the bases of the pterygoid plates is narrower and that these bases extend further backwards, so that the foramina in them, which are so large in *Castor*, must have been much smaller here. The dorsal surface of the basisphenoid (Pl. III), in the posterior half of which in *Castor* a sharply defined fossa hypophyseos lies, is in *Trogontherium* slightly concave, the anterior half rather convex; there is no indication of a hypophyseal fossa here. On both sides lies a very broad ala temporalis, on which clear impressions can be seen of the carotis interna running on the inner side, separated by a short ridge from the much broader outer portion of the wing for the very strong maxillary and mandibular ramifications of the trigeminus nerve. If the basisphenoid be viewed from behind, it will appear that the posterior surface adjoining the basioccipital bone consists of a right and a left half, separated by a slight median groove. The complete fusion with the basioccipital, stated by WYMAN in *Castoroides,* certainly did not occur either in *Trogontherium* or in *Castor*. The length of the basisphenoid in *Castor* averages 26 mm.; on none of the three isolated basisphenoids from Tegelen can this dimension have been more than 22 mm.

Fortunately no great injury has been done to the skull fragment from Mosbach, in the collection at Mainz. On this I was able to clear away the sandy matrix from the basisphenoid and the bases of the pterygoid plates, and observed in these bones a highly curious situation. I found, namely, a different form of basisphenoid (Pl. III, figs. 1, 2 and Pl. IV, figs. 1, 2), which is also considerably larger than this bone from Tegelen, its length being 27 mm. This basisphenoid, which is pierced by a canalis transversus, shows only the normal thickness in front and behind, where it adjoins the presphenoid and the basioccipital. In the middle it must have been merely a bony lamel, as thin as paper, and broken away now in the object (Pl. III, figs. 1*c*, 2; Pl. IV, fig. 1*c*), but there may also have been a foramen (as HAY (1914) described of *Castoroides*), which in the living animal was probably closed by a membrane forming the base of the brain-case there. In this way a very large cavity is formed ventrally in the basisphenoid, which reminds us of a similar deep and sharply defined ventral hole in the basioccipital of the beaver.

Whether the form of the basisphenoid of the *Trogontherium* skulls from Russia, France and England resembles that of the skulls from Tegelen or of those from Mosbach is not known; none of the authors mention anything about this bone. The French and English skulls, as aforesaid, are damaged on the cranial base; the Russian skull much less so, but, just when the skull is uninjured, it is impossible to see the ventral surface of the basisphenoid, as it is hidden from view by the peculiar position of the pterygoid plates (Pl. II, fig. 2).

These plates have been described by FISCHER (1809) as follows, with respect to the skull from Taganrok: "Les os palatins ne peuvent être distingués, étant couvert de sable quarzeux, mais leur union avec le sphenoide par une arête très élevée est très remarquable. On la consideroit comme une continuation du vomer, si elle ne prenait pas son origine des ailes palatines qui se réunissent et forment une éspèce de bassin ou de vestibule du trou palatin postérieur." The illustrations given by FISCHER and ROUILLIER (reproduced on our Pl. II, fig. 1) of the cranial base of the Russian skull agree entirely with our photo of the Mosbach fragment (Pl. II, fig. 2).

But here the basioccipital is missing, as well as the outer plates of the pterygoids; the inner plates are partially broken, so that the form of the wide pterygoid fossae can only be determined approximately.

The approach and contact of the inner pterygoid plates in the median line whereby, besides the choanae, another opening on the cranial base behind and above the latter is formed, does not occur in any recent animal and, as far as I am aware, has been described of only one extinct animal, viz. *Castoroides*. Fortunately a fair number of skulls and skull fragments of this animal have been found, so that this peculiar part of the skull could be studied by several authors (WYMAN, 1847, MOORE, 1890, MARTIN, 1913 and HAY, 1914). HAY's description, as being the most detailed, follows herewith:

"The most remarkable structure in the giant beaver is found in the hinder part of the nasal chamber, which is divided into two distinct passages, an upper and lower. There is nothing of the kind found in the beaver. The distance between the roof of the nasal chamber (formed by the basisphenoid and presphenoid) and its floor (formed by the palatines and maxillae) had become much higher than in the beaver, relatively twice as high, being 40 mm. or more. In the specimen already mentioned as belonging to the American Museum of Natural History, this chamber is 60 mm. high. Just in front of the basioccipital is found the hinder opening of the superior nasal passage, rising in the basisphenoid and passing forward. The hinder part of this passage opens, in the skeleton, into the brain-cavity; but was, in life, shut off from it by membranes. The hinder opening of the lower passage is at a lower level and further forward.

"All the changes in this region appear to have come about in order to accommodate the development of the large internal pterygoid muscles, which had their insertion in the pterygoid fossae. In the beaver these fossae are small; in *Castoroides* they are enormous, each having a transverse diameter of 23 mm., a horizontal extent of 67 mm., and a height of 32 mm. In front, the hinder end of the palatine has been deeply excavated; behind, the pterygoid fossa has encroached on the anterior end of the auditory bulla. The external pterygoid plate grew outward and backward, so as to lie outside of the hinder end of the alisphenoid canal and the foramen lacerum anterius.

"To accommodate further the internal pterygoid muscle, the internal pterygoid plate was pushed inward, so that it came into contact with the one of the opposite side at the middle of the height of these plates. In this way the hinder end of the nasal passage was constricted into an upper and lower passage.

"As already stated, the upper passage opens out posteriorly by a horizontal, pear-shaped opening just in front of the basioccipital. The length of the opening is about 25 mm.; its width is 16 mm. The hinder opening of the lower passage is triangular in shape and is bounded in front by the palatine; at the sides by the internal pterygoid plates. Behind the molar teeth the partition between the two passages is, as already stated, formed by the inner pterygoid plates. In front of these the partition is continued by ascending plates from the right and left palatine bones, which plates touch at the mid-plane. Still in front of these, the right and left maxillae come into contact and continue the partition somewhat further forward. The upper ends of the molars of the opposite sides are here very close together. Finally, just behind the bases of the upper incisors, the inner walls of the maxillae part and permit the lower canal to rise into the nasal cavity, meeting here the anterior end of the upper canal."

The first part of this description, except, of course, for the larger dimensions, might have been written of *Trogontherium cuvieri* from Taganrok and Mosbach. Here, too, are two openings occasioned by the uniting of the internal pterygoid plates, here too, the upper posterior orifice (HAY's "nares"), 6 mm. wide, rises into the corpus of the basisphenoid, being most probably shut off from the brain-case merely by a membrane. I cannot judge from the skull fragment from Mosbach if HAY's description of the continuance of the upper passage forwards also applies to *Trogontherium,* as the floor of the brain-cavity in front of the basisphenoid is missing on the object. Here the presphenoid has been broken off horizontally through the large transverse foramen, exposing HAY's "superior nasal passage", which, on the suggestion of Professor MAX WEBER, may be termed "ductus pneumaticus cranii". This ductus will be discussed further in the description of the presphenoid.

HAY's illustrations of this region in *Castoroides* are not particularly good. The best idea will be obtained if MARTIN's (1912) figure of the ventral side of the skull, reproduced on our Pl. V, fig. 3, be studied together with the excellent illustration of the posterior side by MOORE (1899), reproduced on our Pl. IV, fig. 4. In the views of these uninjured skulls nothing, as a matter of course, is to be seen of the front portion of the double passage, but the openings of the "upper and lower posterior nares", as well as the wide pterygoid fossae, are plainly visible. If these two figures be compared with the illustrations of the ventral and posterior sides of the Russian skull of *Trogontherium*, as is shown by ROUILLIER (1847) in his Table 5, figs. 2 and 4 (the former of which is reproduced on our Pl. II, fig. 1), the resemblance will be found to be striking. In fig. 2 of ROUILLIER the posterior opening lies somewhat too far back, but I consider this, with NEWTON, as caused by "an injudicious clearing away of matrix".

In *Trogontherium* the passage narrows rapidly in the anterior part of the basisphenoid. Here there seems to lie a typical difference from *Castoroides*, regarding which MOORE (1890) writes: "The upper channel has much the greater capacity for admitting air. The lower opening narrows rapidly forward until the right and left walls are scarcely more than a line apart." In *Trogontherium* from Mosbach the ductus naso-pharyngeus (HAY's lower channel) remains wide, as can be seen on Pl. IV, fig. 1*b*, where the triangular posterior opening is visible through the anterior opening. How narrow the ductus pneumaticus cranii becomes is shown in fig. 1*a*, where, through the foramen in the roof of the basisphenoid a small pear-shaped opening can be seen less than one millimetre wide, caused by a slight divergence of the adjoining pterygoid plates which form the floor of the wide cavity in the basisphenoid. This narrow "pneumatic" channel runs on forwards under the place of junction of basi- and presphenoid, and opens into the wide foramen in the presphenoid which, thus, like the basisphenoid, is strongly pneumatized (Pl. III, figs. 1, 2).

It is to be regretted that no large skull fragments have been found in the clay of Tegelen. As far as we know at present, the animal from this locality differs vastly from the Russian and Mosbach types by reason of a basisphenoid resembling rather that of the beaver. My doubt as to whether the three isolated basisphenoids from Tegelen had belonged to *Trogontherium*, was dissipated completely when I found in the collection at Haarlem, as well as in that at Vechta, a larger fragment of the alisphenoid still united to a portion of a basisphenoid (Pl. II, fig. 9) identical with the isolated specimens. I have met with still more fragments of the alisphenoid united to the squamosal, which prove convincingly that all these bones belong to the same species. That this difference in the form of the cranial base is not the only one between the animals of both localities we shall see in comparing the jaws with their incisors and teeth.

The cast of the French skull fragment induces me to think that its cranial base has much in common with that of *Castor* and of the Teglian *Trogontherium*.

The alisphenoid in *Trogontherium* from Tegelen is thicker than in the beaver and lies more obliquely on the cranial wall. It is pierced longitudinally by a distinct alisphenoid canal (Pl. II, fig. 9), about 15 mm. long and 3 mm. wide. This channel has also been mentioned by HAY (1914) of *Castoroides* and by PETERSON of *Palaeocastor fossor*. In many beaver skulls a broad and very short channel can be seen, that has its exit on the outer side of the external pterygoid plates and, according to TULLBERG (1899), may be considered to be the alisphenoid canal.

Presphenoid. (Pl. III.)

The exact form of this skull bone cannot as yet be established for *Trogontherium*, as it is to be seen only on the fragment of the Mosbach skull, where it is not complete. For this skull fragment is broken off through the brain-case and just through the large elongated foramen (plainly visible in GERVAIS' figure of the side view of the French skull) lying between the cranial and the maxillary portion of the skull. At the place of this large foramen, which pierces the skull transversely, there lie in the beaver (Pl. III, fig. 3) a series of smaller foramina which are as many perforations of the presphenoid. In *Trogontherium* the presphenoid (Pl. III, figs. 1, 2) consists of a posterior portion, perforated transversely, adjoining the basisphenoid. From this posterior portion a thin plate of bone stretches out ventrally forwards covering the united maxillaries. On the object the dorsal part of the presphenoid, which must have formed part of the bottom of the brain cavity, is missing; the fracture surface lying immediately before the basisphenoid is plainly to be seen in fig. 1c on Pl. III.

The ductus pneumaticus cranii opens into the wide foramen of the presphenoid; this name is to be recommended since the holes in both basisphenoid and presphenoid are parts of this passage, which performs in a very peculiar manner the pneumatization of these bones; bulging out from the nasal chamber, it will have been coated with its mucous membrane in the living animal.

It would be very desirable if the presphenoid on the skull fragments of *Castoroides* were subjected to a minute examination; up till now this bone has not been referred to by any of the American authors. Since the similarity with *Trogontherium* is great, as regards the posterior portion of the cranial base, it would indeed be curious if, in *Castoroides*, the upper passage ran beneath the presphenoid, while in *Trogontherium* it runs through this skull bone.

Petrotympanic and occipital. (Pl. IV.)

The petrotympanic has been preserved in numerous specimens, owing to the stoutness of the periotic. The preserved fossil bone complex consists as a rule of periotic (mastoid and petrosal) and tympanic, but sometimes exhibits between the external auditory meatus and the mastoid a posttympanic process of the squamosal.

In fig. 15 the fracture of the squamosal passes anteriorly through the postglenoid foramen, situated a little behind the jugal buttress. The foramen lying in the squamosal at the same level, but further back against the mastoid, leads into the same venous canal (canalis temporalis). In *Castor*, where the glenoid fossa lies more to the front, the postglenoid foramen also lies at a greater distance from the occiput. The form of the posttympanic process is variable, as can be seen from a comparison of fig. 14, where it is long and ends in a point, with fig. 15, where it is short and broad. Against the petrotympanic shown in these figures, there lies a portion of the occipital with one condyle.

A similar complex of bones was found at Mosbach together with the large skull fragment described above. The posterior foramen in the squamosal is very large here: 6 mm. high and 3 mm. broad, and the bulla slightly more inflated than in the Teglian specimens. The Geological Institute at Utrecht possesses a pair of petrotympanics of *Castor fiber* from Tegelen, which, as they form a similar bone complex, are of great use for purposes of comparison.

The tympanic region is very distinct in NEWTON's illustration of the side view of the skull from East Runton; the occiput of the French skull is best reproduced.

Besides the lesser inflation of the tympanic bullae (Cf. figs. 11*b*, 13), their wall and that of the external auditory meatus is much thinner than in *Castor*, especially on the inner side.

In twelve petrotympanics of *Trogontherium* preserved in the various collections, there was not one which had not a gap in the bulla in immediate proximity to the inner tympanic ring, or on which the outer wall of the auditory passage was not broken off about a centimetre above this gap (fig. 17). The bulla ossea in *Castor* is, according to VAN KAMPEN (1905), internally furnished with some low ridges, among which a couple of very short ones radiate from the tympanic membrane; moreover, small "zapfenförmige" osteophytes occur here and there.

Also in the bulla of *Trogontherium* I found indications of some ridges which, however, have been broken off at their base. In both animals the ostium tympanicum tubae has its exit in the styliform process, and the short tuba ossea is formed by the tympanic only.

Besides the faint ridge along the external auditory meatus, another constant point of difference with the bone complex of *Castor* must be mentioned, *viz.* a very wide venous canal beginning with a foramen on the cranial base just before the tympanic bulla, and just behind the large foramen lacerum anterius. It runs upwards and backwards behind the auditory meatus, to bend downwards just at the place where the posterior foramen in the squamosal lies and, covered by the posttympanic process of this bone, reaches the occiput, making a deep round notch (fig. 12), or a foramen, in the border of the mastoid. In fig. 17 the canal lies partially open, as the squamosal process is missing. The further course can be easily followed on the occiput (figs. 6, 7, 8). The groove first bends inwards, then with a right angle obliquely downwards, and reaches the inferior border of the skull at the outer side of the condyle. Where the occiput is not injured this groove is partially covered by the bony scale of the mastoid, so that two foramina are formed (fig. 7), one on the border of the mastoid and one inwards of this, where the course of the canal makes the right angle above-mentioned. Both foramina, as well as the groove, are distinctly to be seen in GERVAIS' figure 3.

The English skull appears to be damaged on the occiput; it is not clearly defined in the figure.

This venous canal, connected with the canalis temporalis, is conspicuous in *Trogontherium*, but is faintly developed in *Castor*; I did not observe it until I found on the petrotympanic of this animal from the Teglian Clay a foramen perforating the mastoid on the border, exactly as we saw in the extinct animal. On a beaver skull from the peat, and on the recent skulls, I found no foramen at that place, but a notch on the masto-occipital suture, giving the occiput the ordinary three-lobed form. Where the notch is bridged over, so that a foramen results, as in *Trogontherium* and in some beaver skulls, the occiput is more regularly rounded, as is shown in GERVAIS' illustration of the French skull.

In *Castor* the outer foramen on the occiput lies higher than the inner one; in *Trogontherium*, on the contrary, lower down, in the middle of that portion of the mastoid not covered by the occipital scale.

NEWTON could not see how far the occipital on the skull from East Runton extended outwards, and suggests that perhaps the mastoid might have been entirely excluded from the back of the skull, or, and this supposition is correct, that it extends as far as the large inner foramina, as it does in *Castor*, where these foramina, however, are quite insignificant.

In fig. 7 the occipital scale is broken off above and outwards of the venous groove, but from the peculiar roughened surface of the mastoid above and below the inner foramen, the extent of the occipital bone can be traced to the supraoccipital crest.

As regards the form of the occipital, the difference with *Castor* is not very great. The occipital crest is also high here, anteriorly formed by the parietals and interparietal to half its height only (in fig. 10 to be seen from the roughness of the lower half of the crest).

The condyle on the Teglian fragments (figs. 7, 8) is narrower than in *Castor*, but on the fragment from Mosbach slightly broader (fig. 6). They do not converge so obliquely downwards; this character we shall find again on the articular surfaces of the atlas.

The form of the foramen magnum on the French and the English skull of *Trogontherium* is more triangular than in the beaver. In *Castoroides* (Pl. IV, fig. 4) it is a "depressed oval", and in *Steneofiber viciacensis* it is the same as in the beaver where, however, as growth continues, the width increases more than the height.

Half of a basioccipital is represented in the collection at Maestricht (Pl. II, fig. 10); the length at the median line is 18 mm.;

the length with the condyle is 27 mm. The form corresponds in the main to that of the English skull: a median ridge and a shallow excavation on each side.

In none of the other castorids does a large ventral concavity occur in the basioccipital, as is seen in *Castor* (Pl. III, fig. 10). In the form of this bone *Castoroides* and *Trogontherium* bear a great resemblance to *Steneofiber* and *Palaeocastor* (Pl. III, figs. 7*b*, 8*b*).

Besides by a more slender auditory bulla and the distinct traces of a wide venous canal, the petro-tympanic complex of *Trogontherium* differs from that of the beaver in the much smaller foramen situated in the inner wall of the petrosal (figs. 11*c*, 16) above the porus acusticus and leading into the fossa subarcuata.

The tympanic bullae in *Castoroides* (Pl. II, fig. 3) are still less inflated than in *Trogontherium*; in *Palaeocastor*, *Steneofiber* and *Euhapsis* they are as well developed as in *Castor*. In *Castor* and *Trogontherium* from Tegelen the bulla is furnished internally with several low ridges; ROMER and MC.CORMACK (1928) mention numerous "radial lamellae" in *Palaeocastor magnus.*

Squamosal and jugal. (Pl. I.)

With the above-described maxillary buttress, the jugal and the zygomatic process of the squamosal form the wide zygomatic arch, lying very high on the skull.

The Russian skull is the only one on which a small anterior portion of the arch has been preserved.

The outer surface of the zygoma does not look slightly upwards, as in *Castor*, but stands vertical (fig. 5*a*). The arch is wider, though somewhat more depressed. The height of the jugal bone (figs. 9, 10) is about the same; a very short, blunt postorbital process of this bone is generally well developed, just as in the fossil beavers, but never so pronounced as in *Castoroides*, *Euhapsis* and *Palaeocastor*. Behind its greatest height the jugal becomes suddenly very low, so that where it lies under the zygomatic process of the squamosal its height is not yet 5 mm., against 13 mm. in *Castor*; its thickness, however, is rather more. This proportion remains the same in the posterior bend of the zygoma; the root of the zygomatic process of the squamosal is very broad. On its ventral side lies the broad, shallow glenoid fossa, affording freedom of rotation to the lower jaw in every direction. As this glenoid cavity is somewhat longer than in *Castor*, the posterior bend of the zygoma, when viewed from above, is not purely concave anteriorly, but exhibits there a slight curve forwards, figs. 4, 7. Whether this glenoid fossa will have been sharply bounded outwards by a ridge formed by the posterior extremity of the jugal bone, as in *Castor*, is uncertain, because this portion is missing on the Teglian fragments.

The cranial portion of the squamosal consists of a very thin scale, which overlaps the lower border of the parietal almost as far as the sharp oblique ridge on this bone. The distance between the two squamosals is therefore very slight. In fig. 7, which represents a fragment of a rather young animal, this distance, measured at the level of the zygomatic process, is 22 mm., in fig. 4, 25 mm. In both specimens the thin border of the squamosal is broken off, but the roughened surface of the parietal clearly shows how far this bone has been covered.

In *Castor* the width of the parietals at the same place is about 40 mm., but becomes rather less posteriorly.

The variable form of the posttympanic process of the squamosal (supramastoid process) has already been alluded to in the description of the petrotympanic, as well as the position of both foramina connected with the venous cavity in the squamosal.

Parietal, interparietal and frontal. (Pl. I.)

As the animal grows older the place of origin of the temporal muscle extends more and more towards the median line, and thus the two temporal ridges, which converge backwards over the parietals, approach each other more and more, their curve disappearing entirely. It can thus be as well seen from the roof of the skull as from the grinding pattern of the teeth that the French skull is older than the English one, and that the fragment in the Weingärtner collection (fig. 4), where these ridges have completely lost their curved course, is older than that in the Berlin collection (fig. 7).

A point in which the skull differs from that of *Castor* is that these ridges in *Trogontherium* run on either side of a broader area which, even in the young animal, is completely flat, and meet each other on the interparietal bone not far from the occipital crest; in *Castor* this is the case only in very young individuals. There is never a long, sharp, sagittal crest in *Trogontherium*. If in older individuals a median ridge occurs on the short, broad interparietal (fig. 8), it is low and blunt, as can be seen in GERVAIS' and NEWTON'S figures, as also in our figures 7 and 8. Probably the temporal muscle was considerably less strong than in *Castor*, while the pterygoid muscle was very much stronger. The parietals are shorter than in *Castor*. NEWTON gives 56 mm., against 70 mm. in *Castor*. The lamina cribosa, the frontal boundary of the brain-case, lies just below the anterior point of the parietalis, their length is thus also the length of the brain-case, the width and height of which are but slightly greater than in *Castor*. Its capacity is thus absolutely less than in the beaver. Relative to the length and height of the entire skull with its powerful jaws in *Trogontherium*, the difference in brain capacity between the two animals is conspicuously great. The triangular, flat area above-mentioned, bounded laterally by the parietal ridges, is formed almost entirely by the long and broad frontals which end anteriorly against the nasals and premaxillaries in a straight suture which, on the English skull as well as on the Teglian fragment illustrated in fig. 4, is 52 mm. long. In *Trogontherium*, as also in the European beaver (LÖNNBERG, 1909) and in older individuals of the Canadian beaver, the frontal bone forms a blunt postorbital process, not occurring in any other castorid.

Castoroides (WYMAN, 1846; MARTIN, 1912) agrees with *Castor* in so far as the frontals are appreciably broader than the parietals.

Lower Jaw (Pl. V.)

In 1846, thus after FISCHER and CUVIER had described and illustrated the Russian skull, OWEN, in his "British fossil Mammals and Birds", made known the discovery at Ostend (Norfolk) of a right mandibular fragment, of which the ascending ramus is missing, and of a left one found at Cromer, both of which he refers to *Trogontherium cuvieri* FISCHER.

The three front grinders have been preserved in both the specimens and, in the first-mentioned object, the whole incisor, in the other the posterior half of it.

OWEN does not describe these fragments, but gives two good illustrations, and states that the distance from the condyle to the anterior border of the premolar is equal to the distance from this point to the anterior extremity of the incisor; and further, that the same distances in *Castor* are in the ratio of 1 : 2. (In the specimens of this animal which I measured I found a ratio varying between 3 : 4 and 3.3 : 4.) Since the premaxillary region of the skull of *Trogontherium* was also found to be relatively larger than in the beaver, the great distance between the premolar and the point of the incisor is not surprising.

More than twenty years later (1869) OWEN again makes mention of a right mandibular fragment with all the teeth, from the Forest Bed near Mundesley, regarding which he states that the outer side is more convex below the "crotaphyte fossa" [1]) than in *Castor*, and that the insertion of the masseter is continued forwards to below the premolar.

In 1882 NEWTON illustrated a right mandible from the Forest Bed of Kessingland, with all the cheek-teeth and the incisor, but lacking the ascending ramus. With this illustration NEWTON gave a short description of the lower jaw, basing it upon various specimens from the Forest Bed deposits.

He mentions, as typical points of difference with *Castor*, the more extensive and much more rugose symphysial surface, its angle being less prominent and the more posteriorly situated ventral projection of the lower margin (tuberculum anterior processus angularis) directed inwards, thus differing from the situation in *Castor*.

COLLOT in 1906 gave an account of the first discovery in France of a mandible of *Trogontherium*; this was a right jaw which also lacked the posterior end as well as all the grinders, and had been found at Curtil near Beaune. COLLOT gives two photos of it, and in the description of this fragment remarks that a mandibular fragment of a large castorid rodent with the three front cheek-teeth in place, found at Chagny, and referred by DEPÉRET in 1893 to *Castor issiodorensis* CR. et JOB., together with a lower premolar and a fragment of an upper incisor, is specifically identical with *Trogontherium*.

It is evident to me from DEPÉRET's and COLLOT's descriptions and from their illustrations, that COLLOT, who saw the actual specimens, was in the right. There is a distinct difference between the object from Chagny and the drawing of *Castor issiodorensis* in GERVAIS' Atlas, a difference which DEPÉRET touches upon but does not deem of much importance.

---

[1]) I take this to be the fossa temporalis between the outer alveolar border and the coronoid process, as CUVIER employs temporal and crotaphyte muscle as synonymous terms.

COLLOT estimates the length of the lower jaw from Curtil to be 112 mm., or slightly more; according to this author the length is nearly equal to that of the mandible of the Rhône beavers (115 mm.). COLLOT, however, gives 45 mm. as being the length of the row of alveoli, but from the photos the fragment appears to be still slightly larger than the largest specimens from Tegelen. I therefore believe that his estimation of 112 mm. is too low, for, as we shall see later, the jaws from Tegelen may be as much as 122 mm. long.

VON REICHENAU, in his publication of 1912: "Einiges über Schädel und Gebiss der Biber (Castorinae)", describes the mandibular fragments of *Trogontherium* from Mosbach, now in the Musea at Wiesbaden and Mainz.

He comes to the conclusion that the lower jaws of *Trogontherium* (no other skeleton parts of this animal from Mosbach were known to him) are larger and stouter than those of *Castor*. That this pronouncement applies much more to the Mosbach fragments than to those from Tegelen at once struck me when, through the generosity of the Conservators of these collections, I received on loan for purposes of comparison the Mosbach specimens of *Trogontherium* from the Musea at Berlin, Mainz, Wiesbaden, Frankfort and Darmstadt. In this way I could study fourteen fragments of lower jaws; further, four femora and two fragments of the skull (Mainz), besides a number of isolated grinders and fragments of incisors. The length of the complete mandibular ramus varies in the adult Mosbach animals, on a careful computation, between 130 and 140 mm.

In the collections from Tegelen I met with over 80 more or less complete mandibles. As there was not one of these entirely uninjured, I can only give the total length of the ramus approximately, which, however, can be done fairly exactly on the specimen in the Haarlem collection, illustrated in fig. 12. This jaw lacked the angle, but among the Berlin specimens I found a sufficiently perfect angular process (fig. 5) to substitute for it. I was thus able to determine the length of the jaw from the foremost point of the bony partition between the incisors to the hindermost point of the angle to be 119 mm.

On the recent beaver I measured 117 mm.; on an old, robust beaver jaw from Mosbach, in the collection of the Geol. Landesanstalt at Darmstadt, 130 mm.! The above-mentioned jaw of *Trogontherium* in the Haarlem collection is not the largest of the specimens from Tegelen; there are some which measure 122 mm.

The jaws are nearly all broken off through the mandibular foramen, lying at an analogous place to that in *Castor*, namely at one-third of the distance between the last molar and the top of the condyle (figs. 9 and 10). VON REICHENAU's observation, on comparing the position of the incisors, to the effect that "man findet seine Pulpa an der gleichen Stelle, nicht so das Foramen alveolare posterius (for. mandibulare)", probably implies that in *Trogontherium* this foramen lies much closer to the posterior extremity of that alveolus than in *Castor*, where the pulp cavity continues further backwards beyond the foramen.

As most of the jaws are incomplete in this way, VON REICHENAU gives but one length measurement, viz. that of the row of the alveoli. This, however, owing to the crumbling of their thin edges, is not invariably to be relied on. The length of the row of teeth along the grinding surface increases in the course of wear, so that this measurement ought to be accompanied by some indication as to the appearance of the pattern of the grinding surface. COLLOT gives 45 mm. as the length of the alveoli in the jaw from Curtil. In the most complete jaw from Tegelen (fig. 12) the length of the series of cheek-teeth at the alveolar border is 40 mm., and on the grinding surface 38 mm. On a jaw of the same age from Mosbach, in the Frankfort collection, these dimensions are 47 and 43 mm.

The size of the lower jaw belonging to FISCHER's skull can be deduced from the length of the row of teeth in the upper jaw (at the alveolar border), viz. 44 mm. Since no upper and lower jaws of *Trogontherium* are known as positively belonging to each other, we do not know the relative length of the upper and lower rows, but in *Castor* the latter is 3 mm. longer. In *Trogontherium* from Tegelen the length of the upper row varies, as we saw, from 37.5 to 39 mm., and that of the lower row from 40 to 43.5 mm.; a difference, on an average, of 3.5 mm.. We may thus safely assume that the lower jaw belonging to the Russian skull equalled the largest known specimen from Mosbach.

The three small mandibular fragments of *Trogontherium* from Jockgrim, in the collection at Munich, the largest of which shows the sockets of the premolar and the two first molars, agree in their measurements more closely with the Mosbach than with the Teglian specimens. For instance, the length of these three alveoli together is 34 mm., against an average of 35 mm. on the Mosbach and 31.5 on the Teglian specimens.

NEWTON's illustration of the mandible from Kessingland shows the distance between the front point of the lower jaw and the mandibular foramen to be 103 mm., in the large jaw (fig. 1) from Mosbach it is 100 mm., and in that from Tegelen (fig. 12) 83 mm.

I entertain some doubt as to whether this English specimen is as large as it is drawn in the figure, because NEWTON states the distance from the point of the incisor to the angle of the jaw (where the hinder part is missing) to be 140 mm., and this distance in the drawing is over 165 mm. This distance in the Teglian specimens averages 125 mm.

Since we find such a distinct disparity in length between the lower jaws from Mosbach, Jockgrim and Taganrok on the one hand, and those from Tegelen on the other, it is rather remarkable that their height shows much less difference, and also that the stoutness of the most robust of the Teglian specimens is not attained by the others. For the height of the jaw, measured from the outer posterior angle of the grinding surface of the premolar to the lowest point of the symphysial process, I found on the Mosbach jaws measurements between 45 and 49.5 mm.; on the Teglian specimens from 43.5 to 48.5 mm.

If we now consider which portions of the lower jaw of *Trogontherium* were not known up till now, these will prove to be the anterior half of the ascending ramus with the coronoid process, and the posterior angle of the angular process. It is conceivable that just those portions were not preserved because they are very thin plates.

To my regret I have not been able to find any coronoid process among the material from Tegelen. The basal part of its anterior border can be seen in fig. 12, and that of the posterior border in fig. 10, which show that the direction of the process was probably the same as in *Castor*, for here, too, the anterior border makes an angle of about 90° with the grinding surfaces of the cheek-teeth. The jaw of the extinct animal is built more broadly than in *Castor*, and thus the space between the coronoid process and the row of teeth is wider, and the ascending ramus does not run, as in the recent animal, nearly parallel to this row, but makes an angle with it of approx. 25°, so that the ramus stands obliquely from outside-forwards to inside-backwards.

The width of the jaw is further augmented by a broad flat shelf of bone (margo inferior processus angularis, TULLBERG, 1899) which, along the lower border, forms a broad base upon which the posterior portion of the ascending ramus stands almost perpendicularly. On the mandible from Kessingland abovementioned only the beginning of this basal portion has been preserved, which to NEWTON suggested the jaw of a marsupial.

Nevertheless the situation resembles more than one would think at first sight the position in *Castor*, where the angular process is reduced. There, too, on viewing the jaw from below, we find along the lower border of the angular process an elongated flat shelf of bone, although much narrower. If we imagine this 5 or 6 mm. broader on both sides, so that the width is 16 to 18 mm., we should have proportions exactly as they are in the extinct animal and in many other rodents. Ventrally, this blade is perfectly flat (figs. 6, 12); dorsally, it is divided by the ascending ramus into two strips (fig. 5*a*), an outer portion about 35 mm. long, the crista masseterica (TULLBERG), which passes gradually upwards over into the ascending ramus and ends anteriorly just under the posterior extremity of the alveolus of the incisor (figs. 4, 12), and an inner, broader portion, about 60 mm. long, the crista pterygoidea (TULLBERG), ending with the posterior ventral process of the lower jaw (tuberculum anterior processus angularis) just below the posterior end of the row of teeth.

The angular process in all castorids arises at the lower border of the corpus mandibulae, as can be best seen in *Castor* and *Steneofiber*. In *Castoroides* and *Trogontherium* this is less distinct, and thus *Castoroides* has often been classed in the group of the Hystricomorpha, one reason being the erroneous supposition that, as HAY (1914) expresses it, "the angular process arises on the outer side of the alveolus of the incisor." What arises there, however, is not, as we saw, the angular process, but the masseterical crest of this process, the pterygoid crest of which projects as far at the inner side.

The pterygoid crest shows a deep, round, muscle depression in front (fig. 10). At this place in *Castor* lies a fainter depression of the front portion of the internal pterygoid muscle. Also the very wide pterygoid fossae on the cranial base of *Trogontherium* are an indication of very strong pterygoid muscles. The muscle depression of the pterygoideus externus on the neck of the condyle, however, does not extend further than in the beaver. The condyle is considerably longer than it is broad (approx. 15 and 9 mm.), whereas these measurements are almost equal in *Castor*, both about 11 mm. (figs. 7, 8).

A greater distance than in *Castor* exists between the last molar and the top of the condyle, which stands higher; also the fossa masseterica on the outside of the ramus extends higher, so that from the condyle a straight margo posterior runs downwards behind that fossa to bend backwards towards the angle of the jaw which, as in *Castor*, *Castoroides* and *Steneofiber*, lies higher on the skull than the grinding surface of the teeth; in *Euhapsis* the angulus mandibulae lies distinctly lower than that surface. The socket of the incisor not only extends less far backwards, but lies considerably lower and further outside the longitudinal axis of the row of teeth, in accordance with the shape of the incisor which will be described later.

The angle made by the two rows of teeth, viz. 40°, as against 30° in *Castor*, has been mentioned above. In *Castoroides* this angle is likewise approx. 40°; in *Palaeocastor* (Pl. III, fig. 9) and in *Steneofiber* much less, generally between 10° and 20°; in *Euhapsis* the rows run almost parallel.

Only in very young animals do we find the sockets to be, as in *Castor* during the whole life of the animal, deep, rounded quadratic cavities. Transverse and longitudinal partitions are early formed in them, together with the roots on the teeth (fig. 11). First the transverse partition grows up from the bottom, so that two transverse elongated cavities occur, lying behind each other. In the sockets for m^1 and m^2, the frontal one of the two is again divided by a short, thick, longitudinal partition into an oval inner and outer cavity. Also in the socket for m^3 the posterior cavity remains undivided, but the foremost one is divided by two longitudinal partitions into three circular cavities, the middle one of which is very shallow.

In the socket of the premolar, along the entire height of the transverse partition, the beginning of a longitudinal one stretches forwards, but it remains short and thick, and does not reach the front side of the alveolus, so that the cross-section of this frontal half of the socket is kidney-shaped.

All partitions grow upwards according as the teeth wear away; eventually they push the completely worn off grinder out of the socket.

These minor cavities for the roots fill up with bony tissue; the roots on the molars never become longer than a few millimetres. The last grinder is the first to fall out; this socket is nearly filled up then (figs. 2, 4); the other teeth follow from the back forwards.

The higher, rougher symphysis points to greater freedom of movement of both rami, such as is found in *Castoroides* too.

With respect to this animal, MOORE described also an "S-shaped plate with fossa for pterygoid muscle above". Here the fossa masseterica has the same form as in *Castor*; the jaw, however, is very broadly built out, its antero-posterior extent (without the incisivi) being, as in *Trogontherium,* exceeded by the greatest width.

These dimensions in the American animal are approx. 190 mm. and 210 mm. respectively; in large individuals of *Trogontherium* from Tegelen approx. 115 mm. and 130 mm.; in the recent beaver 103 mm. and 93 mm.; in *Palaeocastor* the width exceeds the length by some millimetres.

Notwithstanding the great width of the lower jaw the condyles in *Castoroides* stand only about 80 mm. apart, and in *Trogontherium* from Tegelen about 48 mm. In the recent *Castor* this distance is nearly the same, as the cranium is about equally broad.

The condyle of *Castoroides* also stands higher than those of *Castor*, and the posterior angle of the jaw bends downwards; between the angle and the neck there is a notch, an inch deep, in the posterior border. Neither of the last two features occur in any other castorid.

The length of the mandibular ramus in *Steneofiber viciacensis* is 52 mm., against approx. 115 mm. in *Castor*, 122 mm. in *Trogontherium* from Tegelen and 190—200 mm. in *Castoroides*. FILHOL (1879), describing *Steneofiber viciacensis*, says: "L'angle de la machoire est plus détaché et en même temps plus contourné en dedans par son bord inférieur." This applies equally well to *Palaeocastor* (Pl. III, fig. 9), and indicates that *Castor* has the most reduced angular process of all the Beavers.

Incisors

Lower Incisors. (Pl. VI.)

The lower incisors of *Trogontherium* have been found in very great number, and have been discussed several times before: by OWEN (1869), by NEWTON, very exhaustively (1882, 1890 and 1902), by COLLOT (1906) and by VON REICHENAU (1912), while HINTON has described a very young specimen (1914).

For the length measurement of an incisor from Norfolk, OWEN gives 152 mm.; for one from Bacton 178 mm., the latter measurement being taken along the convex side from the point to the "root". (I believe that this is intended to be the bottom of the alveolus which, according to the illustration, is broken open). NEWTON gives 190 mm. as the length of the incisor in the lower jaw from Kessingland.

On the incisor in the clay ironstone concretion ("neut"), illustrated in fig. 7, I found approx. 165 mm. for the same distance, taking into account the numerous cracks.

It goes without saying that the incisors found isolated are never so long, since the portion lying round the long pulp cavity is extremely thin, especially at the beginning, and therefore has never been found in its entirety. Among the numerous isolated specimens from Tegelen only a few had a length of 135 mm. (figs.1—4).

Among the incisors from Mosbach in the collection at Berlin, I found specimens (fig. 5) of 160 mm. in length, and one in a mandibular fragment (fig. 6) which, before the point was broken off, must have been quite 175 mm. long. As the posterior extremities of these objects are not even very thin, the distance (given by OWEN) will have certainly been no less than 180—190 mm.

The distance from the point of the incisor to the front point of the grinding surface of the premolar is about 85 mm. on this Mosbach specimen. The incisor protrudes a good 50 mm. from the socket here, and a greater portion of the tooth is massive than in *Castor*, where the tooth projects no more than 30 mm. and the pulp cavity extends much further forward. In the jaw from Curtil, which, as we have seen, is of a smaller individual than those from Mosbach, the tooth protrudes 40 mm. out of the alveolus.

The incisor is longer and thicker than in *Castor*, and the portion covered with granular enamel is strongly convex. The feature observed by OWEN in the extinct animal, namely, that the enamel extends further round the tooth, does not hold good for the Mosbach and the Teglian lower teeth where the enamelled portion on an average is 16 mm. of the 39 mm., i. e. about $^2/_5$, which is exactly the proportion I found in recent as well as in fossil beaver teeth, *e. g.* 13 mm. of the 32 mm.

As COLLOT observed in the jaw from Curtil, the tooth shows, besides an outer longitudinal groove, an inner one lying in the transversely ribbed dentinal portion, the outer one being much the deeper of the two (figs. 1, 2).

The incisors from Tegelen are considerably shorter, but they are no thinner than those from Mosbach (fig. 5) and from Kessingland. For the latter NEWTON mentions a maximal diameter of 16 mm., for that from the Thames valley 13 mm. Among the Mosbach specimens I found maximum diameters of 12.5, 13.5, 13.7 and 14.3 mm.; among those from Tegelen 13.8, 14, 14.2 mm. The width of the Mosbach teeth runs to 12.7 mm., that of the Teglian specimens to 11 mm., the cross-section of the former is thus not such an elongated ellipse as in the latter.

For the young teeth NEWTON mentions a pear-shaped cross-section without the two above-mentioned longitudinal grooves; I was able to confirm this on the teeth from Mosbach and from Tegelen. The latter keep this shape of cross-section (text figure 5*a*) very long, the inner side becomes flat, the outer showing only on very old teeth a notching by the grooves. Fig. 5*b* illustrates an exceptional case among the Teglian teeth, where both outer and inner side exhibit a distinct notch.

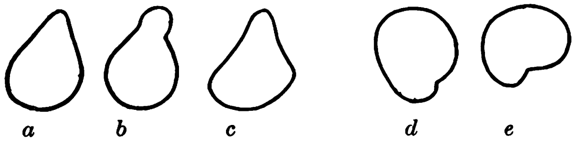


Fig. 5.

Cross-sections through incisors of *Trogontherium:* *a, b* and *d* from Tegelen, *c* from Mosbach, *e* from Jockgrim.
a, b and *c* through lower, *d* and *e* through upper incisors.

Among the teeth from Mosbach (fig. 5*c*) sharp grooves never occur, the outer as well as the inner side being slightly concave.

Among the *Trogontherium* remains from Jockgrim in the Palaeontological Museum at Munich, there are nine short fragments of lower incisors. On an average the height of the cross-section of these teeth is but little more than their width (height 11.7 mm., width 11.2 mm.); also the dorsal and ventral contour is less convex in cross-section, — differences of the same nature as we shall see between the upper incisors from Jockgrim and from the other localities.

As the length of the mandibles from Mosbach exceeds greatly that of the Teglian jaws, but their width does not differ materially, we find on the shorter incisors from Tegelen a relatively wider spiral curve.

The tooth makes a twist of about 50° on its axis; the convex enamelled portion is directed downwards on the front of the tooth and inwards at the back of the socket.

The convex side of the tooth in three specimens from Mosbach forms about $^3/_8$ part of a circle with a diameter of 166 mm., 154 mm. and 140 mm. respectively; in the adult specimens from Tegelen this diameter is 120 mm. on an average. In younger individuals the tooth is naturally shorter and the diameter of the circle smaller; thus, in the tooth in the collection of St. Joseph's College, illustrated in fig. 10, it is not more than 88 mm. NEWTON gives for the tooth out of the Pleistocene of the Thames valley a circle diameter of about 150 mm., *i. e.* like the smaller teeth from Mosbach.

In the beaver jaws from Mosbach I found incisor teeth which describe the arc of a circle with a diameter up to 116 mm., in the adult recent animal about 112 mm.

GIEBEL states that the circle diameter of the upper and the lower incisors in *Castor* are in the ratio of 10 : 22.5, a ratio which I also found in fossil as well as in recent beavers. This proportion in *Trogontherium* is 14 : 22 for the Teglian teeth. No upper incisors have been found of the Mosbach animals, nor any premaxillary portion with the alveolus. Of the incisors in the fragments of skull and jaws from West Runton and Kessingland, NEWTON gives the circle diameter of the upper tooth only as being between 100 and 115 mm. We have already seen, however, that the English fragments are about the same size as those from Mosbach, where the circle diameters of the three lower incisors respectively are 140, 154 and 186 mm., so that we arrive at a similar ratio as in the teeth from Tegelen.

The form of the bevelled crown on the lower incisor in *Castor* is almost an isosceles triangle, the equal sides of which are slightly convex and formed by the worn dentine; the third side, the shortest, is straight, and is formed by the enamel. The length of this side depends on the width of the, here, but very slightly convex enamel; the outer angle is somewhat rounder than the inner angle. The length of the two long sides may vary very much, and is from 1½ times to twice the length of the short side; *e.g.* the length of the wearing surface is 16 mm. and the width 10 mm., or the length may be 14 mm. and the width 8 mm. As a rule the surface is slightly concave in both directions; sometimes the anterior half makes a very obtuse angle with the posterior half. The middle of the grinding surface is a fork-shaped figure, the three points of which are directed towards the three angles.

The form of this surface on the lower incisors of *Trogontherium* is very different. It is generally longer in proportion to the width and, in consequence of the much greater convexity of the enamelled side, the extremity is worn to a rounded point (Pl. V, fig. 2); there is no question of a triangular form here. The inner border is quite straight behind the rounded point; the greatest length of the wearing surface does not lie opposite the point of the tooth but more to the inner side, where the surface extends further backwards. The length of the grinding surface varies in the adult animals from Tegelen between 15 and 24 mm.; on an incisor fragment from Mosbach it is 27 mm. The outer half of the surface is the longitudinal half of an ellipse, twice as long as it is broad. The two longitudinal halves are often separated by a crack and in front form a very blunt edge, which lies somewhat lateral of the median line, and corresponds to the notch of the gnawing surface on the upper tooth which will be mentioned later.

As a rule in young animals a slight angle is formed on the wearing surface by the longer front portion with the shorter posterior portion; in older individuals this angle may be as much as 138°. (Pl. VI, fig. 1). The place of this bend may vary, and lies sometimes so much to the front that the enamel is also notched sideways by the friction against the upper tooth. According to NEWTON's illustration, the bevelled crown of the tooth from Kessingland is very long and narrow, a form which I found neither in the Teglian material nor in that from Mosbach.

As none of the incisors in the Teglian material are so young as those **Hinton** (1914) found in Mr. **Savin**'s collections, I have not been able to observe the characteristics of the unworn tooth-point described and figured by **Hinton**. For the identity of these specimens see page 000.

Upper Incisors. (Pl. VI.)

The great size of these incisors was already spoken of in the description of the premaxillae. **Newton** (1882) has described the left upper incisor still in place in the premaxillary portion found in West Runton. **Fischer** (1809) has briefly alluded to the fact that the cross-section of the upper incisors preserved in the skull from Taganrok, one a perfect tooth, the other broken off, is round in contrast to "tous les autres rongeurs" where this form is "plus or moins anguleuse".

It is to be regretted that nevertheless the incisor is drawn angular in the figure of the side view of the Russian skull; probably this is one of the reasons that led **Cuvier** and **Schlosser** to deem the resemblance to *Castor* so strong; **Rouillier**'s illustrations are much better in this respect, but unfortunately they are not so generally well known.

According to **Newton**, the English specimen forms the half of a circle with a maximum diameter of 100—115 mm.; the cross-section is 15.5 mm. long.

According to the illustration of the fragment of an upper incisor from Chagny, described by **Depéret** (1893) as belonging to *Castor issiodorensis* **Cr.** et **Job**, but which **Collot** (1906) rightly identified as belonging to *Trogontherium*, the cross-section of this tooth is 10.5 mm., the diameter of the circle approx. 80 mm.

The specimens from Tegelen, as regards the size, stand closer to the French than to the English tooth, for the diameter of the circle of which the outer curve forms a segment, is here only 82 mm. at the most, and the maximum length of the cross-section 12 to 13 mm. and, measured perpendicularly, 10.5 mm.

The teeth of *Trogontherium* from Tegelen do not form such a large arc (220°) of a circle as in *Castor*, (where the circle diameter is appr. 50 mm. and the more triangular cross-section 8 to 9 mm.); they form hardly a semi-circle, and the cross-section is round (text figure 5*d*), except the inner side which is flat, with a very shallow groove nearly 2 mm. broad in the middle of the dentinal portion (Pl. VI, fig. 11). On this flat side the enamel continues as a strip about one millimetre wide. Of the circumference of the tooth $^6/_{17}$ part is covered with enamel in *Castor*, *e. g.* 11 mm. of the 30.5 mm.; in *Trogontherium* 17 mm. of the 38 mm., or 14 mm. of the 35 mm., thus approx. $^6/_{15}$, which is but little more than in the beaver. On the lower incisors of *Trogontherium* we found the same proportion of $^6/_{15}$, so that the degree of the enamel covering cannot be employed to distinguish fragments of upper from those of lower incisors in this animal.

The very convex lateral side is more than half covered with enamel, and a narrow longitudinal groove, mentioned by NEWTON of the English tooth, runs over the finely transversely-ribbed dentinal portion; several of the old teeth from Tegelen show this groove too (text figure 5*d*). It can be still better seen on a tooth fragment from Jockgrim (Pl. VI, fig. 18), the cross-section of which is shown in the text figure (5*e*); this section shows another remarkable difference from that of the teeth from Tegelen and from Mosbach, it being broader than it is high, namely 11.4 mm. and 10.1 mm., and the groove on the outer-posterior side is so sharp that two strongly convex halves are formed. The convexity of the enamelled side on this fragment from Jockgrim is less, the diameter of the circle along the outer curve is 110 mm.

On the granular enamel the older specimens sometimes show distinct longitudinal ridges and grooves (fig. 15), as are also seen in *Castoroides*, *Amblycastor* and *Anchitheriomys*.

The cutting edge of the upper incisor is not straight as in *Castor* (fig. 19) but, if uninjured, is uneven (fig. 17), owing to a notch slightly lateral of the middle, which corresponds to the edge on the wearing surface of the lower incisor. What MARTIN (1913) wrote regarding the incisors of *Castoroides* also applies to *Trogontherium*, namely: "In *Castor* the cutting edge of the incisors is worn nearly straight across with slightly more wear on the outer edges, but in *Castoroides* quite the reverse occurs, the teeth being worn thin and sharp at their junction on the medial line and gradually get thicker and more heavy laterally, the two teeth thus forming a very efficient gouge."

The dentine lying behind the cutting edge has been deeply hollowed out by the point of the lower incisor; this concavity extends no further than the anterior half of the wedge-like tapering wearing surface (figs. 11, 16, 17). In *Castor* the dentine shows a straight transverse furrow (fig. 19) in the middle of the gnawing portion, as the extremity of the lower incisor is chisel-shaped.

Among the upper incisors from Tegelen there are some of more or less young individuals of *Trogontherium* (fig. 13), where the pulp cavity is still open to the frontal extremity of the tooth (fig. 14). Neither of the two longitudinal grooves in the dentine are to be seen here yet, but the granular surface of the enamel and the transverse ribbing of the dentine are already quite apparent.

HINTON (1914) described (with an illustration) two fragments of incisors of young individuals of *Trogontherium* from West Runton. These stadia I likewise found in the Limburg material, but the longitudinal groove, mentioned by HINTON, is still lacking there. (For the specific identity of these specimens see p. 267).

The incisors of *Castoroides* are like enormously large *Trogontherium* teeth, while those of *Palaeocastor* and *Steneofiber* are like small beaver teeth. The longitudinal grooves on the enamel, sometimes seen in *Trogontherium* from Tegelen, are very pronounced in *Castoroides*, and likewise in *Amblycastor fluminis* MATTHEW (1918), where also a very convex frontal side of the incisors obtains. MOORE states the length of the pulp cavity of the upper tooth of *Castoroides* to be 82 mm.; in *Trogontherium* from Tegelen this dimension is 38 mm. As the length of the lower tooth MOORE mentions 273 mm.; HAY 280 mm. for a tooth from Grenville. In *Trogontherium* from Mosbach this measurement is 180 to 190 mm. The teeth of *Castoroides* are relatively thicker. LEIDY (1887) gives an exhaustive description of the incisors of this animal, with fine illustrations of their wearing surfaces and cross-sections. The diameter of the circle of which the lower tooth forms an arc, we found to vary in *Trogontherium* between 166 mm. (Mosbach) and 120 mm. (Tegelen); in *Castor* between 116 and 112 mm.; in *Castoroides* this dimension is about 230 mm., according to an illustration of SMITH (1918), and 220 mm. according to LEIDY's, while in *Steneofiber viciacensis* it is 55 mm.

Grinding Teeth

Lower Grinders. (Pl. VII.)

These teeth have been exhaustively described by NEWTON (1882) in his comparison of seven series (in three of which m_3 is lacking) in different stages of wear from the Forest Bed; three of these had already been described and figured by OWEN (1846 and 1869). REID, in "The Pliocene Deposits of Britain", gives a drawing of the same row of teeth from Mundesley as NEWTON illustrated in his figure 9. Some characteristics of the cheek-teeth of *Trogontherium* from Mosbach, in the collections at Mainz and Wiesbaden, are mentioned by VON REICHENAU. It will therefore suffice to give here some supplementary remarks about several peculiarities observed on the hundreds of teeth from Tegelen, on a large number from Mosbach and on some from Jockgrim.

The two youngest rows of lower teeth known are illustrated by NEWTON; in one of these the four teeth (a milk molar [1]) and three molars) were found isolated (his Pl. XI, fig. 6); the other row is in place and the milk-molar has just been shed, the permanent premolar not yet being cut (fig. 7). Among the teeth from Tegelen I did not find such early stadia, neither did I meet with a milk molar of the lower jaw, but some isolated unworn permanent premolars (Pl. VII, fig. 12 *a*, *b*) have been preserved. No unworn molars were among the remains, these young teeth being very fragile, as they consist solely of a thin cap of folded enamel with hardly any filling of dentine. This enamel layer, especially on the inner side of the molars, is very thin and thus little resistant.

VON REICHENAU has figured a lower jaw, belonging to the collection from Mosbach, in which the premolar shows a very early stage of wear. The youngest series of lower cheek-teeth from Tegelen is somewhat older; nevertheless all the folds are still open to the exterior. The folds are never furnished with cement on the exterior, as obtains in *Castor*. The two lips of the fold and afterwards of the island are separated from each other by a very narrow open slit, which can be made quite distinct when the soft Teglian clay is washed out of the crown. Nowhere have I observed any cement on the teeth of *Trogontherium*, either in or round the crown; the dark blue enamel round the tooth wall above is sharply defined from the brown dentinal portion below, even on old teeth (fig. 14), in contrast with the situation in *Castor* (fig. 15) where the tooth is partly covered by cement.

---

[1]) Although NEWTON feels persuaded that this milk molar is the predecessor of the *right* premolar figured in his figs. 5 and 6, it struck me that the *inner* fold on it would be the only one still open to the exterior of the tooth.

The boundary line between the enamelled and the dentinal portion, however, is most irregular in *Trogontherium* and, at the back of the lower teeth where the enamel layer is thickest, lies very low down; on the three other sides it lies higher, and the enamel is much thinner. On the first and second molars it bends downwards on the front side (fig. 26), and with a sharp angle upwards on the edge formed by this side and the inner surface. Also the edge between the inner and the posterior side is, on its lower half, free of enamel, which is extremely thin on the whole inner surface of the tooth and sometimes entirely absent there for a fairly broad strip. The absence of enamel can be seen likewise on the rounded outer surface below the single outer fold. Figure 33 shows, on a left second molar worn away to below this fold, a bright dentinal portion between dark bands of enamel. On the hindermost grinder where, in contrast to the three other ones, the anterior surface is convex lengthwise and the posterior side slightly concave, the enamel layer extends very low down all round (fig. 31). The same is the case in the premolar where the enamel layer is strong.

The same process as VON REICHENAU described respecting the closing of the pulp cavities in *Castor* takes place in *Trogontherium*, although much earlier in life (fig. 12 *a* to *e*). For, as soon as the tooth comes into use in the latter animal, the growth of the enamel tubes in the interior of the tooth ceases, and they close from below (fig. 12*c*).

The wall of the cavity then grows over and past these closed tubes, forming some enamel first, but for the rest the pulp cavity is closed by the dentine of the inner and outer side of the tooth coming into contact with each other. In the premolar of the Teglian specimens an anterior and a posterior broad, flattened fang (which may be as much as 15 mm. long) is formed, uniting on the outer side of the tooth (figs. 12*e*, 14, 22).

NEWTON mentioned this form of fang on the premolar, and added that, on the Forest Bed specimens, the form of the fangs of the molars could not be made out.

In the lower molars from Tegelen a broad, flat posterior fang is formed and two small anterior fangs, somewhat bent (figs. 28, 33). On the last molar there occurs, as a rule, a third smaller anterior root between these two (fig. 32). As the roots are very brittle, their length and form can best be inferred from the form of the minor cavities in the sockets after the teeth have fallen out (see page 148). What NEWTON stated of the upper teeth, namely, that the fangs are formed when the animal is still quite young, I have also been able to confirm of the lower teeth; the fangs are already formed while all the enamel folds are still open to the exterior of the tooth.

In *Castor* no separate fangs ever occur (fig. 15), even in the very oldest stages of wear when the three inner folds are isolated from the wall and form islands. Neither do the sockets of the oldest jaws ever form minor cavities and partitions. At the most very low ridges on the bottom of the socket may cause a few shallow pits, which exhibit an opening for the passing of the nerves and blood-vessels.

In *Trogontherium* the anterior inner fold of the first molar as a rule becomes first isolated from the external enamel layer (fig. 5), then the same fold on the second molar. Then follows the posterior inner fold of m_1 and then of m_2. This stage of wear, in which the two middle grinders each show two folds and two islands, I also met with on three rows of teeth from Mosbach. Then the first inner fold of the third molar closes, to be followed by the middle inner fold of m_1 and of m_2 (fig. 6). When the middle and the posterior fold of m_3 are also closed, *i. e.* all the inner folds of the molars, the anterior and the posterior inner fold of the premolar close almost at the same time as the single outer fold of m_1 (fig. 6). Finally the middle inner fold of m_2 becomes isolated, then of m_3 and of p_4 (fig. 7).

On some of the rows of teeth from Tegelen, where the outer folds are all still open to the exterior, there lies at the anterior point of p_4 a very faint accessory fold (already mentioned by both OWEN and NEWTON of the Forest Bed specimens) which is directed parallel to the three inner folds. In very young specimens on the anterior surface of the tooth, slightly inwards, a very shallow longitudinal groove, like a score made with the thumb-nail, occurs in the middle of the height of the tooth (also to be seen in the French right mandibular ramus, figured in DEPÉRET (1893), Pl. XI, fig. 6). As this score is not more than one centimetre long on the premolar from Tegelen, only a small accessory fold or, more often, a very shallow notch, is to be seen on the grinding surface in premolars which are neither very young nor very old; it never becomes isolated from the exterior enamel layer here. In contrast to this, on the premolars from Mosbach this groove is much deeper and longer; it can be seen on the anterior portion of the grinding surface as a distinct accessory inner fold of the same length as the middle inner fold (Pl. VII, fig. 3), and becomes isolated to a fifth island. This accessory island is very small in NEWTON's figures 9 and 10 of premolars from the Forest Bed.

In VON REICHENAU's inner view (fig. 26) of a very young jaw from Mosbach, in the collection at Mainz, the accessory groove (the foremost of the four grooves in his figure) does not reach the grinding surface as the three others do; it does so in the slightly older jaw from the same locality, preserved in the Senckenberg Museum at Frankfort and figured on our Pl. VII, fig. 3. The much older jaw from Mosbach, in the Museum at Wiesbaden (VON REICHENAU's fig. 30), shows this fold isolated to an island. Also on our Pl. V, fig. 1, this short fold can be seen on the crown.

Of the four premolars from Jockgrim, in the collection of the Palaeontological Museum at Munich, there are two which are not damaged in front; both these show a distinct accessory inner fold. One of these two, where the posterior portion with one inner fold is broken off, is illustrated on Pl. VII, fig. 19.

On some premolars from Tegelen there is another small extra notch on their front part, running parallel to the direction of the outer fold. This notch, which lies higher up on the tooth and is shorter than the above-mentioned extra inner fold, I observed very faintly developed on the outer side of the latter on only one of the Mosbach premolars. Whereas the inner extra fold on the Teglian premolars is never more than a faint notch in the anterior border of the grinding surface, or is altogether lacking, this accessory outer fold may be very distinct (fig. 6); it is not constant, however.

A case in which the extra outer and inner folds coalesce, so that the anterior point of the premolar forms a small pillar, can be seen in figure 17, and a similar small column on a younger left premolar in fig. 13. The corresponding premolar of the right side is of the usual Teglian type, *viz.* with two faint scores in the anterior surface.

Another peculiarity which the young premolar may exhibit is the fusion of the short, middle inner fold with the middle portion of the anterior one, so that an island is formed between these two folds (figs. 20, 21), a similar case, thus, to that on young premolars of *Castor* (fig. 23). The younger the teeth are the more such circular islands occur on the grinding surface (fig. 4), as the top of the uncut premolar consists of a large number of round or elliptical pillars (fig. 12*a* and *b*) which very soon fuse with each other downwards. The anterior and posterior halves of the top of the premolar remain longest separated by the fusion of the outer fold into the middle inner one (fig. 4).

The true molars do not exhibit a single accessory fold or any peculiarity on the grinding surface, in so far as I have been able to judge.

Before the outer fold of the premolar becomes isolated from the enamel wall the anterior inner island of the m_1 is already obliterated (fig. 7), so that a stage of wear in which all the molars exhibit four islands is not attained. In the next stage the posterior inner island of m_1, which lies in the prolongation of the outer fold, also disappears. (This does not take place by coalescence of these two folds, as NEWTON thought possible; neither in *Castor* nor in *Trogontherium* do the enamel folds fuse when they are once isolated). Then successively the anterior and the posterior islands on the second molar are worn out (figs. 8, 9). This stage, in which the first and last grinders show four islands and the two middle ones two, remains until the teeth drop out, which takes place consecutively beginning with the last (fig. 10). It may happen that all the enamel islands of the grinding surface have disappeared when the tooth falls out; such a case is exhibited by m_2 in figure 11, where the empty socket of the third molar is already filled up.

Immediately before the teeth fall out, when they are worn down almost to the fangs, a plication of the enamel of the islands may appear (p_4 in fig. 9), or the islands may break up into a number of smaller ones (NEWTON's Plate XI, fig. 12). These phenomena are the result of the fact that when the enamel tubes in the very young tooth close, this does not always take place by the simple growing together of the two lips of the tube, but sometimes by the formation of an uneven bottom (fig. 12*b* right) which, when worn off from above, causes the said plications or the minor islands.

A similar crenulation of the enamel of the folds is frequently seen in the beaver (see p. 294).

We thus see in *Trogontherium* a continual change in the grinding pattern, in contrast with *Castor* where it remains very long constant after a short and variable juvenile stage. Here the three long lingual folds and the one single shorter labial fold, all of which are furnished with cement, occur until the grinders are nearly quite worn off. Then the lingual folds close, in exactly the same order as in *Trogontherium*, so that three islands are formed. The labial fold never loses its connection with the external enamel layer. The juvenile pattern can be seen on the premolar of *Castor fiber* from Tegelen, illustrated in our fig. 23, and in von Reichenau's figs. 1, 4 and 6, where the two foremost lingual folds still fuse in the median line of the tooth, forming an inner island.

If we examine now the dimensions of the grinders, beginning with the height, we shall find that this is greatest in the premolar, and diminishes backwards along the row. On the premolars from Tegelen the enamel crown reaches its maximum height of app. 31 mm. on the young tooth, where the pulp cavity has just been closed and the wearing has not long begun. If we apply the term "root" to that portion of the tooth lying below the enamelled portion, we find for it a maximum height of appr. 15 mm. The height which the whole premolar, *i. e.* crown and root, can attain, lies between 33 mm. in young, and 20 mm. in very old animals. The portion protruding out of the alveolus decreases in height when the animal grows older, for the wearing process progresses faster than the tooth is pushed out of the socket. The difference is slight, however. As there are but a few isolated premolars among the Mosbach specimens I cannot draw any conclusion regarding the height of these teeth, but it seems to me that they are not higher than those from Tegelen. The same applies to the three damaged premolars from Jockgrim.

As maximal height of the enamel (measured, as in the premolar, along the back of the tooth), I found 27 mm. on the first molar, on the second 22 mm. and on the third 15 mm. The fangs on the molars do not become nearly so long as those on the premolar.

At the most the flat posterior one reaches a few millimetres, and the small round anterior fangs, which lie higher, are likewise only a few millimetres long (fig. 28).

The length (antero-posterior diameter) of the grinding surface changes during wear, because the young teeth are directed forwards and the older ones straight upwards.

Furthermore, the premolar has a somewhat conical form; thus, the more this tooth is worn off, the longer will the grinding surface be. As, however, no other antero-posterior measurement can be taken of the teeth which are preserved in the sockets, this dimension must suffice; it will be desirable, however, in giving this measurement to add the stage of wear of the tooth. The grinding surface of the premolar is always the longest, and in adult animals from Tegelen varies from 13.7 to 14.5 mm.; on the young jaw, illustrated in fig. 1, it is only 6 mm. On adult premolars from Mosbach the surface of the crown may attain a length of 17.5 mm. If the length of the grinding surfaces of the true molars be measured, the result will show that it increases from the first to the hindermost molar. The first molar has invariably the shortest grinding surface, except in a very early stage when m_2 has just begun to wear. The older the jaw, the shorter the grinding surface of m_1, as it stands more oblique to the longitudinal axis of the tooth at first than later (Cf. Pl. VII, figs. 1, 2 and Pl. V, fig. 9). The length of the grinding surface on the first molars in young animals from Tegelen is, on an average, 8.1 mm., in older individuals 7.4 mm. Those from Mosbach vary between 9.0 and 8.5 mm. Many rows of teeth show the front point of m_1 as somewhat crushed, being pressed by the growth of the conical p_4.

The length of the grinding surface of m_2, just after the inner folds are closed, is the same as that of m_1; afterwards it becomes longer, being nearly constant, and that of m_1 becomes shorter. In m_2 it averages 7.9 mm. on the Teglian teeth and 9.0 mm. on the Mosbach teeth.

VON REICHENAU states that on the Mosbach jaws the length of the grinding surface on m_1 varies between 8.0 and 9.5 mm., while on m_2 it varies between 7.6 and 9.0 mm.; according to this author, thus, the length on m_1, in general, would be greater. I cannot assent to this either with respect to the Teglian molars or those from Mosbach.

The longest grinding surface of the molars is always on m_3, averaging 8.6 mm. on the Teglian teeth; there are, however, some older ones which measure 9.0 and 9.7 mm. On the Mosbach teeth this dimension may be even as much as 10.5 mm.

In *Castor* the last molar never has a longer grinding surface than the two others; the length of all three lies between 8.2 and 8.4 mm.

In accordance with the dimensions of the mandible, on the premolars from Mosbach the greatest width is not more than on those from Tegelen, varying (measured perpendicular to the straight inner margin of the grinding surface) between 8.5 and 10.4 mm. VON REICHENAU found the premolar of No. 5 in the collection at Wiesbaden to be 11.2 mm., but his measurements are taken "etwas diagonal".

As can be seen on the isolated grinders, on the first and the second molar as well as on the premolar, the width increases downwards; sometimes the greatest width lies little higher than the base of the crown (in the molars the width of the slightly oblique posterior surface has been measured). On the grinders from Tegelen this dimension on m_1 of adult animals varies between 9.3 and 10.2 mm.; on those from Mosbach between 9.6 and 11.5 mm.; on the first molars from Jockgrim it is 10.2 and 10.4 mm.; on the left molar (m_1 or m_2) from Hochsachsen (Pilgerhaus) it is 11.0 mm.

On the second molars from Tegelen the greatest width is between 9.0 and 10.8 mm., on those from Mosbach between 9.0 and 11.3 mm., and on three specimens from Jockgrim between 10.6 and 10.9 mm. As a rule the first and second molars are about equally broad. The last molar is (as in *Castor*) always the narrowest, and on those from Tegelen the width varies between 7.8 and 9.7 mm. As this molar is the first to fall out it is generally missing in the older jaws; I could therefore measure the width of only a few specimens from Mosbach and found it to be between 9.5 and 10.2 mm.

As was mentioned above, the width of the posterior wall of the molars has been measured, and as this stands more obliquely in m_3 than in the other two, the difference in width is greater than the figures given for it would lead us to expect; a glance at the illustrations will make this clear.

It appears that the premolar and the last molar are both easily identified in the isolated state, the former by its size and the latter by the elongated form of the grinding surface and by a faintly concave posterior surface which, owing to the strongly inclined position of this molar, makes a very obtuse angle with the grinding surface. It is difficult, however, to determine from isolated specimens whether we have to do with first or second molars. Where there is certainty that both belong to the same row of teeth, the longer of the two will be m_1. As the absolute length of the inner folds on the two molars is the same, the distance between the lower end of these folds and the boundary line of the enamel round the crown must be greater in m_1 than in m_2. This serves as some indication so long as these folds are still to be seen as grooves on the exterior wall; when this is the case no longer then the slight slope of the cut edge of the posterior surface of the tooth (fig. 30) is the only feature that points with any certainty to a second molar. The wearing of this molar obliquely is caused by its being pressed slightly outwards from below by the big incisor which runs past it inside, to bend outwards and pass underneath the last molar.

The four grinders of the beaver resemble each other so closely that isolated teeth cannot be identified with certainty. If some are known to have belonged to the same row of teeth, the longest of them will be the first tooth and the other teeth follow in order of decreasing length. Further, the broadest of them is m_1 or m_2; on p_4 the posterior half of the tooth is rather broader than the anterior half; on m_3 the reverse is the case. Unless the teeth are badly damaged the absence of a facet on the front points to a premolar, the absence of one on the posterior side indicates the third molar.

None of the collections submitted to me for study were free of errors as regards the identification of isolated teeth; again and again were grinders of *Castor* referred to *Trogontherium*. Some palaeontologists entertain the belief that "la détermination du *Trogontherium* d'après des dents isolées est à peu près impossible d'avec le *Castor*" (from a letter of MAYET, 1927). I will once more emphasize the fact that on the molars of *Castor* one fold is always visible as a groove on the outer wall of the tooth until the latter is worn out. In old beavers this fold may be covered by a cement layer, but this cement, which is clearly distinguishable from the enamel, merely stamps the teeth as those of the beaver.

The grinders of *Castoroides* are much more hypsodont than those of *Castor*, as they are entirely rootless, and there appears to be no change in the grinding pattern during wear. In structure they differ markedly from the beaver, although the lower teeth have the same proportions as regards their grinding surface: that on the premolar is the largest, that on the last grinder the narrowest. In common with *Trogontherium*, the premolar in *Castoroides* exhibits a short extra fold (tube) on the front point, where the molars each show only three. As differing entirely from the other castorids, is the absence of an enamel layer round the teeth; in *Trogontherium* this layer may be very thin, or altogether absent at some places. The tubes of enamel each enclose a dentinal portion and are separated from each other by equally broad masses of cement; they remind us, as WYMAN (1846) has remarked, of the structure of the elephant's teeth. The oblique position of the enamel tubes suggests *Eucastor tortus* LEIDY, from which, in a simple way, the strong hypsodont grinders of *Castoroides* might be deduced (see p. 286). Among the species of *Steneofiber* (*Chalicomys*) we find some which are more hypsodont than *Trogontherium* (*e. g. Steneofiber jaegeri* KAUP); others, which are brachydont, are suggestive of *Hystrix* teeth, like those of *Steneofiber viciacensis*. In the last-mentioned the lower row of teeth may be as much as 21 mm. long, in the larger species, *e. g. Steneofiber jaegeri*, as much as 31 mm. (DEPÉRET, 1887), in *Castor* even 38 mm.; in *Trogontherium* from Tegelen 38 mm., from Mosbach 43 mm.; in *Castoroides* from 68 mm. (MOORE, 1890) to 70 mm. (WYMAN, 1846, and HAY, 1914).

Upper Grinders. (Pl. VIII.)

These teeth also have been treated by NEWTON (1882), who gave a detailed description of three rows, each with three grinders, from the Forest Bed, and compared them with the three teeth in the French skull and with the complete series in the Russian skull. Of these five series the last-mentioned is the youngest, the lingual fold on all the teeth being still open to the exterior of the tooth, but the three labial folds already closed.

Subsequently, in 1892, NEWTON published his description, already referred to more than once, of the skull from East Runton, which is furnished with an entire set of teeth in a somewhat later stage of wear than those in the Russian skull, as the lingual fold on all the teeth has just detached.

After this only one premolar of the upper jaw, from the Pleistocene of Copford, has been described (NEWTON, 1916) which, as regards the dimensions given, agrees with the premolars from Tegelen. In the illustration the broken posterior point has been restored too bluntly by the artist, and now resembles the grinding surface of a lower tooth. This premolar had already been described and figured by BROWN in 1852, and also by LYDEKKER in 1885, and termed a tooth of a "castorid rodent". According to SCHLOSSER

(1902), this tooth most resembles the teeth of *Dipoides* from the South German Bohnerz formation, and was therefore named by him *Dipoides Lydekkeri* n. sp.

The youngest upper teeth I saw among the Teglian remains are in the collection of St. Joseph's College. Together with three right molars (figs. 2, 3, 4) in a very early stage of wear, a left milk tooth (fig. 1) was found, fragments of very young right and left upper and lower incisors (Pl. VI), besides a small left petrotympanic. Without doubt these remains have all belonged to the same young animal. On the grinding surface of the milk tooth, where all the folds are still open, the inner and the anterior outer folds lie in each other's elongation, as is the case in all upper grinders. Behind these two lies the long middle outer fold, followed by a very short accessory fold behind which again lies the third outer fold reaching over the crown to the inner side of the tooth. Thus, except the small extra fold due to the very early stage of wear of this young milk tooth, the same pattern occurs on the grinding surface as on a young premolar. The anterior fang is flat and broken off. The round posterior fang projects backwards and somewhat outwards, and is probably likewise broken off; it lies almost above the small accessory outer fold. Between these two fangs, almost above the anterior outer fold, a circular hole is to be seen, which leads me to suppose that a second round fang has been present, just as on the outer side of the molars; besides the broad anterior fang only one round fang occurs on the permanent premolar, however.

A still younger upper milk molar, from the Forest Bed of East Runton, is preserved in the British Museum. Here the pulp cavity is still open at the root side, and the crown is so little worn off that the grinding surface consists solely of many minor islands surrounded by enamel and separated by grooves. In a more advanced stage of wear these islands will coalesce more and more until the stage described above is reached. Then follows the stage of wear described and illustrated by NEWTON (1882), in which the milk tooth is almost pushed out by the premolar.

The three right molars found together with the left milk molar have been hardly worn, the front one (fig. 2), as a matter of course, the longest. This latter presents three transverse grooves across the grinding surface, of which only the front one is interrupted in the middle, being formed by the inner and the anterior outer fold together. The crown is thus divided into four transverse sections, the anterior one of which bears a minute circular enamel island. A similar pattern is also exhibited by very young beaver teeth; "completely separate transverse enamel-folds" occur, as LÖNNBERG (1909) has described and figured them.

The said grooves can be seen on the inner surface of the tooth as an anterior groove about 10 mm. long with two very short grooves behind, and on the outer surface as the three ordinary grooves of the labial folds, the middle one of which is the longest (5 mm.) and the posterior one (3 mm.) the shortest.

The second molar of this set (fig. 3) exhibits the same view, but as it is less worn, there occur two more very short folds on the outer side, namely, one before, and one behind, the middle fold. These two molars naturally still exhibit open pulp cavities in which two enamel tubes can be seen, of which the shorter posterior tube in m_1 has just closed. That only two tubes are seen (from the inner and the middle outer fold respectively), is a consequence of the tubes of the two other outer folds not continuing further in the interior of the tooth than to half its height. The islands on the grinding surface, resulting from these folds, are thus the first to disappear, — the same case as we found on the first and second molars of the lower jaw.

The last molar (fig. 4) has been hardly worn; on the front part only the tops of the very short pillars are cut. The pattern of the grinding surface is therefore still complicated; in the pulp cavity the enamel tubes are all already closed. These on m^3 are five in number, as the two front folds lying in each other's elongation form no more than one tube, and at the hinder part two short additional folds occur.

This very young series of molars is followed in point of age by a row of three molars in the collection KRAUSE (fig. 5). Here the front molar exhibits on the grinding surface the usual pattern already known of the lower teeth: three folds on one side and one on the other. The two extremely short inner folds have just been worn off, so that the middle and the posterior transverse groove are closed at the inner side and have become outer folds. The tubes in the still open pulp cavity are closed. M^2 has reached the same stage of wearing as m^1 of the last-mentioned younger series. M^3 here is just cut over the whole crown, and the pattern shows three transverse grooves dividing the tooth into four portions; the front groove is interrupted. This tooth has reached a slightly older stage than m^2 of the younger series, for on the outer side of the two middle sections two small islands occur, the result of two small additional outer folds. A clear difference between this molar and the two other ones, however, lies in the occurrence of two other distinct short outer folds behind the three main folds, the posterior one of the two being already fully detached. The pulp cavity is closed, and an anterior flat broad fang and a posterior rounded triangular fang are in course of formation.

In the collection at Berlin there is a large number of hindermost molars which show various transitional stages between the situation last described and that which we see in m^3 of the series of somewhat older teeth in the collection at Vechta (fig. 6). Here, namely, the lingual fold and the two outer folds are still open, but the margin of the grinding surface shows no other interruptions. The two posterior outer folds are already detached, and stretch in the form of narrow tubes deep into the pulp cavity. This stage is also seen on the only m^3 among the material from Jockgrim (fig. 18); remarkably enough, there are only three outer folds on this specimen, as the anterior one, which normally lies in the elongation of the inner fold, is altogether wanting. Whether this must be considered as an abnormal case even for specimens from Jockgrim, cannot be determined until more third molars have been found there. To describe all the individual variations in the pattern of the young third molar would be superfluous. Figs. 11 to 17 illustrate several of them, from which it is evident that the different patterns are caused by some folds running over into one another.

If we now regard the premolar in the row of teeth in the collection at Vechta (fig. 6), we see that the posterior outer fold on it is already closed, as is also the small inner fold lying behind it. A much younger, still uncut, premolar is to be found in the collection at Steyl (fig. 23), and shows on the crown view three transverse grooves, of which only the anterior one is interrupted in the middle by the inner and the first outer fold touching each other there. The middle groove is formed by what is later the middle inner fold, and the posterior groove by the later posterior fold. Quite at the posterior point of the crown lies a circular pit. On the outer side (fig. 23*b*) of the crown these three grooves continue as an anterior one, about 5 mm. long, a middle one of 4 mm. and a posterior one of 3 mm. Likewise on the inner wall the three grooves are to be seen (fig. 23*a*), of which the posterior two are only 1 mm. in length, but the anterior one, which will soon be the only inner fold left, is more than 10 mm. long. As the enamel wall of this tooth has been broken off on the root-side, the enamel tubes lie exposed here. Also on the somewhat older premolars of figures 24 and 25 the pulp cavity is open, and these teeth still exhibit the symmetrical juvenile pattern on the crown. Such a pattern is also distinct on the premolar of the series at Vechta (fig. 6), where the two minute inner folds are closed. In course of wear the inner side with one fold shows a marked difference from the outer side of the grinding surface with its three folds. On the first and on the second molar of the last-mentioned series all three outer folds have detached in the order to be expected from the lengths given for the grooves on the outer wall of the crown.

The next stage (fig. 7) following upon that of fig. 6, and found among the series of teeth from Tegelen, is but little older than that of the Russian skull. On each tooth, with the exception of m^1, the inner fold is still open. The series from West Runton (NEWTON's fig. 15) lacks the hindermost molar, but the other grinders are in the same state of wear as this row from Tegelen.

As we saw on the lower teeth row, the folds are not yet all closed when the earliest formed islands (those of the posterior outer fold on m^1 and on m^2) fall out (fig. 9), owing to the enamel tube not continuing further into the interior of the tooth. The first molar on both sides in the skull from East Runton, and the right one in the fragment of skull from Mosbach, are in this stage of wear. At the same time, sometimes even rather earlier, the anterior outer island on these molars is worn out (fig. 8). The four grinders exhibit then four, two, two and six islands respectively. Before being shed m^3, as a rule, loses the anterior outer island (fig. 10), so that three broad and two (or one) small islands represent the oldest stage in this tooth. This number and the size of the islands is not so constant on m^3 as on the other grinders; there may be seven (fig. 9), or six, as on most m^3 from Tegelen (figs. 7 and 8) and on those in the Russian skull, or five, as in the two jaw fragments from Mosbach, in the one from Hessler and in the skull from East Runton, or four, as in the tooth from Jockgrim (fig. 18). The order in which the teeth fall out is the same as in the lower jaw. Abnormal patterns or many minor islands may, as in the lower jaws, appear in a very advanced stage of wear (fig. 29).

The continual change in the grinding pattern with advancing age is a typical difference from the situation in *Castor*, where the pattern on the upper teeth, consisting of three outer and a single inner fold, all open to the exterior, remains very long constant. The process of the change is in principle, however, exactly the same there as in *Trogontherium*, and NEWTON's view (1892) that "in the Beaver both the internal and external enamel folds are open down to the basis of the teeth, so that they always appear as folds on the grinding surface" cannot be maintained, as a glance at VON REICHENAU's fig. 16 of an old upper jaw of *Castor* from Mosbach shows. Here the inner fold on the three grinders is still open, running, as it does, down to the root, but the outer folds have all detached to form islands, while on the grinding surface of m^1 the anterior and the posterior island have already dropped out. These teeth are so far worn off that not more than one-third of their height shows an enamel covering; for the rest the tooth in, and also partly outside, the socket consists of an undivided cylindrical "root" (our fig. 40) of secondary dentine (osteo-dentine), a tissue to which the pulp changes when the pulp cavity closes. So PAUL HEINRICH (1908) remarked, in my opinion rightly, that the cheek-teeth of *Castor* are not rootless. The pulp cavity (figs. 42, 41) is shut off in old specimens just in the same way as is described of the lower teeth of *Trogontherium* (VON REICHENAU); a cement covering round the base of the crown only occurs in *Castor*.

That the single inner fold in *Castor* is co-extensive with the tooth is a typical feature whereby the teeth of the two animals can be distinguished from each other. Another character which, however, applies only to the teeth of the upper jaw, is that the considerable curvature of these teeth lies, in *Trogontherium*, in a sagittal (fig. 35), in *Castor* in a transversal plane (fig. 38). In consequence the open pulp cavities in the latter may protrude into the fossa orbito-temporalis, and more especially so in young animals. Another result is that in old beavers the grinding surfaces have considerably increased in width and assume the peculiar form described by VON REICHENAU, and very distinct in his figure 16, and in fig. 43 of this publication, which shows an old upper molar of *Castor fiber* from Jockgrim, where two folds have closed to form islands.

In *Steneofiber* and *Palaeocastor*, as well as in *Trogontherium* and *Castor*, the two principal folds ("Hauptfalte", TULLBERG, p. 472) can be distinguished from the by-folds ("Nebenfalte"), *i. e.* the anterior and posterior of the three folds of one side, by their being shorter and first worn out. The difference is very distinct in *Steneofiber viciacensis* (FILHOL, 1879) and on the young lower teeth of *Steneofiber minutus* (STROMER, 1928, Pl. II, fig. 17), which are divided by the two principal folds into an anterior and a posterior half, each with an enamel island derived from a by-fold. The principal folds differ again from each other in the aforesaid animals, since the fold which lies between the two by-folds is slightly shorter, and earlier detached from the exterior.

The pulp cavities of the upper teeth close in the same way as has been described of the lower teeth. A broad, flat fang is formed, here on the anterior side of the tooth. The number and position of the fangs have been treated in the description of the alveoli in the maxillae. It must merely be observed here that NEWTON (1882) expressly mentions two small fangs placed on the outer side, also occurring on the premolar besides the flat, broad fang. His figure 15*b* shows this premolar on which the fangs are broken off. I could not find a vestige of a second round fang on any of the numerous isolated premolars from the Teglian Clay (figs. 26, 27). On m^1 and m^2 the two small round fangs are always present; in a very few cases the outer of the two has fused with the flat anterior one (fig. 33).

Naturally the height of the teeth in the skulls could not be measured, but neither the length nor the width of the separate grinding surfaces are given either. As was stated in the description of the maxillae, the alveolar length of the row of teeth in the Russian skull is 44 mm., in that from East Runton 38 mm., on the skull fragments from Mosbach 40 and 41 mm. and on the seven adult series from Tegelen it varies between 37.5 and 39.0 mm.

The premolar from Copford, described by NEWTON in 1916, is the only one of which the dimensions are given.

The height of this premolar is 28.7 mm., but according to the figure this tooth has been broken off at the root end. Comparing the dimensions of the figure with those on the premolars from Tegelen, it will be seen that the English tooth is about 1 mm.

higher than the others which (measured along the convex side) may grow to be 37 mm. high. At first this height is that of the long enamelled crown, but by the growth of the fang and the wearing of the crown, the height of the enamelled portion becomes less and less. In total 40 mm. of enamel is formed on the upper premolar from Tegelen, but by the time its growth has ceased some millimetres have already been worn off. On the concave side of the tooth the enamel does not extend so far to the base. From the dentinal portion of this side the round root grows up.

As the curved upper premolars of *Trogontherium* grow out of the socket, the direction of the grinding surface with respect to the longitudinal axis of the tooth changes continually; they curve out of the socket and wear off much quicker in front than behind. The result is that on very old teeth the difference between the height of the enamel layer in front and behind is but a few millimetres (fig. 30). The same takes place in the molars; there, too, the teeth curve out of the socket. In m^1 the height of the enamel on the convex side is maximal (thus in young specimens) about 30 mm.; in m^2 this measurement is approx. 27 mm., in m^3 25 mm.

For the length (antero-posterior diameter) of the grinding-surface the greatest dimension has been taken perpendicular to the direction of the folds. This measurement on the many adult premolars from Tegelen varies from 10.5 to 12.5 mm. On the three premolars from Mosbach it is 12.8 mm., on those from Hessler (near Mosbach) it is 12.6 mm. NEWTON gives 8.5 mm. for the premolar from Copford, which is very young and damaged at the posterior point. If, on the same teeth, the smallest antero-posterior diameter between the grinding-surface and the fangs be measured, we arrive at much smaller dimensions, *e. g.* 8 to 9 mm. on the premolar from Tegelen. NEWTON found 9 mm. on the Copford tooth.

On m^1 and m^2 the length of the grinding surfaces is nearly always the same, and on those from Tegelen lies between 7 and 8 mm., on those from Mosbach it is 8.8 mm.; on m^1 from Hessler 8.5, on m^2 9.3 mm. On the young m^1 from Jockgrim, in the collection at Stuttgart, the length of the grinding surface is 8.1 mm., on the old one 9.2 mm.

The average length of the grinding surface on the adult m^3 from Tegelen varies between 10.2 and 12.0 mm.; usually it is 11 mm. On the upper jaw from Mosbach this length is 11.7 mm., in the one from Hessler 12.4 mm.; on the young molar from Jockgrim (fig. 18) it is 10 mm., the same as on that from Mauer in the collection of Prof. FREUDENBERG. As the length of the grinding surface has been measured perpendicular to the direction of the folds, the sum of this dimension on the four grinders is greater than the length of the entire row; *e. g.* on the younger Mosbach jaw the sum is 42.1 mm., while the length of the whole row is 38 mm. The total length of the grinding surface of the row in the Hessler jaw is 40.1 mm.

For the width of the grinders the greatest diameter has been taken in a direction parallel to the anterior fold. Here we find variations between 11.5 and 13.6 mm. on the premolars from Tegelen, and 13.5 mm. for the width of the grinding surface on a specimen from Mosbach; 13.8 mm. on an isolated premolar from the same locality in the collection at Wiesbaden; on the one from Hessler 14.5 mm., and on one still in place in the jaw from Mosbach 14.3 mm. As both these last are old specimens the grinding surface slopes somewhat upwards and outwards, and is thus rather broader.

NEWTON gives 12.7 mm. as the greatest width of the grinding surface on the young premolar from Copford, and as the width of the grinding surface 10.0 mm. The young premolar from Mauer has a maximal width of 14.1, while the width of the grinding surface is 10.8 mm. The greatest width of the two first and second molars lies very near the fangs, so that the older the teeth the broader is the grinding surface. M^1 is, as a rule, a trifle broader than m^2; on the former from Tegelen the width varies between 8.6 and 9.9 mm.; on m^2 between 8.4 and 9.7 mm. On the jaw from Mosbach the width of m^1 is 10.3 mm., of m^2 10.0 mm. On the maxillary fragment from Hessler these dimensions are 10.2 and 10.4 mm. The young m^1 from Jockgrim has a maximal width of 9.9 mm. and a grinding surface width of 8.6 mm.; the maximal width of the older m^1 from the same locality is 11.1 mm., and the width of the grinding surface 10.5 mm.

Of the molars m^3 is usually the broadest; on the teeth from Tegelen it is from 8.5 to 10.0 mm.; on the jaw from Mosbach m^3 is distinctly narrower than the other molars, *viz.* 9.3 mm., on that from Hessler but little narrower than the others, *viz.* 10.0 mm.

The isolated grinders from the upper jaw are easily distinguishable from those out of the lower jaw, not merely owing to their being more strongly curved, but, moreover, to their being rounded on the side of the three folds; the lower teeth are flat on that side. Another difference apparent on the grinding surface is that the single fold of the one side lies just in the elongation of the anterior fold of the other side; on the lower jaw the single fold interposes between those of the other side.

If the small fangs are preserved on the molars, their position will be a sufficient indication; on the upper teeth both lie on the outer side of the tooth; on the lower molars one lies on the outer, the other on the inner side.

As on the lower jaw, the first and second molars are difficult to distinguish from each other, unless it be known that they belong to the same row. In young teeth some indication is to be found on the exterior of the tooth in the distance between the lower end of the fold grooves and the boundary line between crown and root, this distance being shorter in m^2. On molars where these grooves are already worn off, I have found as the only criterium that, if the molars be laid on their convex side, the outer side in m^1, *i. e.* where the small roots lie, is slightly concave from below upwards, the inner side convex. On the second molar it is just the outer side which is convex, the lingual side being generally straight or slightly concave. (Cf. figs. 31 and 32.)

The premolar is easily identified by its size and by its single round fang; the hindermost molar is distinguished by the conical form of the grinding surface; owing to this form LAUGEL (1882) gave to the skull from St. Prest the name of *Conodontes*.

The form of the grinding surfaces and their relative sizes in the upper grinders of *Castoroides* agree completely with those in *Trogontherium*; the hindermost molar, namely, has a long conical grinding surface with one enamel tube more than occurs on the three other teeth. The same form of m^3 occurs in *Dipoides problematicus* SCHLOSSER, and also in the Upper-Miocene *Steneofiber minutus* (STROMER, 1928). This is a remarkable fact, as in the other *Steneofiber* species and in *Eucastor*, as well as in *Palaeocastor* and in *Castor*, the last molar is the smallest, while in the geologically youngest *Palaeocastor* species the last molar is reduced.

Vertebral Column

Cervical Vertebrae. (Pl. VIII.)

Remains of the cervical vertebrae of *Trogontherium* have been found only at Tegelen and are now in the TEYLER collection.

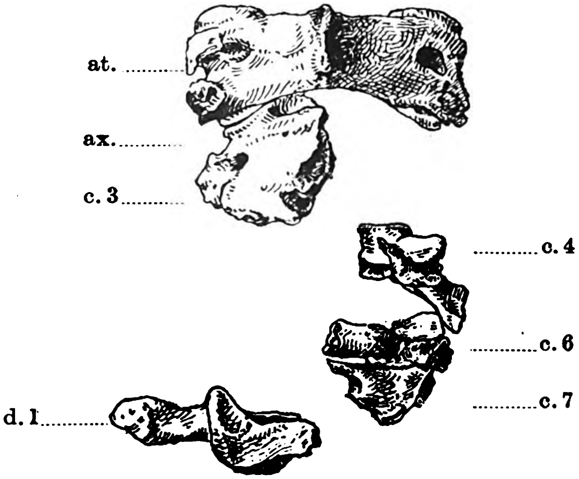


Fig. 6. Cervicals and first dorsal seen from above;
nat. size.

They comprise (text fig. 6) an almost complete atlas, the left half of the axis coössified with the third cervical vertebra, the right half of the fourth and a fragment of the right side of the arch of two coalesced vertebrae (most probably of the sixth and the seventh).

The *atlas* (fig. 44) lacks only the wings; the three foramina of the right side with the surrounding bone are well preserved and in their position resemble the position in the beaver. The groove which in both animals connects the three foramina is, in *Trogontherium* (text fig. 6) and most *Castor* individuals, bridged over by the base of the wing. In the recent animal, however, this groove may be open dorsally, owing to the bridge of bone from the anterior edge of the vertebra to the wing being missing, a condition which can be seen on the left side in the text figure. HOLDEN (1917) gives an illustration of the dorsal view of the atlas of *Castor fiber*, *Castor subauratus* and *Castor canadensis phaeus* (both the latter are American "subspecies" of *Castor*), from which it appears that the atlas of *Castor subauratus* bears the greatest resemblance to that of *Trogontherium* by reason of the large antero-posterior width of the arc. In view of the great variability of the skeleton of *Castor fiber*, it is to be regretted that HOLDEN had but one specimen of the European beaver to compare with the different American subspecies.

What is particularly striking in this first vertebra is its robustness.

The dorsal arch is flat, whereby the vertical diameter of the foramen vertebrale is less than in *Castor*. The arch has a much greater antero-posterior extent, so that, as is the case in *Castoroides* (MOORE, 1890), it forms a roof over the neural groove lying above the posterior articular surfaces, thus rendering it narrower and deeper than is the case in most of the *Castor* individuals. The spinal process, being low anteriorly and sloping up backwards, is more developed than in *Castor*.

All the articular surfaces are larger than in *Castor* and stand more vertical; they do not approach each other so much ventrally. The atlas, as seen from the front, appears to be rectangular; in *Castor* the contour is oval. All the articular surfaces in the latter are directed obliquely inwards; in *Trogontherium* they look rather more backward and forward.

The greatest width of the atlas (without the wings), measured along the cranial articular surfaces, is 34 mm. in *Trogontherium;* in many *Castor* individuals it varies between 32 and 34.5 mm. The minimum distance between the posterior articular surfaces is 12.5 mm., as in *Castor*. The antero-posterior diameter in the middle of the arch is 11.6 mm. against 6.3 to 8.8 mm. in *Castor*; the height of the foramen vertebrale is 13 mm. against 14.5 to 15.5 mm. in *Castor.*

The only fragment of the *axis* (fig. 46) that I found among the Teglian material is an imperfect left half. It shows the axis thoroughly anchylosed with the *third cervical* vertebra, but the foramen intervertebrale betrays at once the double nature of this fragment (fig. 46*a*). The neural arch is broken off dorsal to the articular surfaces, but there is just enough left to show a narrow split between an anterior, broader part and a posterior, narrower portion. This points likewise to the fusion of two vertebrae, as does also a foramen directed outward and backwards on the ventral surface of the fused vertebrae between the two short transverse processes, which are again coössified at their extremities.

This fusion of the second and third cervicals also occurs in some *Castor* individuals. Various forms of transition can be found from the situation as above-described of *Trogontherium* to the complete separation of these vertebrae. We do not know whether this fusion in *Trogontherium* is constant in its occurrence, but the fact that in *Castoroides*, which resembles *Trogontherium* closely in the form of its vertebrae, the only epistropheus described (MOORE, 1890) has completely fused with the third vertebra, makes this very probable. In this very large rodent the coössification is so complete that MOORE writes: "The double character was not discovered until an effort was made to homologize the foramina". The same phenomenon, though in a lesser degree, occurs in *Palaeocastor fossor* PET., and has been described by this author (1905) as follows: "The third cervical is characteristic in *P. fossor* on account of its tendency to become co-ossified with the axis. In the type this vertebra is clearly separated from the axis, but the encroachment of the latter bone on the third cervical shows that in old individuals these two vertebrae may become co-ossified. In the co-type the third cervical is entirely co-ossified with the axis". In *Trogontherium*, as in *Palaeocastor*, the foramen intervertebrale lies considerably higher than the foramen transversarium of the axis (fig. 46*a*); in *Castor* these foramina lie on the same level (fig. 47*a*).

The odontoid process of the axis has been broken off. As was to be expected, the articular surfaces for the atlas stand more vertical and are directed more forward than in *Castor*. They have the shape of an ellipse cut straight off ventrally, whereas in *Castor* they are generally bean-shaped and higher than they are broad.

The greatest width of the foramen vertebrale is to be found lower down, while the centrum of the vertebra is flatter and the distal articular surfaces (of the third vertebra), which are appreciably broader than in *Castor* and stand vertical, are situated more ventrally. Above the foramen intervertebrale this double vertebra in *Trogontherium* is convex upwards, so that in fig. 46*b* the articular surface for the fourth vertebra does not project beyond the arch, as is the case in *Castor* (fig. 47*b*), where the longer, narrower surfaces are constricted in the middle.

The only measurement of any value which I was able to take on this fragment was the distance between the foremost point of the anterior and the hindmost point of the posterior articular surface. This was 20.5 mm., just the same as I found this distance to be in two *Castor* skeletons, in one of which these vertebrae were entirely free of each other and in the other completely fused.

Also of the *fourth cervical* vertebra nothing but a fragment (fig. 48) has been preserved, but on this it can clearly be seen that the centrum is flatter again and the lateral processes shorter. As in the preceding vertebrae, the greatest width of the foramen vertebrale lies lower, and the articular surfaces, which are larger, stand more vertical and directed forward and backward. Here, too, is a similarity with *Castoroides*, respecting which MOORE writes: "The articulation surfaces look far more directly backward and less downward than in *Castor*". The short vertical wings which, on the lateral edges of the anterior surface of the cervical centra in *Castor*, form the outer sides of two grooves, are entirely wanting in *Trogontherium*, although the centrum is slightly concave at both ends of the front surface. As the cranial and caudal articular surfaces are directed forward and backward, they lie parallel behind each other with a slope of about 45°, so that they cannot be seen in *Trogontherium* in a side view in fig. 48*b*, but the caudal facet can be seen in *Castor* (fig. 49*b*). The antero-posterior diameter of the vertebral centrum I estimate to be practically the same as that in *Castor*, *viz.* 6.5 mm. The height and the width of the cranial articular surface are 6.6 and 6.5 mm. in *Trogontherium*, against 5.5 and 4.3 mm. in *Castor*.

The fragment in the TEYLER collection of the *sixth cervical* vertebra anchylosed with the *seventh* consists of the outer portion of the right side of the arches and their pedicles with the articular surfaces and the bases of the broken off transverse processes.

Here again the same difference exists between position and size of the articular surfaces and those in *Castor*. The cranial articulation surface of the sixth caudal is not oval, as in *Castor* (fig. 51), but pentangular (fig. 50). The caudal facet of the seventh is oval, and so very convex transversely that the inner half of the surface, which looks backward and downward, makes a rounded angle of nearly 90° with the outer half, which is turned outward and downward. Length and width of the anterior facet are 7.3 and 6.5 mm. in *Trogontherium*, against 6.0 and 4.4 mm. in *Castor*. Length and width of the posterior articular surface are 6.9 and 5.3 mm. in the extinct animal; in *Castor* 5.6 and 5.5 mm. The antero-posterior diameter of the vertebrae is nearly the same in both animals.

In *Trogontherium* the seventh vertebra is appreciably narrower than the sixth; in *Castor* they are equally broad. Fusion of these two vertebrae is sometimes seen in this animal (fig. 51), although, as far as I could determine, this is confined to the extremities of the transversal processes, as has been described by WIEDEMANN (1804).

Dorsal Vertebrae. (Pl. VIII.)

Of only three dorsal vertebrae have I found fragments in the various collections, and these were the right half of the first dorsal vertebra belonging to the afore-mentioned last cervical in the collection in the TEYLER Museum, a much damaged vertebra from the middle of the dorsal region (probably the sixth or seventh) and a centrum of one situated more backward.

Both the latter belong to the collection of the Natural History Museum, at Maestricht. Owing to their delicate structure, fragments of only three vertebrae have been found out of all the 14 or 15 dorsals we may assume for *Trogontherium*, as we find these numbers in *Castoroides* and in *Castor* also.

In the *first dorsal* vertebra (fig. 52), of which the left half has been preserved in a perfect condition, as in the cervicals described above, the foramen is broadest lower down and the centrum is compressed vertically, while the articular surfaces are larger. The direction of the cranial articular surfaces on this vertebra is the same in *Trogontherium* and in *Castor*, namely slightly upward and much inward. As we might expect, however, the cranial articulating surface of the first dorsal is very concave transversely and embraces the articular surface of the last cervical.

The posterior articular surfaces stand nearly horizontal in *Castor;* in *Trogontherium* they look outward and turn downward. Just as with the cervicals, the processi transversi are shorter. A round concave fovea transversaria for the tuberculum of the first rib lies on the back of the knob-shaped extremity of this process (fig. 52), in *Castor* on the under side (fig. 53).

In the *Castor* skeletons, in which the third cervical has completely fused with the axis, it may occur (fig. 53) that the first dorsal vertebra bears a very short rib entirely coössified with the processus transversus. There is no connection with the sternum, and the small rib projects hardly beyond the processus transversus. Whereas in such a vertebral column the first dorsal vertebra assumes the appearance of a cervical, so that 7 free cervical vertebrae again occur, it is remarkable that the normal number of dorsal vertebrae (14) shows a tendency to reappear, owing to the first lumbar having a movable short rib on one (fig. 5 on Plate IX) or both sides. On the left side lies a normal transverse process. Then there follow on this skeleton still five normal lumbar vertebrae, which number occurs in most specimens of the beaver and also in *Castoroides.*

A typical difference in the form of the dorsals in the two animals is seen in the fact that the radix of the arch with the articular facets stands somewhat lateral to the centrum in *Trogontherium*, whereas in *Castor* these facets lie above the centrum owing to the foramen being narrower, *viz.* only 13 mm. and in the other animal at least 18 mm. The vertebra here has more of the type of the broad, very flat cervicals. It is not possible to determine from the 26.7 mm. wide fragment whether it is the half vertebra up to the middle line; it can only be stated that this first dorsal with the processi transversi must have been at least twice as broad, *i. e.* 53.4 mm. In *Castor* this width is but 45.8 mm.

The posterior surface of the centrum bends laterally slightly forward; the flat, oblique fovea costales, which occur at this place in *Castor*, are in *Trogontherium* merely indicated by this slight concavity.

The fragment of a dorsal in the Maestricht collection (fig. 54), which exhibits the greatest resemblance to the *seventh dorsal* of the beaver, is conspicuously small, and it is not improbable that the vertebra belonged to a not yet full grown animal. That the anterior epiphysis when found, was separated from the centrum is no proof of this, however, as also in *Castor* and *Castoroides* the epiphyses of the vertebrae fuse with the centra either very late or not at all. The measurements correspond to those of a young beaver, but are less than those of an adult. The greatest width, height and length of the centrum are 16.0, 8.7 and 10.8 mm. respectively; in the young beaver 16.5, 8.7 and 10.4 mm.; the width and height of the foramen vertebrale are 8.0 and 5.3 mm., against 8.1 and 6.6 mm. in the young beaver. The spinous process which, like the processi transversi, is broken off at the base, shows the same backward slope; the foramen vertebrale is hardly larger than in *Castor*.

The second fragment of a dorsal vertebra (fig. 55) in the above-mentioned collection has probably come from the same skeleton, and is merely the centrum lacking the posterior epiphysis. It exhibits a centrum broader behind than in front, with the ventral surface slightly concave in longitudinal direction. The height of the cranial epiphysis is 7.0 mm., the width 8.5 mm. The length of the centrum I estimate to have been 12 mm. On the skeleton of the adult beaver all the dorsal centra are absolutely larger in every dimension; they have also relatively higher corpi, but these are narrower and the foramina higher. The ventral surfaces are much more concave and keeled in the recent animal. If these two fragments belonged to an adult animal, which is very doubtful, they are singularly small.

The longer collum on the ribs shows that the distance from the fovea costalis on the centrum to the articular surface for the tuberculum costae on the processus transversus must have been longer; the last facet, however, is narrower to receive a more elongated capitulum.

Lumbar Vertebrae. (Pl. IX.)

As was to be expected, the stronger lumbar vertebrae are represented by a larger number of remains, at least comparatively so, as these vertebrae are fewer in number (on most *Castor* skeletons and in *Castoroides* 5).

The most complete lumbar (fig. 1) is in the TEYLER collection and bears most resemblance to the first lumbar vertebra of *Castor*. In the collection at Berlin there are two fragments; one (fig. 2) is the centrum with the left root of the arch, and resembles most the third lumbar of the beaver; the other (fig. 3) will probably be a fragment of the last lumbar, and consists of the centrum and left root of the arch, and a small portion of the transverse process and of the prezygapophysis with its articular surface. Finally, I found in the collection WEINGÄRTNER the proximal epiphysis with a ventral portion of the centrum, most probably also of the last lumbar (fig. 4).

In regarding the almost complete specimen of a *first (?) lumbar* (fig. 1), it is obvious that the centrum is smaller than in all the lumbar vertebrae of *Castor*, and that the caudal edge of the basis of the spinous process slants backward.

Width, height and length of the corpus in *Trogontherium* are 17.9, 11.6 and 16.1 mm., in *Castor* 21.4, 14.0 and 17.4 mm.; width and height of the foramen vertebrale 13.5 and 5.6 mm., against 11.2 and 9.0 mm. in *Castor*. The width of this vertebra at the transition of the prezygapophysis into the anapophysis is 19 mm., in *Castor* 17.2 mm.

The angle between the postzygapophyses is less than 80°; a distinct ridge runs from the upper edge of the prezygapophysis forwards and a little downwards to the anapophysis, which is broken off. The fracture surface shows that on this vertebra the anapophysis is stronger than that of the *Castor europaeus* skeletons that I examined as to this point, and more like that of the last dorsal vertebra of this animal. Moreover, owing to the lack of the large foramina on the ventral surface of the centrum ("unglaublich grosz" is the term applied by WIEDEMANN to these foramina in *Castor*) and the slightness of the keeling, this vertebra of *Trogontherium* bears more resemblance to one of the last dorsals of the beaver than to a lumbar vertebra, which it undoubtedly is, as there are no articular surfaces on it for the ribs, and small portions of the transversal processes are still to be seen. Its similarity with the first lumbar of a skeleton of *Castor canadensis* in the Zoological Laboratorium at Amsterdam is very great; here, also, the anapophysis is strong and the ventral foramina are lacking; here the keel is sharp, however.

The dorsal surface of the centrum is, as in the recent animal, much hollowed out on both sides of the middle line and furnished with two very large holes for the blood-vessels. In *Castoroides* these holes are very large. MOORE writes: "Split a black walnut, remove the kernel from the divisions of one of the halves and we have similar-looking cavities."

The anterior epiphysis is slightly convex, the posterior slightly concave.

This first lumbar is thus distinguished from that of *Castor* by a smaller centrum and a broader foramen which, however, is much flatter, so that the sides of the arch are shorter but the roof broader. According to MOORE, in *Castoroides* also the neural arches on an average are decidedly flatter than in *Castor*.

One of the two fragments from the Berlin collection (fig. 2*b*) shows a keeled centrum (the distal epiphysis of which is lacking) larger than that of the vertebra just described. As only the root of the left half of the arch has been preserved without any apophysis it can be stated that the basis of a very faint anapophysis indicates that this vertebra cannot have followed immediately upon the vertebra in the Haarlem collection. Probably it is a fragment of the *third lumbar* vertebra which is distinguished from the corresponding one in the beaver by a smaller centrum, width, height and length being 19.8, 13.8 and 18.3 mm. respectively, against 22.7, 14.6 and 19.1 mm. in *Castor*.

The other fragment in the collection at Berlin bears entirely the character of the *last lumbar* vertebra of the beaver, although the centrum is again narrower and flatter, not keeled and furnished with smaller feeding foramina. The foramen vertebrale is again flatter and narrower. No trace of an anapophysis is present here, but another feature of both the two last lumbars of *Castor* is prominent, namely, the caudal epiphysis projects further downward than the cranial (fig. 3*b*) or, in other words, the longitudinal axis of the vertebra stands obliquely upon the anterior and posterior surfaces. The incisura vertebralis caudalis is very large. The articular surface on the prezygapophysis is oval in shape and concave transversally (fig. 3*a*). Width, height and length of the centrum are 21.8, 15.8 and 19.9 mm. respectively, against 25.1, 17.7 and 19.7 mm. in *Castor*. The width of the foramen is 11.5 mm., in *Castor* 14.0 mm. The length of the arch laterally between the anapophysis is 14.9 mm. in *Trogontherium*, against 13.4 mm. in the recent animal.

The fragment in the collection WEINGÄRTNER, presumably of the last lumbar, exhibits two large feeding-foramina on the ventral surface, which is very concave from before backwards.

Sacral Vertebrae. (Pl. IX.)

If I am not mistaken, all the vertebrae of the sacrum (fig. 6) are represented in the collection at Maestricht, but all of them much damaged. The collection WEINGÄRTNER possesses only the last sacral vertebra (fig. 9); the Berlin collection likewise the last, but with the posterior half of the last but one coalesced with it (fig. 10). As these vertebrae are all damaged, I can only state with certainty that the first and the last sacral vertebra (the latter in three specimens) are present and three vertebrae lying in between them. Whether there ought to be still another vertebra between them cannot be made out, but it does not appear probable to me, as in *Castoroides* only four sacral vertebrae occur, and this number is also generally assumed for *Castor* (CUVIER); WIEDEMANN mentions three sacral vertebrae and LECHE three or four. On the beaver skeleton already mentioned, which exhibits the shifting of the vertebrae forwards (the first dorsal having the character of a cervical and the first lumbar (fig. 5) showing a short rib at the right side). I found five sacrals fused together, so that the first caudal vertebra on this skeleton is not, as is usually the case, the 30th. or 31st., but the 33rd. (7 c. + 14 d. + 6 l. + 5 s.). The number of sacral vertebrae of *Trogontherium* is very probably not more than five. The set of five vertebrae in the Maestricht collection is from one and the same discovery; their similar size, colour and state of preservation are all indications that they are from the same individual. Except the cranial epiphysis on the anterior of these five, all epiphyses are lacking, which is not surprising, since this is a feature which is seen in all fossil Castoridae. The series of sacrals in the collection at Maestricht has belonged to a juvenile animal, as will appear from the dimensions of the other specimens of last sacrals. Where two sacral vertebrae are found connected with each other (fig. 10*b*) the epiphysial lines anterior and posterior to the epiphysial disc are clearly to be seen.

As in the lumbar vertebrae, the *first sacral* is characterised by a smaller centrum (fig. 8) in comparison to *Castor*, with on its ventral surface two depressions on both sides of the straight medial line. The foramen vertebrale is again much smaller, while the articular processes of both sides approach each other more closely, the distance between the prezygapophyses being 6.3 mm. in *Trogontherium*, against 11.3 in *Castor*. Width (anteriorly), length (ventrally) and height (anteriorly) of the centrum are 22.2, 18.7 and 14.8 mm. respectively, against 24.7, 20.9 and 16.9 mm. in *Castor*. Width and height of the foramen vertebrale measured anteriorly were only 7.5 and 5.0 mm., against 14.0 and 8.0 mm. in *Castor*. The greatest width between the most anterior points of the sacrum is the same in both animals, *viz*. nearly 60 mm.

The foramina intervertebralia between the last sacral vertebrae, like those of *Castor*, will have been entirely shut off by a bony lamel, because here, too, the spinal nerves do not issue between the vertebrae, as is usually the case, but anterior to these closed holes, boring through the roots of the arch (figs. 6, 7, 10*b*). These foramina, lying caudal from the bases of the transverse processes, occur as a rule in the first ten caudals in *Castor;* they are not closed in the caudals by bone, but by a membrane. A similar going out of the spinal nerves through the roots of the arch occurs in different animals in various parts of the spine (GEGENBAUER).

The facies auricularis for the articulation with the ilium occupies on the first sacral vertebra only the caudal half of the almost sagittally standing outer surface of the wing. The cranial half points to a ligamentous connection with the pelvis, as is also seen in *Castor*, where this part is not broadly tongue-shaped and flat as in *Trogontherium*, but becomes narrow anteriorly. In *Castor* the three or four pairs of processi transversi form a dorsal flat continuous wing, which becomes broader backwards, just as in *Castoroides*. On the vertebrae of *Trogontherium* only the bases of very broad transverse processes are to be seen (fig. 6).

On all sacral centra of *Trogontherium* there runs on both sides of the ventral surface a distinct impression of a blood-vessel, backwards and outwards towards the foramen for the spinal nerve (figs. 7 and 9*b*).

Both the processi transversi and the centrum of the *second sacral* vertebra are entirely coössified with the first. Only a small cranial portion of the second has been preserved in the fossil (fig. 6), on which it can be seen that the bony portion surrounding the first pair of foramina sacralia ventrally, has not thickened nearly so much as in the beaver.

As was mentioned above, the *third sacral* of the Maestricht series lacks the epiphyses, and the processi transversi, like the neural spine, have been broken off at their base. Tiny facets on the postzygapophyses and on the sloping sides of the arch point to a not yet complete fusion with the following sacral. Similar facets I also found on the same surface of the third sacral of a not yet full grown beaver, on the skeleton of which the sacral vertebrae were all separated by maceration, except the second and the third, the arches of which apparently coössify before the centra fuse. On the third vertebra of *Trogontherium* the prezygapophyses have been broken off at their base. The centrum without the epiphysis is, cranially, somewhat higher than it is broad, but caudally broader than it is high (16.4 and 13 mm.). In the middle of the total length the centrum is much less constricted than on the sacrum of *Castor*, namely, on each side slightly more than along the middle line.

The *fourth sacral* is likewise much damaged. On the cranial surface vertical facets occur on the sides of the arch, and on the blunted praezygapophyses horizontal facets have been preserved of the same type as described of the preceding vertebra. This vertebra, too, is only slightly concave on its ventral surface, and the distance between the zygapophyses of both sides is short.

That the series of vertebrae just described is not that of an adult animal is further evident from the fact that the *last sacral* is much smaller than the one in the Berlin collection, which has coössified with the fragment of the last but one (fig. 10*b*), and likewise smaller than a dito vertebra belonging to the collection WEINGÄRTNER (fig. 9).

The specimen in the Berlin collection is the best preserved, since it shows an undamaged neural spine, so rarely found. This has been broken off anteriorly just at the place where the crest, which connects all the spinous processes of the sacrals at their tops, thickens again above the large transversal foramen. On the beaver skeletons which I examined, this dorsal connection between the fourth and the fifth sacral does not exist where the sacrum consists of five coalesced vertebrae.

The last vertebra of the sacrum in the collection at Vechta is still stouter than the one in the Berlin collection. The arch is complete, but all the processes have been broken off, as also the epiphyses. Cranially, there are again facets similar to those we saw on the third and fourth sacrals and which point to a fusion with the one before. Also on this large specimen the width and height of the centrum and the foramen vertebrale are less than in the beaver: 18.2 and 14.5 mm. being the dimensions on the centrum, 5.2 and 3.6 mm. on the foramen in *Trogontherium*, against 22.5 and 16 mm., 6.0 and 5.9 mm. in *Castor*. The length of the last sacral is greater, however, and is 23.1 mm. on the Berlin vertebra, against 21.1 in the beaver. The postzygapophyses lie closer together, and the neural spine is thicker, broader and higher (figs. 10*a*, 11).

Caudal Vertebrae. (Pl. IX.)

Among the Teglian material I found twenty-six caudal vertebrae, eleven of which are in the collection at Haarlem, thirteen in that at Berlin, one in the Maestricht and one in the Oldenburg collection. Of all these vertebrae not a single perfect one has been preserved. As is to be expected, the largest number of specimens are of the forward and strongest caudals, whereas the last are probably lacking. There are three specimens which bear a great resemblance to the *first caudal* vertebra of *Castor*; of these the specimen in the Berlin collection (fig. 12) is the least damaged, as only the left prezygapophysis and the transverse processes are missing. This vertebra follows upon the last sacral vertebra (fig. 10) of the same collection and has, without doubt, belonged to the same individual, as also a much damaged second caudal vertebra. Besides the differences already mentioned in the description of the sacral vertebrae between these and the corresponding ones of the beaver, we can further state regarding the forward caudals that the postzygapophyses stand slightly, the prezygapophyses much, closer to each other than in the recent animal, that the transverse processes are thinner and their angle with the vertebral centrum is obtuse caudally (fig. 14*b*). On the forward caudals the transverse processes, probably still fairly long, are all broken off, but what is left of them leads me to suppose that these processes were not so long as in *Castor*, a fact which MOORE also mentions with regard to these processes in *Castoroides*. Of several caudals of different sizes, I was able to determine the precedence of the first five from the position of the foramen of the spinal nerve already mentioned in describing the last sacrals; this foramen lies the higher with respect to the transverse process according as the vertebra lies further behind the sacrum (figs. 12, 14*a*, 15). These foramina are smaller than in *Castor*, and on the fifth caudal no longer observable. They disappear earlier than in *Castor*, where this foramen still occurs on the eighth vertebra.

From the fifth caudal vertebra of *Trogontherium* another criterium must be looked for to determine the order of precedence. Articulation facets on the zygapophyses are no longer present, as these processes merely serve for the attachment of muscles, especially the prezygapophyses which, although decreasing in strength, are still stout and distinctly more separated from the neural spines than in *Castor*. From the width of the foramen vertebrale the order of the caudals can now be determined approximately, as well as from the height of the arch which diminishes backwards. On the hinder vertebrae which I had at my disposal the roof of the arch has altogether disappeared, and the canalis vertebralis lies open dorsally (figs. 24*b*, 25, 26, 29). This groove is bounded on both sides by a thin ridge. I found a similar situation nowhere on the beaver caudals.

The doubling of the transverse processes in *Trogontherium* begins as early as the fifth caudal (fig. 16*a*), whereas we find no indications of this in *Castor* before the eleventh (for *C. canadensis* MOORE gives the ninth, as also for *Castoroides*).

That there can be no question of a "division" of the transverse processes, as LECHE terms it, is evident from the fact that the impression for the blood-vessel does not run behind the posterior transverse process, but between the anterior and the posterior one.

As on the forward caudals this impression runs behind the single transverse process; only the anterior part of the double process can be homologous with the "undivided" transverse process. The caudal one is a new formation, which is well to be seen on the forward caudals in the beaver, where it occurs as a short, narrow excrescence behind the normal process.

Undoubtedly there are caudal vertebrae of *Trogontherium* lacking, which must follow on the hindmost caudal (15th?) I saw (fig. 29), as this one does not show such a reduction of the apophyses as we might expect at the end of the tail. Moore arrives at the same conclusion with respect to the caudal vertebrae of *Castoroides* known to him: "The abruptness of the termination of the seventeenth compared with the *Castor* and *Fiber*, makes it seem very probable that the whole number was not less than from twenty-three to twenty-five." The number in *Castor* varies between 24 and 30 (Giebel and Leche), being as a rule 27 or 28. The number on the tail of *Trogontherium* I estimate to be from 20 to 22. On the forward caudals, where doubling of the pleurapophyses occurs, the posterior of the two processi is still narrow (fig. 16*a*), but it soon attains the same antero-posterior diameter as the anterior process (fig. 18*b*, etc.).

The faint processes to be seen anteriorly on the under surface of the centrum of the fourth and fifth caudal (fig. 17) in *Trogontherium*, grow very strong beginning with the seventh vertebra, and curve outwards. Their flat ventral surface, on which a lengthways groove occurs, may attain a width of about 6 mm. (fig. 20*a*).

Similar ventral processes occur on the strong tail vertebrae of *Lagostomus tridactylus* which, as regards the double transverse processes and the whole form of the caudals, shows a greater resemblance to *Trogontherium* than *Castor* does. Also *Dasypus villosus* shows a similtude in the type of the tail vertebrae; in fact, the whole skeleton (of course except the skull) reminds us of the Castoridae. In both animals, *Lagostomus* and *Dasypus*, the said flat ventral surfaces of these processes of both sides are connected by ligaments when they do not lie so near each other as to have fused ventrally. In both cases a strong canal is formed in this way for the caudal arteria, without the chevron bones which occur in *Castor* and lie intervertebral there, connected by ligaments with the small tubercles on the bases of the preceding and the following caudal. Whether there were chevron bones in *Trogontherium* cannot be determined. None have ever been found, nor in *Castoroides* either, but MOORE concludes from the "prominent processes on the under side of all the anterior caudals that they were there in full size." If they also occurred in *Trogontherium* they must have been, from the seventh vertebra at least, extraordinarily strong, for then the broad ventral surfaces must have been their supporters. From the third to the sixth caudal the ventral tubercles are like those of *Castor*. Up to the hindmost caudal on which they were to be seen (fig. 27*a*), these ventral processes are no whit smaller than on the processi mammillaris and transversi, so that any caudal vertebra of *Trogontherium*, except the first six (and possibly some still unknown?), if viewed upon the anterior surface, reminds us of a steering wheel with six handles (fig. 21*a*), a type of vertebra differing greatly from that in the beaver, where the vertebral centra themselves are not materially flattened vertically on the first ten tail vertebrae, but the transverse processes prevail very strongly (fig. 22). The last sixteen caudals of *Castor* have flattened centra, and the last ten have two triangular transverse processes on either side; ventral and dorsal processes are entirely wanting there.

The form of the tail in *Trogontherium* has without doubt been quite different from that of *Castor*, where we find anteriorly first an extremely strongly muscular portion followed by a portion of twice the length, flattened and scaly, which served as steering and floating apparatus in swimming, as well as for lodge building and for beating the water as a sign of alarm. The tail of *Trogontherium* was surely strongly muscular also and powerfully built, but if there was any flattening, which I strongly doubt, this must have been limited to a small portion at the extremity.

It is interesting in this connection to learn what JOSEPH MOORE mentions as characteristic of the caudal vertebrae of *Castoroides*: "Without the wing-like transverse processes the tail would not present any flattened appearance save near the extremity where the centra (beginning with the seventeenth) are slightly compressed vertically. The posterior part of the tail is strikingly similar in general appearance to its counterpart in *Castor*, whether seen from above or below. The transverse processes are relatively shorter and much thicker at their outer extremities than in *Castor*." And finally: "The long stout tail, with its thick-winged bifurcate lateral processes, though relatively much narrower than the skeleton-tail of the recent beaver, was nevertheless pretty surely flattened in the same direction, though not to the same extent. It was evidently not cylindrical as in the rat, and it can not have been compressed as in the muskrat."

It is regrettable that MOORE gives no illustration of any caudal vertebrae viewed from before or from behind, nor does he appear to have paid any attention to the relative length of the six processi to each other. But it is highly probable that in this respect too, *Castoroides* occupies an intermediate place between *Castor*, with its longer transverse processes, and *Trogontherium*, with its six equal processes, the latter much thickened at the extremities like those of *Castoroides*.

Whereas MOORE assumes that the tail of *Castoroides* was not flattened "to the same extent", there is not the slightest indication of any flattening at all on the caudals of *Trogontherium* known to us at present.

The form of the transverse processes is liable to differ in *Trogontherium*, as also in *Castoroides* where, on the same tail skeleton, even on two sides of the same vertebra, differently formed transverse processes occur. This variability results chiefly in the foramen for the blood-vessel being in some cases not limited outwardly by the fusion of the thick extremities of the anterior and the posterior transverse process; the wing-like process, thus, is not perforated, as on figures 20 and 23, but has a slit from the foramen to the margin. Neither on the forward nor on the hinder caudals does a fusion of the margins occur either in *Castoroides* or in *Trogontherium*. In *Castor fiber* I found similar perforated processes (generally on one side only) on the 15th. to the 19th. caudal; in *Castoroides* MOORE illustrates them from the 9th. to the 14th. caudal; in *Trogontherium* they can occur probably from the 5th. to the 13th. caudal.

It will be clear that the caudal vertebrae known to us of *Trogontherium* differ most from *Castor* where, in the latter, the flattening of the tail begins. The forward caudals are distinguished only by the longer, narrower, less concave centrum, a smaller foramen vertebrale and lower zygapophyses. The length, width and height of the centrum amount on the first caudal vertebra of a recent beaver to 20.4, 19.1 and 15.4 mm. respectively, on that of *Trogontherium* (fig. 12) to 22.8, 15.8 and 14.5 mm. The same length of the centrum is found for the stout, first caudal vertebra of *Castor fiber* from Taubach (coll. Munich), but the width and height are there 19.9 and 16.9 mm. On the second caudal vertebra of *Trogontherium* (fig. 13) these measurements are 23.3, 15.8 and 27.4 mm. (height of corpus + zygapophysis), against 20.4, 19.0 and 30.4 mm. in the recent beaver. I found the same proportions on all caudal vertebrae. Even if the tail of *Trogontherium* has consisted of a smaller number of vertebrae the difference in length cannot have been great, as the centra are considerably longer. The appreciable difference in vertebral form becomes noticeable from the seventh caudal, where in *Trogontherium* all apophyses are nearly equally strongly developed.

Ribs. (Pl. X.)

I have met with only five fragments of ribs in the different collections; the largest of these was in the collection at Haarlem; two smaller ones in the Berlin collection and two in the collection at Maestricht. The largest fragment (figs. 1,4) is the dorsal half of one of the first ribs (probably of the fourth) of the right side of the body, and exhibits a distinct capitulum, a collum and an almost rounded-quadratic articulation surface on the tuberosity costae. This tubercular facet (6.5 × 5.6 mm.) is greatest in dimension in the longitudinal axis of the rib, as is also the case on the five first ribs of *Castor*. The second fragment is also a vertebral extremity, probably of the fifth rib, but from the left side of the body. The caput is very slightly stouter, the collum somewhat longer and thinner than on the aforesaid fragment, so that the tuberculum is more distinctly separated from the neck. The articulation surface (5.1 × 6.7 mm.) has the greatest dimensions perpendicular to the longitudinal axis of the rib. The muscle depression on the cranial side of the neck lies more lateral, a difference which can also be seen in a comparison of the fourth and fifth ribs of *Castor*.

The other fragments (figs. 5, 6, 7) are slightly curved, almost cylindrical, middle pieces of ribs. As there is no enlargement of the highest part of the arch of the rib, such as occurs in *Castor* (fig. 2), the greatest width in the angle is not more than 7.3 mm. against 8.7 mm. on the fourth rib of *Castor*; the thickness at that place, however, is more considerable, being 4.0 mm., in *Castor* 3.2 mm. The ribs of *Castoroides*, according to MOORE's illustrations, exhibit such enlargements.

Sternum. (Plate X.)

A bilateral-symmetrical fragment (fig. 8) about 3.5 cm. long, in the collection at Berlin, may possibly be a part of the sternum. The blunt end adjoins on both sides a rough surface which is convex and stands nearly vertical to the largest surfaces of the piece, meeting each other towards the point in an angle of about 30°. The greatest width of the fragment is 12.5 mm., the greatest thickness lies near the point and is 8.5 mm. The thinnest spot (5 mm.) lies just where the bone is broadest; towards the fracture-surface it becomes thicker again.

MOORE (1890), who found two pieces of the breast-bone of *Castoroides*, *viz.* the pre-sternum and the xiphisternum, mentions that the form of the presternum "differs materially" from that of *Castor*; it is therefore not surprising that I was unable to make out from the *Castor* skeleton which part of the sternum of *Trogontherium* this specimen might be, for it will probably also differ materially from that of *Castor.*

Clavicle. (Pl. X.)

This part of the shoulder-girdle is represented among the Teglian remains by two incomplete specimens in the TEYLER collection, by a small fragment in the collection at Berlin and by one in the Maestricht Museum. A sternal extremity nearly 2 cm. long (fig. 11) from the clay of Jockgrim can be found in the Museum at Munich. The largest fragment in the TEYLER Museum (fig. 9) has belonged to a clavicle of the right side, but both its extremities are missing. The outer extremity has been broken off just where the bone is broadest, *i. e.* where the place of attachment for the acromion begins. On the sternal side the bone is fractured where it becomes thicker again, which is not far from the place of attachment for the sternum. As the two corresponding places on the clavicle of *Castor* (fig. 10) lie closer together, we may assume that this bone of *Trogontherium* was longer, probably over 1 cm. longer than that of *Castor*, which warrants the assumption that the chest was broader. The triangular cross-section of the sternal part of the bone in *Castor* is not present in the extinct animal; this section is irregularly round here on the fragment from Jockgrim (fig. 11). The curve of the outer half of the clavicle is deeper and the whole bone altogether somewhat stouter; the greatest diameter on the lateral fracture surface is 12.4 mm., against 11.2 mm.

in *Castor* at the same spot. On the sternal extremity of the Jockgrim specimen it is well to be seen that also the flat end-facet, with its concave centre, has a rounder contour, due to the ventral edge of this surface not being straight, as in *Castor* (fig. 10), but convex (fig. 11). The height of the sternal extremity is thereby 10.3 mm. against 8.7 mm. in *Castor.*

The short fragment from Tegelen in the Berlin collection (fig. 12) appears to be compressed from before backwards; it is somewhat broader, and the upper and under borders are sharper.

Fore Limb

Scapula. (Pl. X.)

As is to be expected, the only part which has been preserved of the scapula is the more resistant anterior portion, *viz.* the glenoidal end. This extremity, both of a left (fig. 13) and of a right scapula, belongs to the TEYLER collection; a smaller fragment is in the collection at Vechta. The resemblance with the scapula of *Castor* (figs. 14, 15) is striking, in so far as we can judge, since the acromion process, the spine and the thin end of the blade are wanting. Probably some characteristic parts have thereby been lost, since MOORE (1890) writes regarding *Castoroides*: "the acromion with the broader portion of the spine presents a marked difference from the same feature in *Castor.*"

The glenoid cavity with the neck and the coracoid process are entirely intact. The cavity (fig. 13*c*) is equally long but somewhat broader than in *Castor* (fig. 15*b*), which is remarkable, since the head of the humerus, as we shall see, is considerably narrower. The result is that, in *Castor*, the head is noticeably broader (appr. 7 mm.) than the cavity in which it turns; in *Trogontherium* both are equally broad. For *Castoroides* the ratio of the length and width of the cavity is 11 : 7, for *Castor* the same, for *Trogontherium* it is 11 : 8, the measurements being 18.4 × 13.5 mm. The coracoid process (fig. 13*c* and *b*) is shorter, broader at the base and less curved than in the recent animal (fig. 15*b* and *a*); in *Castoroides*, on the contrary, it is more curved. As regards the blade of the scapula, this, as is the case with most parts of the skeleton, is broader and robuster in *Castor* than in *Trogontherium*, as will be evident from a comparison of the illustrations of the shoulder-blade of the extinct animal from Tegelen (fig. 13*a*) and of *Castor fiber* from Mosbach (fig. 14), in the Maintz collection. The blade in the first-named animal is less undulated and the two edges diverge less.

Humerus. (Pl. X.)

As might be anticipated, much less of the slender fore-limb has been preserved than of the stouter hind-leg. Only once have I found in the literature any mention of a humerus fragment of *Trogontherium*, namely, of the distal epiphysis, by OWEN (1869), who describes it as follows:

"A distal epiphysis of a right humerus, obtained by Mr. GUNN from the Forest-bed of Mundesley, indicates a larger proportional size of the fore-limb in *Trogontherium* than in *Castor*. The radial convexity of the trochlea has more fore-and-aft extent in *Trogontherium*; its contour is nearly that of an equilateral triangle, with the sides rather convex; in *Castor* the transverse diameter of the radial convexity much exceeds the antero-posterior one. The ulnar channel is much deeper in *Trogontherium* than in *Castor*; the posterior or olecranal part of the pulley is relatively wider and shallower in *Trogontherium*.

"In an old British beaver (*Castor fiber*) from a Cambridgeshire fen-deposit, the breadth of the olecranal part of the articular trochlea of the humerus is 10 mm.; in *Trogontherium* it is 23 mm. The width of the fore part of the trochlea in *Castor* is 19 mm., in *Trogontherium* it is 24 mm.; the antero-posterior diameter of the radial tuberosity of the humeral trochlea in *Castor* is 8 mm., in *Trogontherium* it is 20 mm."

In this humerus fragment, which OWEN attributes to *Trogontherium*, the width of the trochlea on the posterior side is thus twice that in *Castor*, the antero-posterior diameter is even more than twice as broad. As similar ratios are not found on any part of the skeletons of the two animals, we shall discuss more fully the measurements given by OWEN, beginning with those for the beaver.

The width of the posterior side of the articular trochlea in the recent beaver, as well as on the fossil humerus of this animal from Tegelen (fig. 18), I found to be 11.5 mm. and of the fore-side 21 mm.; the antero-posterior diameter of the trochlear part which articulates with the radius is 11.2 mm. For these measurements I found in *Trogontherium* from Tegelen (fig. 17) 14.5, 19.5 and appr. 11 mm., thus much less than OWEN met with on the fragment from Mundesley. The ratio of the posterior and the anterior sides of the articular surfaces is, according to OWEN, 23 and 24 mm. while those of OWEN's *Castor* are 19 and 10 mm., in the Teglian *Castor* they are 21 and 11.5 mm. and in *Trogontherium* from Tegelen 20 and 15 mm. Moreover, the ratio of the width to the antero-posterior diameter on the English fragment is quite different from that in *Castor* and in the Teglian *Trogontherium*. Altogether I entertain serious doubts as to whether the humerus fragment from Mundesley actually belonged to *Trogontherium*, the more so as OWEN deduced from the fragment a larger proportional size of the fore-limb in *Trogontherium* than in *Castor*, which deduction was accepted in HINTON's publication (1914). As regards the proportional sizes I have come to a contrary conclusion after a close study of the humerus fragments from Tegelen and of the proximal half from Jockgrim (fig. 19), the property of Prof. FREUDENBERG, who was so kind as to send me this specimen for study.

Among the material from Tegelen, I found seventeen humerus fragments. Two specimens are but slightly damaged, *viz.* a right humerus in the TEYLER collection (fig. 16), which lacks the deltoid process, and is broken off through the depressions above the trochlea, and one in the collection of the Museum for Natural History at Maestricht (fig. 17), where the same process is wanting, as well as the proximal epiphysis and the adjoining inner angle of the shaft.

In the former collection there are, further, a proximal extremity (fig. 20), injured at the inner tuberosity, and a larger piece of the shaft. The collections at Berlin and Vechta contain a dozen smaller fragments.

A comparison of all these specimens led me to conclude a length of 85 mm. for the humerus of the largest specimen of Teglian *Trogontherium* and for the humerus from *Jockgrim*, against a length of 95 mm. in *Castor fiber* from Tegelen, and an average of 92 mm. in the recent animal. The humerus is not only absolutely smaller than that of *Castor*, but, as will appear in the course of this treatise, also smaller in proportion to the whole fore-arm.

Striking is the resemblance in shape between the humerus of *Castor*, *Trogontherium*, *Castoroides* (MOORE, 1890) and *Steneofiber* (FILHOL, 1879, and the author, 1928), a greater resemblance than we shall find in the femur. The same broad (especially in *Castoroides*) compressed shape with on the one side a sharply projecting deltoid tuberosity (fig. 22), characteristic of burrowing habits, and on the other side a slight prominence of the end of the small ridge downward from the lesser tuberosity; the same broad supinator ridge from the outer condyle running upward and backward, and fading out in the middle of the shaft just between the two secondary tuberosities.

Some differences can be detected on the epiphyses. The greater tuberosity which, in *Trogontherium*, is concave at its outer surface by a deep depression, indicative of muscular insertion, projects in *Castor* only above the head, which, in *Castoroides* and in *Trogontherium*, is noticeably narrower in proportion to the whole proximal epiphysis than in *Castor* and in *Steneofiber*. The width of this extremity in the Teglian *Castor* is 27 mm., and the width of the head 18.5 mm.; on the other hand, in Teglian *Trogontherium* it averages 26 mm. and 13 mm. The head in both *Castoroides* and *Trogontherium* is not only narrower than in *Castor*, but is also separated from the shaft on both sides and posteriorly by a well-defined, short neck (fig. 16*c*).

From the larger tuberosity two short ridges run downwards, one anteriorly, the other posteriorly. In *Castor* they go parallel, the anterior one (crista humeri) ends in the deltoid ridge, the other is very short, and soon disappears in the shaft. In *Trogontherium* they converge downwards, and both end in the tuberositas deltoidea.

As regards the shaft the tuberosities on either side are placed somewhat higher in *Trogontherium* than in *Castor*, and the supinator ridge can be traced slightly higher on the posterior side. The tuberositas deltoidea also in the extinct animal is very strongly developed, and curves backwards. Its shape (fig. 22) resembles that of *Castoroides* rather that of the beaver and of *Steneofiber*.

Respecting the distal epiphysis, which is very broad in *Trogontherium* (appr. 35 mm., against 32.5 mm. on the humerus of *Castor fiber* from Tegelen), we have already seen that the trochlea, anteriorly and posteriorly, is smaller in *Trogontherium*. In *Castor* a deep, round cavity is situated (fig. 18*b*) on the posterior side of the epicondylus medialis; at the same spot in *Trogontherium* we find a deep but much smaller concavity, while the epicondyle itself is less developed, so that the medial edge of the trochlea projects distally (fig. 17*b*).

A distinct epicondylar foramen occurs in *Trogontherium* on all the five distal fragments I found. This foramen is not constant on the humerus of *Steneofiber viciacensis*, which is at most 50 mm. long (FILHOL, 1879). This foramen is to be seen on the only known humerus of *Steneofiber depéreti* (GERVAIS' *Potamotherium*, 1869), as also on *Palaeocastor*. It is lacking in *Castor*, and likewise in the only humerus known of *Castoroides* described by MOORE (1890). This perforation of the epicondyle does not furnish any indication, either systematical or biological, as it is extremely inconstant, being present or absent in animals of the same species and in animals with the same habits. It is regarded as a phylogenetically old foramen that persists if not disadvantageous to the animal (STROMER, 1902).

Radius. (Pl. XI.)

Fragments of four radii of *Trogontherium*, two of the left and two of the right side, have been found at Tegelen; only the distal epiphysis has never been met with. The left fragments, consisting of one complete shaft (fig. 1) and a proximal half of another bone (fig. 3), belong to the collection at Berlin. A proximal extremity (fig. 4) is in the collection at Haarlem. Two pieces of right shafts are in the collection WEINGÄRTNER. The Munich Museum possesses a fragment of a left and one of a right radius found at Jockgrim.

Nowhere in the literature on *Trogontherium* have I found anything regarding the skeleton of the fore-arm. The radius is approximately as much longer than that of the beaver as the humerus is shorter. Whereas the radius of *Castor* is only 6 mm. longer than the humerus, in *Trogontherium* the difference is 25 mm., the length measurements being 85 and 110 mm. respectively, against 92 and 98 mm. in *Castor*. For *Steneofiber viciacensis* FILHOL (1879) mentions that the humerus and radius are equally long (both 50 mm.); of *Castoroides* no complete radius is known, but the length of the ulna is given, from which it would appear that the ratio of the lengths of humerus and radius probably resembles that in *Trogontherium* more than that in *Castor* (see Table on page 104).

There is but little difference in form between the radii of the four castorids of which this bone is known. MOORE does not mention any differences between those of *Castoroides* and *Castor*; FILHOL, writing on *Steneofiber viciacensis*, says: "aucune particularité anatomique ne peut servir à la distinguer de celui de *Castor*." His remark to the effect that the upper epiphysis fuses with the shaft earlier than the lower one, holds good with respect also to *Trogontherium.*

A typical phenomenon on the outer and on the posterior side of the upper half of the shaft in *Trogontherium* enabled me to distinguish at the first glance the radii of the two equally large castorids. For the radius of the extinct animal is closely covered there with tiny shallow pits (figs. 1, 3, 4), which we find again at the same height on the ulna (fig. 7*c*), and which must have been caused by the attachment of strong fore-arm muscles. Nowhere else have I found such cellular markings on the bones of *Trogontherium*, nor on those of *Castor*. The radius of *Castor* is perfectly smooth over the whole surface. Not only do these muscle pits, in *Trogontherium*, spread over the external side of the radius, but also the articular surface for the ulna extends over the whole external side of the head (fig. 4). From this fact we may conclude a greater degree of movement between the two fore-arm bones than is the case in *Castor*, where the radius is fixed almost immovably in front of the ulna. With regard to this point I found the following in MOORE (1890): "There does not appear to have been (in *Castoroides*) so much of an apparent approach to the fusion of the two bones as we find in a mature skeleton of *Castor*." The two small fragments of radius from Jockgrim correspond in size and shape to those from Tegelen.

Ulna. (Pl. XI.)

The two parts of ulnae belonging to the proximal radius fragments in the Berlin and TEYLER collections are broken off at about the same height (fig. 9). I found in the collection WEINGÄRTNER a piece of an olecranon, in the TEYLER collection a distal extremity about 3 cm. long, lacking the epiphysis (fig. 11), and in the collection at Maestricht a fragment of the middle of the shaft (fig. 10). From these parts we can determine the length of the ulna of *Trogontherium* to be approximately 143 mm., against an average of 126 mm. in *Castor*. This superior length is accounted for by the distal half of the ulna, for the distance from the top of the olecranon to the lower end of the strongly marked longitudinal fossa on the external surface of the shaft is the same in the two animals. The distal extremity, even minus the epiphysis, is considerably longer than in *Castor*, but also thinner and rounder (fig. 11). The proximal part of the ulna is more slender, as will appear if it be compared with the ulna fragment of the beaver from the same locality (figs. 7, 8). If the bone be measured about one centimetre below the sigmoid cavity in the groove, the thickness in *Castor* will be found to be 3.9 mm.; in *Trogontherium* 2.1 mm. The proximal part of the bone in *Trogontherium* is more compressed from side to side, with a sharp fore and hind ridge on the olecranon, whereby the antero-posterior diameter in the middle of the sigmoid cavity is 20 mm., against 17.7 mm. in the fossil beaver from Tegelen. The posterior surface at this spot is narrower; nearer the olecranon it contracts to a sharp ridge which bifurcates below the top. The one ridge bends externally, the other internally, meeting again on the front side with the sharp vertical ridge which runs upwards from the anconeal process (fig. 7*c*). The summit of the olecranon is curved much inwards as well as forwards. Hereby, and also owing to the anconeal process springing far forwards, the front edge of the olecranon in the extinct animal is concave, but straight in *Castor* (figs. 7*a*, 8*a*); the posterior edge is very convex in the former animal.

The incisura semilunaris exhibits several typical differences. The roof is broader and more convex transversally, so that the two small wings are directed upwards and project further outward, which corresponds to the broader trochlea on the posterior side of the humerus of *Trogontherium*. The bottom of the sigmoid notch, in *Castor*, has been covered with cartilage for a considerably broader strip, corresponding to the greater width of the anterior side of the humeral trochlea in this animal. In *Trogontherium* the articular surface for the humerus lies wholly on the narrow internal wing, which projects forwards (figs. 7*a*, 7*c*), and does not extend above the whole width of the vertical articular surface for the radius, as it does in *Castor* (figs. 6*a*, 6*b*). This surface is wider in the extinct animal, and more concave transversally; the outer half, separated from the inner one by a deep pit (fig. 7*a*), projects much outwards and embraces more completely the head of the radius, according to the situation of the articular surface on the external side also of the capitulum radii.

Although the distal epiphysis is lacking, it may yet be concluded from the smaller articular surface on the os pisiforme that the processus styloideus of the ulna must have been smaller in contour than it is in *Castor*, which agrees with the more slender form of the whole fore-arm.

Pisiform. (Pl. XI.)

The pisiform in the TEYLER collection is the only bone of the carpus found at Tegelen and, further, the only pisiform known of any extinct castorid, as, according to FILHOL (1879) and MOORE (1890), no remains of the fore-foot of either *Steneofiber* or *Castoroides* have even been found. In the preserved fore-feet of *Palaeocastor* species (PETERSON, 1905) this bone is lacking.

As in *Castor*, the frontal half of the dorsal surface articulates with the pyramidal (ulnar bone, cuneiform) and the posterior half with the ulna. These two facets lying parallel behind each other are elongated transversally. The posterior concave facet, which together with the articular surface of the pyramidal bone forms the socket in which the styloid process of the ulna articulates, stands perpendicular to the axis of the spur, and is narrower in *Trogontherium* than in *Castor*. The facet for the pyramidal adjoining it frontally is flat and slightly broader than the posterior one. In *Castor* it slopes sharply forwards, so that, when seen from the front, this surface appears to be much larger in *Castor* (fig. 13*a*) than in *Trogontherium* (fig. 12*a*), where both facets lie almost in the same plane and both are concave transversally.

The spur in *Trogontherium* is longer and thinner and not curved so much inwards; the more slender build of this animal is again evident from this, the only known, element of the carpus. The height of the pisiform is 14.6 mm., the width of the articulating part 7.4 mm., the antero-posterior diameter of the spur 5.6 mm. In *Castor* these measurements are 13.8 mm., 8.3 mm. and 6.9 mm. respectively.

Metacarpal III. (Pl. XI.)

Likewise of the metacarpus only one bone (fig. 14) has been preserved, and this too is now to be seen in the collection at Haarlem. This right third metacarpal is smaller and narrower than the same bone in *Castor*. The length is only 21 mm., against 24.3 mm. in the recent animal; height and width of the base are 6.1 mm. and 4.8 mm., against 6.2 and 5.9 mm. in *Castor*; height and width of the head 6.7 mm. and 6.4 mm., against 6.2 mm. and 5.9 mm. in *Castor*; the width of the shaft is 3.8 mm., against 4.2 mm., but the height (of the shaft) is the same in both.

The narrower wedge-shaped base bears the vertical facets for the small third (magnum) and the larger fourth carpal (unciform).

These two facets meet in a vertical ridge, which in *Trogontherium* is sharper and located more to the middle line of the bone. In *Castor* the internal facet extends so far laterally that the ridge lies almost in the elongation of the external side of the shaft (fig. 15*a*).

From the position of these facets it appears that in the extinct animal the anterior extremity of the bone lies compressed like a wedge between the two aforesaid carpals, while the large fourth carpal has extended over the entire lateral half of its base. The small magnum did not lie, as in *Castor*, straight behind the metacarpal III, but obliquely, behind the medial half of its base. Along the internal edge of the facet for the third carpal there lies in *Castor* another facet for the base of the metacarpal II, dorsally broader, ventrally narrower (figs. 15*b* and 15*c*). This facet does not exist in *Trogontherium*, where a small knob lies midway on the inner border. This is probably something similar to what we shall find on the metatarsus, namely, that a concavity on the base of one metatarsal receives a knob of the adjacent metatarsal.

Also on the anterior side of the lateral facet (for the fourth carpal) there lies in *Castor* a narrow surface for the metacarpal IV. I could not find this facet either on the *Trogontherium* bone, but there was a tiny concavity at the same place.

The muscle depression on the dorsal surface of the metacarpal III is somewhat longer in this animal and lies more distally, while the shaft and the capitulum are less flattened dorso-ventrally than in *Castor*; we shall observe the same characters again on the hind-foot.

Hind Limb

In all the *Castoridae* known up till now, the proportion between the height of the fore-limb (humerus + radius) and hind-limb (femur + tibia) is very nearly the same. The difference is greatest in *Steneofiber viciacensis* F., where this ratio is as 2 : 3; in *Trogontherium* from Tegelen this ratio is least, *viz.* as 2 : 2.6. For *Palaeocastor fossor* PETERSON the author states that this ratio is the same as in *Castor*, where I found it to be 2 : 2.7. Needless to say that by the "height" of the limb the distance from the spinal column to the ground is not meant. Regarding *Castoroides*, for instance, MOORE (1890) mentions that "when the forearm was extended, as far as the articulation at the elbow would appear to admit, it still made an angle with the humerus of about

135 degrees. The arm, however, could completely fold on itself with ease, etc." The beaver, too, in walking shows nothing of its extremities but the feet. In a German book I found the name of "Bauchtier."

A very great difference, however, is to be found in respect to the relative lengths of the segments of the limbs in the various *Castoridae*. This will be evident from the Table below, where the length of the femur of each animal is taken as 100.

	femur		tibia	pes	humerus	radius	manus
	abs. l.	r. l.	r. l.	r. l.	r. l.	r. l.	r. l.
Palaeocastor barbouri Pet.....	41mm.	100	86		73	61	85
Palaeocastor fossor Pet.......	54 „	100	94	102	76	60	± 80
Steneofiber viciacensis Fi.	70 „	100	113		71	67	
Castor fiber L. (recent).......	117 „	100	121	154	79	84	75
Castoroides ohioensis Fo......	183 „	100	139	± 172*	75	± 93	
Trogontherium from Tegelen..	105 „	100	141	210	81	105	± 65

*) Moore (1890) estimates the length of the foot of C. oh. at $12^{1}/_{4}$—$12^{1}/_{2}$ inches.

The Table shows first of all that in *Palaeocastor fossor* and *barbouri*, small burrowing animals, the three segments of the hind-limb do not differ materially in length, and further that the tibia is smaller than the femur, a condition not found in any other castorid. *Steneofiber viciacensis* shows the tibia longer than the femur, and this difference in length has increased in *Castor*, while in *Castoroides ohioensis* and in *Trogontherium* the ratio of the upper to the lower segment is as 5 : 7.

Like the tibia, also the foot in this series (*i. e.* the "Stufenreihe" of Abel, not his "Ahnenreihe") becomes longer and longer as compared with the femur, until in *Trogontherium* it is more than double the length. *Castor* and *Castoroides* exhibit the same relative proportions between the tibia and the foot, but, according to Hay (1914), the foot of the former is larger in proportion to the length of the body than in the latter; the same thing applies to the other segments of the hind-foot: "the Giant Beaver was a relatively shorter-legged animal than the beaver." In the latter the length of the whole hind-foot in proportion to that of the entire skeleton is as 1 : 2.5; in *Castoroides* about 1 : 2.9; in *Palaeocastor* as 1 : 2.3.

In contrast to the increasing length of the lower-arm, lower-leg and foot in this series, stands the decrease in the length of the hand in the four animals where the dimension is known of this organ which, in rodents, performs many functions besides that of locomotion.

The relative length of femur and humerus varies but little.

Pelvis. (Pls. XI, XII.)

From Teglian fragments of the pelvis in the different collections I could not build up any complete innominate bone, as the caudal contour of the obturator foramen is missing.

The ilium is best represented, namely, by 16 more or less complete specimens; only the cranial extremity is lacking in all. Almost equally numerous are the remains of the ischium, of which the strong dorsal part only is represented. The much thinner pubis of three innominate bones is present, though only the ramus acetabularis. Fortunately I found among the material the ischium fragment belonging to each of these three, and in two cases also a part of the ilium (Pl. XI, fig. 16 and Pl. XII, figs. 2, 3). Thus the collection at Berlin now possesses two ossa innominata which, though not complete, nevertheless show important differences from the pelvis of the beaver (Pl. XI, fig. 17).

The obturator foramen is of the same oval form, but smaller and narrower.

The ilium of *Castor* exhibits the peculiarity which occurs in many rodents, namely, the turning outward of the cranial extremity, whereas its crest stands horizontally and ends outwards in the spine.

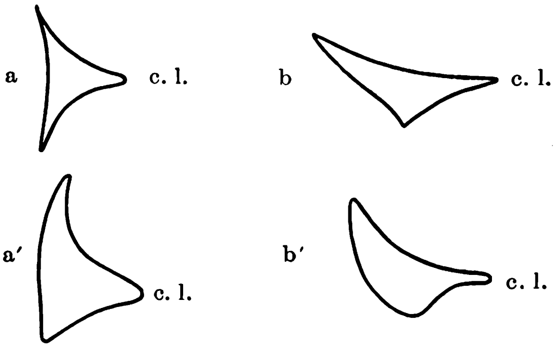


Fig. 7. Cross-sections through the right ilium: a. at the cranial extremity, a′. at a distance of 35 mm. from the acetabulum in *Trogontherium*; b. and b′. at the corresponding places in *Castor*. c. l. = crista lateralis.

Cross-sections (text figure 7) through the wing, which forms about two-thirds of the ilium, exhibits a triedral form, with the longest, concave side (facies glutaea) above and the obtuse angle (pubic border) below. The inner and outer angles, both sharp and situated dorsally, are the cross-sections through the ischial and the acetabular border (crista lateralis LECHE). Between the latter and the obtuse lower angle lies the concave shortest side cut through the facies iliaca. The third, inner side is convex, and stands nearly vertical in a cross-section on the level of the articular surface for the sacrum. Towards the cranial end of the ilium this side also becomes concave and then stands as obliquely as the lateral surface, while the upper side lies horizontal then.

If we regard analogous sections through the ilium of *Trogontherium*, we see that we have to do here with a less specialized form, as also occurs in many rodents, namely, a dorso-ventrally heightened ilium, with a sacral surface which stands vertical almost to the very end, and a blunt crista lateralis. This runs in the middle of the outer surface of the ilium, dividing it into a dorsal concave facies glutaea and an almost equally high and also concave ventral facies iliaca.

The surface of attachment for the glutaeus muscle, much smaller here than in *Castor*, agrees with the proportions which we shall find on the outer side of the femur, which likewise point to a less strong glutaeus group.

The portion between the wing and the acetabulum is formed by a shorter collum iliaca than in the beaver (Pl. XI, figs. 16*a*, 17).

The pelvis must have been very firmly attached to the sacrum. The facies articularis of the ilium is large, and has an oval form about twice as long as it is broad (Pl. XII, figs. 1, 2, 4); it is directed backwards and upwards. The form of this rough portion and its distance to the acetabulum are not the same in the seven Teglian specimens on which this is observable. The said distance in all of them, however, is shorter than in the beaver. The shape is sometimes higher and shorter, with rather longer incisura ischiadica, sometimes lower again and more elongated, whereby the great ischiadical notch becomes shorter. This notch is always fainter than in the beaver, also the ischiadical spine is less pronounced.

The deep, nearly circular acetabulum in both animals lies quite lateral (Pl. XI, figs. 16*a*, 17, 18). The incisura acetabuli in *Trogon-*

therium is very narrow and lies considerably more ventrally in the acetabulum than in *Castor*.

The flat acetabular ramus of the ischium in *Trogontherium* lies entirely in the prolongation of the ilium, and its height considerably exceeds the width. The incisura ischiadica major is smaller than in *Castor*, the lesser ischial notch is much larger. In *Castor* namely, the distance between the spina and the tuber ischiadica is much shortened by a ridge-like process of the tuber in the direction of the acetabulum (Pl. XI, fig. 17); in *Trogontherium* this process is indicated only by a sharp point anteriorly on the tuber (fig. 16*a*). The portion lying distal of this point curves ventrally over, so that the very thin, broad bone seems convex there when seen from above on the fracture surface. The beaver ischium at that place is thicker, and the tuber forms the thickened edge of this, here, quite flat portion. Where the ischium is broken off in the most complete specimen the cross-section shows a thickness of one millimetre in the ventral half, whereas the curved dorsal part is as thin as a sheet of paper. It is no wonder then that the distal extremities of both ischium and pubis have been lost in excavating the bone from the clay.

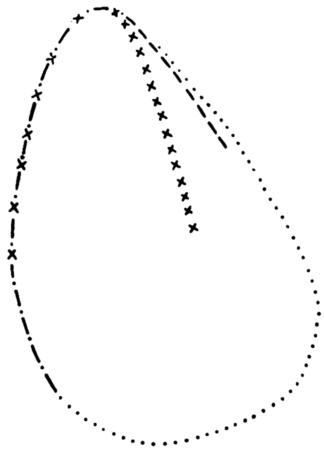


Fig. 8. Outlines of the obturator foramen:
. . . . of *Castor fiber*,
— — — of *Trogontherium* on Pl. XII, fig. 1,
× × × of *Trogontherium* on Pl. XII, fig. 3.

From the preserved portions of the pelvis, however, it may be inferred that the obturator foramen was large and oval, as in the beaver, but considerably narrower. This last holds good in particular for two of the three specimens where the pear-shaped foramina are partly to be seen (Pl. XII, figs. 2, 3). The difference in form (text fig. 8) between these two foramina and the wider one of the largest fragment, figured on Pl. XI, fig. 16, has probably a greater significance than a mere individual variation. This is evident from the fact, that the two pelvic fragments with the narrower foramen possess a flatter pubis; the fracture surface of both these fragments, having a larger diameter of 14 mm. (Pl. XII, fig. 3) and 11.7 mm.

(fig. 2) respectively, yields a thickness of only 1 to 2 mm. On the other hand, the largest pelvic fragment on which the pubis is broken off at the corresponding place, exhibits a fracture surface of 7.8 mm. long by a thickness of 6.3 mm. Possibly this difference in form is due to difference of sex.

In the middle of the ventral pelvic border, almost under the acetabulum, we see in rodents only one more or less elongated process (pecten ossis pubis), which ends proximally in the tuberculum iliopectineum into which the psoas minor muscle is inserted. Caudally from this tuberculum, along the pecten, the pectineus muscle arises. LECHE, therefore, names the rodents among those animals in which we cannot speak of a separate proximal tuberculum iliopubicum and a distal tuberculum iliopectineum. In *Trogontherium*, however, two tubercula are clearly distinguishable, as can be well seen in the illustrations on Plate XI (figs. 16*a*, *b*). The proximal tuberculum is much weaker than the only tuberculum of *Castor*; the distal tuberculum, corresponding to the somewhat higher distal extremity of the pecten in *Castor*, has a semicircular contour, and is flat with a sharp edge.

The portion that lies between this ventral marginal region and the acetabulum is somewhat narrower in *Trogontherium*.

According to FILHOL (1879), *Steneofiber* from St. Gérand le Puy shows the same shape of pelvis as *Castor fiber* does. From MOORE's description and illustration (1890) of the pelvis of *Castoroides ohioensis* it appears that also in this respect the Giant Beaver bears a greater resemblance to *Castor* than to *Trogontherium*. The pelvis of *Palaeocastor fossor* PET. strongly resembles that of *Castor* and *Steneofiber* with respect to the ilium, but the posterior portion is shorter and the obturator foramen is smaller.

Femur. (Pls. XII, XIII.)

The first femur referred to *Trogontherium cuvieri* F. is that illustrated and described by OWEN in 1869, in his treatise: "On the Distinction between *Castor* and *Trogontherium*". This left femur was found in the Forest Bed of Mundesley, in Norfolk, and was illustrated again and more correctly, in 1882, in NEWTON's work: "The Vertebrata of the Forest Bed Series of Norfolk and Suffolk". NEWTON does not describe this femur again, but briefly summarizes OWEN's description of it. He also mentions a distal end of a femur from the same strata, which he terms broader than that extremity of OWEN's specimen, probably owing to its being less damaged.

It was not until 1906 that a description of two thigh-bones was given by the French geologist, L. COLLOT, in an illustrated article entitled: "Le genre *Trogontherium* dans le bassin de la Saône". One of the two specimens is a right femur, found in "le sable de Curtil", the other a left one in the somewhat older "marnes jaunes et grises", at Bligny-sous-Beaune, on a tributary of the Saône (text fig. 3). COLLOT's illustrations are two phototypes of the latter specimen.

COLLOT was apparently unacquainted with the above-mentioned publications of OWEN and NEWTON, for he refers merely to OWEN's note (1846) on a fragment of the lower jaw of *Trogontherium*, and to NEWTON's article in 1890 on three molars of *Trogontherium minus*. He, therefore, gives again a detailed description, assuming the two femora, on the strength of their resemblance to the beaver thigh-bone, to be of *Trogontherium*.

The bone described by OWEN is badly damaged at the distal epiphysis, while collum and caput are entirely lacking, so that both these have been added in the drawing, which will be the reason that OWEN's figures do not convey a correct impression. NEWTON in his illustration has slightly improved on the supposed position of neck and head, but his drawing does not show the fact that the distal end is crumbled, nor does he mention it, so that the peculiar outlines of this region of the bone might be mistaken for the natural state.

COLLOT's phototypes exhibit an almost complete femur, in which only the endocondylar tuberosity, projecting sharply inwards, is lacking. The fracture surface is clearly visible in both the illustrations, one showing the bone seen from the front, the other from behind.

It follows that OWEN's description of the object cannot be complete, nor are the proportions given by him between distal extremity and trochlea the correct ones. COLLOT's description and comparison with the thigh-bone of *Castor* are therefore given here:

"Dans les fémurs de Curtil et de Bligny, le grand trochanter monte plus haut au-dessus de la tête que dans le castor et se porte un peu moins obliquement en dehors. Il est séparé de la tête par une échancrure plus profonde, ce qui dégage mieux le col. Une

crête va, d'ailleurs, ici aussi, du sommet du trochanter à la base de la tête. La fosse trochantérienne, située derrière cette crête, allongée de haut en bas, s'enfonce très profondément dans l'épaisseur du trochanter.

"Le petit trochanter est situé plus haut que chez le castor. Il a la forme d'un triangle dont la base servant d'attache sur le corps de l'os est plus étendue. Il se porte en arrière par sa partie inférieure, de manière que son plan est sur le prolongement du col. La crête par laquelle il vient en bas se fondre au corps de l'os revient vers le plan moyen.

"Le col du fémur suivant le mouvement en avant de la partie supérieure du petit trochanter est plus porté en avant que chez le castor. Dans le castor, le petit trochanter est sensiblement plan, parallèle et très légèrement postérieur au plan moyen; le col, qui n'est pas en prolongement, se porte d'ailleurs moins en avant.

"La plus grande largeur de la crête sous-trochantérienne ou troisième trochanter, fait face au fond de l'échancrure qui sépare le col du fémur du petit trochanter.

"Sa face antérieure est légèrement creusée en gouttière; la moitié inférieure de la face postérieure porte une légère fossette allongée et rugueuse.

"Le troisième trochanter est en continuité par le haut avec le sommet du grand; une large surface rugueuse descend de celui-ci pour former son bord interne, elle se rétrécit peu à peu et devient, à partir de la plus grande largeur du troisième trochanter, une crête étroite qui perd tout relief avant d'atteindre le milieu de la hauteur de l'os. Ce trochanter est moins saillant que son similaire chez le castor. Il en diffère, en outre, parce qu'il est situé bien plus haut, et qu'il ne s'individualise pas avec la même netteté. Il résulte aussi de sa disposition que le corps du fémur est à peu près rond en son milieu dans nos fémurs, tandis qu'il est partout élargi transversalement dans le castor.

"La région condylienne offre une grande ressemblance avec celle du castor par la dilatation de la surface à droite et à gauche de la gouttière trochléenne. Le tubercule situé sur le condyle interne est très fort et arrêté brusquement dans le haut par un sillon à peu près horizontal au lieu de prendre la forme d'une petite crête qui s'abaisse simplement un peu plus haut. Néanmoins, au-dessus de ce sillon commence une légère carène émoussée qui se dessine vaguement jusque vers le milieu de la hauteur de l'os.

"Du côté externe, le condyle vu de devant parait tronqué rélativement à celui du castor. Il n'a pas, à partir du bord de la trochlée, cette large expansion à surface oblique et un peu excavée, qui fait suite à la crête descendant du troisième trochanter. La trochlée est oblique de dedans en dehors et de haut en bas.

"Malgré les différences que je viens de faire ressortir, les fémurs de Curtil et de Bligny présentent avec celui du castor un air de famille incontestable grâce à leur élargissement partiel et à leur forme trapue. Les caractères en sont seulement moins extrêmes, la dilatation bilatérale est moins complète, le troisième trochanter n'est pas encore descendu au milieu de l'os. Il s'agit d'un castoridé mais d'un animal moins différencié que nos castors: le membre postérieur ne devait pas être encore la puissante rame qu'il est devenu chez ceux-ci. On peut expliquer aussi par cette raison que cet os soit moins grand que chez le castor, bien que la tête de l'animal soit aussi forte, en supposant bien entendu que nos fémurs aient appartenu à la même espèce que la mâchoire. J'ai mesuré sur un castor du Rhône 121 millimètres pour la longueur totale, sur le fémur de Curtil 100 millimètres, et sur celui de Bligny, 102 millimètres."

The number of femora from the Teglian Clay, which I was able to assemble from the different collections, is over 30. Among these are a great many fragments, including some loose capita, but the greater number show a perfect proximal, or distal half. Only one specimen was entirely complete barring a few splinters; this one is preserved in the collection KRAUSE, and is illustrated on Plates XII and XIII. Six femora are practically complete, only one of the condyles is wanting; of these bones, four belong to the collection DUBOIS, one to the collection KRAUSE and one to the collection WEINGÄRTNER. Among the femur material are a number of full-grown specimens; some others have attained the normal size, but their distal epiphysis has not yet anchylosed with the shaft of the bone, so that this epiphysis is missing. It is worthy of note that on the full-grown femur the line of the distal epiphysis always remains clearly visible. I have not found a single specimen where this was not the case. There is, therefore, in my opinion, no foundation for OWEN's rêmark to the effect that the thigh-bone from the Forest Bed must be that of a young animal, since the epiphysial line is to be seen.

Also the full grown femora of *Castor* (Pl. XII, fig. 6) exhibit this line very clearly; the fusion here takes place still later; the fossil femora from Tegelen (one in the TEYLER collection, the other in that at Berlin), both of which, judging by the dimensions and the strong muscular depressions, must be full-grown femora, lack the distal epiphysis.

In DEPÉRET (1890) I found the following observation: "On sait que la soudure des épiphyses se produit fort tard dans les animaux de la famille des Castorides. J'ai pu faire la remarque qu'il en est de même dans les Loutres de sorte que ce caractère semble être une conséquence de l'adaptation à la vie aquatique".

The epiphysis on the caput and on the trochanter major in *Trogontherium*, on the other hand, have fused much earlier. Only in a few specimens, which are far below the average measurement, are they detached from their base.

On the beaver bone these connections, as far as I could make out from the much fewer specimens, take place later and are visible a long time, if not during the whole life. LÖNNBERG (1909) writes: "The growth of a Beaver is continued during a very long period, perhaps during the whole lifetime", and TAYLOR (1916): "Growth (in *Castor*) continues practically through life". With regard to the length of the thigh-bone, it struck me that the femur of *Trogontherium*, OWEN's "giant beaver", is on an average 10 mm. shorter than that of *Castor*. OWEN gives no measurements, nor does he make a comparison between its length and that of the beaver bone. From the illustrations the length of the femur from the Forest Bed must be 108 mm. (OWEN), or 109 mm. (NEWTON).

As could be seen from COLLOT's photos, the French specimens, although full-grown, are not those of a robust animal; the dimensions given, 102 and 100 mm., confirm this.

I was able to measure the absolute length of eight femora from Tegelen, but the smallest of these was still one millimetre longer than the largest of the French bones, *viz.* 103 mm.; then follow in length four femora of 104.5 mm., then one of 108 mm. and, finally, the two largest specimens with a length of 108.5 mm. This last length is the same as that of the English one. COLLOT gives, for purposes of comparison, the measurements of the femur of a Rhône beaver as 121 mm. This is exceptionally large, as DEPÉRET (1890) mentions 111 mm. and G. DUBOIS (1926) 113 mm. On the thigh-bone of the recent Elbe beaver I measured 117 mm., and the two fossil *Castor* bones from the Teglian Clay do not exceed this dimension.

On three femora of *Castor fiber* L. from the Diluvium of Germany, I found length measurements of 111.5, 114, and 114.5 mm. respectively. In the Museum of the Geol. Landesanstalt, at Berlin, there is an extremely large beaver thigh-bone from Taubach, which I found to be 133 mm. in length. One *Castor* femur from Mosbach in the collection in the Senckenberg Museum measured 128 mm.!

Besides the femora from Tegelen, from the Saône region and from the Forest Bed, four femora of *Trogontherium* were found at Mosbach and are preserved in the collection of the Museum at Mainz.

In three of these femora all epiphyses are lacking. The shafts of two left specimens are quite perfect. The only old femur, broken off obliquely above the lesser trochanter, is 95 mm. long and thus about one centimetre shorter than the average specimens from Tegelen. In the latter the width of the shaft along the distal epiphysis is 30 mm. and in that from Mosbach not more than 27.5 mm. This last measurement I also found on a femur fragment in the collection of the British Museum, from the Forest Bed of East Runton.

A proximal extremity of a femur has been found at Hochsachsen by Prof. FREUDENBERG.

We may determine the average length of the full-grown femur of *Trogontherium* from Tegelen at 105 mm. and that of the European *Castor* at about 115 mm. The difference in length is thus considerable, but in general not so great as that between COLLOT's objects of comparison (101 and 121 mm.).

In comparing the form of the femora I was struck by a peculiarity in the femur of *Trogontherium*, which neither OWEN nor COLLOT mentions, although it is quite apparent in their illustrations, namely, the considerable outward torsion of the bone in many of the specimens.

If the six more perfect femora of *Trogontherium* be laid on the table beside the beaver-bone, in such a way that the anterior side looks upwards and the great and lesser trochanter rest on the table, the ridge between caput and trochanter major, which in *Castor* is blunt but in *Trogontherium* much sharper, will run nearly horizontal. The proximal ends of the bones thus lying in the same position, the distal epiphyses of *Trogontherium* differ strikingly in position from each other, as well as from *Castor*, as regards the distance of the condyles from the horizontal table-top. In the four most torted specimens of *Trogontherium*, the ectocondyle, in the position as given above, rests upon the table, whereas the distance between the equally strong endocondyle and the table-top is quite 6 mm. The two other femora specimens, however, almost touched the horizontal plane with their endocondyle also (Pl. XIII, figs. 1*b*, 4). The beaver-bone exhibits exactly the opposite case. There is not the slightest indication of any torsion here, but owing to the much stronger development of the inner condyle the short outer condyle lies at a considerable distance from the horizontal plane (Pl. XIII, fig. 3).

This torsion, which might be an argument for assuming a swifter movement in the extinct animal, is further expressed in the outward slope of the trochlea, which is longer than in *Castor*, whereby the portion of the epiphysis lying on the outer side of the trochlea is much smaller than that on the inner side (Pl. XII, figs. 5*a*, 6).

The assumption that the movement of the hind-limb must have been mainly vertical, is favoured by the circumstance that the trochanter major, *i. e.* also the place of attachment of the principal adductor muscle, the glutaeus medius, lies closer to the acetabulum than is the case in *Castor*. This distance exhibits individual differences, as will be evident by comparing the femora of *Castor* with each other, and those of *Trogontherium*, on Plate XII of this paper, with those in COLLOT.

The enormous expansion of the glutaeus group in the beaver, which we can deduce from the large, low-lying trochanter tertius and from the long, broad facies glutaea of the ilium, did not occur in *Trogontherium*; the femur is much less strongly specialized.

The fossa intercondyloidea is deeper in *Trogontherium*; moreover, it is narrower, while the condyles are closer together. In *Castor* the articular surface on the endocondyle narrows rather suddenly towards the front side of the bone, and in most cases forms in this way a narrow bridge to the distal margin of the trochlea, although it may be separated from the latter by a groove, 2—3 mm. in width (Pl. XIII, fig. 3). In *Trogontherium* this groove has an average width of 7 mm. on the Teglian femora; on the Mosbach femur the distance is the same as in *Castor*.

On the posterior side of the femur a smooth tract of bone is formed in both animals, which, beginning from the posterior edge of the great trochanter, runs slightly obliquely inwards and downwards, forming the partition between two muscular depressions at the level of the trochanter minor. In *Castor* the inner one is very large and lies partially at the posterior side of the trochanter minor, but also lower, and is shaped like an inverted equilateral triangle, the upper side of which is formed by the intertrochanterical crest. This impression, according to CUVIER, is the place of origin of the femellus and a portion of the iliacus muscle. The lateral muscular depression is long and narrow; caused by the attachment of the quadratus femoralis, it runs along the outer edge of the bone and ends on the trochanter tertius. In the femur of *Trogontherium* both depressions are small and narrow, which indicates less strength in these three muscles, all of which have the same function, namely, the rotation of the leg outwards. Here they lie parallel to the tract of bone separating them, the medial one cutting through the somewhat faint crista intertrochanterica in the direction of the very deep fossa trochanterica, the lateral one lying at the posterior side of the trochanter tertius (Pls. XII and XIII). Straight below the latter depression, just above the ectocondyle, the strong muscular depression, mentioned by OWEN, is to be seen, which, according to this author, does not occur in *Castor*. Both on the recent and on the fossil femora of this animal, however, I could distinguish a muscular depression which, though less clear, lies exactly at the same place and, according to CUVIER, indicates the origin of the plantaris muscle. In figure 7*a* on Plate XII only the proximal end of it is to be seen along the upper half of the fracture surface. In connection with the greater forward inclination of the caput, the region of the bone lying between the great and the lesser trochanter and above the intertrochanterical crest is not concave, neither in transversal nor in longitudinal direction, as it is in *Castor*, but convex in both directions, so that there is no question of a distinct deep fossa between these two trochanters here.

From MOORE's description (1890) it appears that *Castoroides*, as regards the form and the place of the trochanter tertius, shows again a typical, intermediate place between *Castor* and *Trogontherium*: "The third trochanter in *Castoroides* is a thick, heavy blade. Its greatest prominence is nearly opposite the lesser trochanter, being much higher up than in *Castor*".

Steneofiber viciacensis (FILHOL, 1879), as well as the larger, geologically younger St. depéreti (MAYET, 1908), resembles *Castor fiber* closely in form and place of the third trochanter. FILHOL

states that "le femur a beaucoup d'analogie avec celui des Castors. Le troisième trochanter, moins développé, présente de nombreuses variations de forme suivant les sujets. Sur certains il constitue une apophyse très saillante tandis que sur d'autres il n'existe pour ainsi dire pas. D'autre part le corps de l'os est arrondi sur certains échantillons, tandis que sur d'autres il est comprimé d'avant en arrière". The femur of *Steneofiber viciacensis* is long in proportion to the width of the ends, a feature also stated by PETERSON (1905) with respect to *Palaeocastor fossor.* In the larger European species this ratio is rather less.

The larger the castorid is, the broader are the ends of the femur in proportion to its length. This is evident likewise from the proportions in *Trogontherium*, *Castor* and *Castoroides*. Moreover, the length of the femur decreases in the family proportionately to the length of the tibia (see Table on page 203).

Tibia-fibula. (Pls. XIII, XIV.)

OWEN (1869) describes, besides the femur, a right tibia-fibula from Mundesley, which is neither complete. Here, too, the distal epiphysis is injured, the free portion of the fibula is entirely wanting, and the proximal end of the tibia is broken off obliquely at about four-fifths of the whole length. Newton mentions this tibia-fibula again, and illustrates it from another side in his communication of 1882, in which he further mentions a distal half, collected by Mr. CLEMENT REID from the Forest Bed in Paston, and a fragment of a young bone found in the Upper Freshwater Bed of West Runtön.

OWEN's description runs as follows: "The tibia of *Trogontherium*, besides the superiority of size as belonging to a Rodent larger than the European or Canadian beavers, differs in the much less depth of the cavity impressing the back part of the proximal half of the shaft: in the thicker and more obtuse inner (tibial) border of that concavity: in the stronger antero-posterior sigmoid flexure of the entire bone: and the greater extent of the confluent distal ends of tibia and fibula. The medullarterial canal has a similar position and direction. The anterior ridge is thicker and subsides sooner in *Trogontherium*: the outer concavity and inner flat or subconvex surface resemble those in *Castor*. The inner malleolus is longitudinally grooved as in *Castor*: its back part is produced: the outer malleolus projects a little above the distal articular end of the fibula".

As regards the description this holds good also for the forty odd fragments of the tibia-fibula from Tegelen and for the few fragments from the Forest Bed and from Jockgrim, which I could examine. For purposes of comparison I have figured the Teglian objects on Plate XIII, figs. *5a* and *5b*, in exactly the same position as OWEN did, and thus arrive at the conclusion that OWEN's object must have been either a larger specimen with other proportions, or that his drawings are not quite true to nature. In my description I shall return to this.

In not a single one of the Teglian specimens has the free portion of the fibula been preserved, no more than the proximal epiphysis of the tibia. A tibia in the collection of the TEYLER Museum (Pl. XIII, fig. 5) and one in the WEINGÄRTNER collection (fig. 6) are the most complete that I have seen. By the peculiar bone-structure at the upper end they indicate the place where the epiphysis has fallen away, so that the length of the whole shin bone can be measured on them up to the epiphysis. Fortunately I found in the Berlin collection a loose right proximal epiphysis which fitted very well on to the right tibia in the TEYLER collection.

The length of this restored specimen, then, was 153 mm., 8 mm. of which being accounted for by the epiphysis. The bone in the collection WEINGÄRTNER was 141 mm. long without the epiphysis, thus exactly the same size.

One might premise from the absence of these epiphyses that the two bones are not full-grown, but the dimensions of the distal end, which I compared with about 30 others, prove that they have attained their normal size.

We may thus assume 153 mm. to be the length measurement, from the highest point of the tibia to the lowest point of the malleolus externus, *i. e.* of the fibula. Since the length of the tibia-fibula of the beaver (of the recent one as well as of that from the Clay of Tegelen, belonging to the collection of the Geological Institute at Utrecht) is 142 mm., the difference is not very great, and there is no ground for deducing, as OWEN does, that we have to do here with a larger animal, more especially as the average length measurement of the femur (105 mm.) and of the tibia-fibula (153 mm.) together does not exceed that of *Castor* (117 mm. + 142 mm.).

The great width of the distal end in the English figure (38 mm.)

exceeds by far the specimens from Tegelen, and seems to have been drawn too large. Among the 12 quite complete distal ends from Tegelen there was not a single one which measured fully 31 mm.; on an average the full-grown bones have a width of 30 mm. there, while the antero-posterior diameter of the distal epiphysis is approx. 16 mm.

NEWTON, too, states that the above-mentioned distal half, at that time in the possession of Mr. REID, is, although full-grown, smaller than the one described by OWEN, and illustrates this last specimen again with a width of 34 mm., which, in my opinion, will be nearer the real size. Through the kindness of Dr. BATHER, of the Geological Department of the British Museum, I received on loan a number of *Trogontherium* remains from the Forest Bed, among which were a half-dozen tibia-fibula fragments. All these were badly damaged, but nevertheless it appeared to me that two of these were but slightly larger than the specimens from Tegelen.

The difference in form is less than in the femur. *Castor* and *Trogontherium* have both a fairly strong, complete fibula, which for about one-third of the whole length is united distally with the tibia. Above this region of confluence the tibia has a strong, forward flexion (in *Castor* rather less), so that an elongated egg-shaped interstitium cruris is formed.

As was already observed by NEWTON in the full-grown fragment from Paston, the coössification of the two bones is very solid in *Trogontherium*, and has taken place very early in life. Even the smallest and youngest specimens which I saw, and in all of which the distal epiphysis of the tibia as well as of the fibula is lacking, are already fully anchylosed. On Plate XIV, figure 2, the inner structure at the place of fusion can be discerned only by the somewhat finer and closer structure of the spongiosa.

In *Castor*, on the contrary, this fusion is never a complete one. In the adult fossil bones in the Utrecht and Munich collections, as well as in the recent bones after maceration, the tibia and fibula are separate from each other. Where NEWTON speaks of this fusion as being of "much greater extent" in *Trogontherium*, this agrees with his and with OWEN's illustration, where the extent of this confluence measures as much as 70 mm. In none of the Teglian specimens, however, did I find more than 58 mm., the average was 55 mm., against 50 mm. in the beaver. So the difference with *Castor* is not very great in the Teglian bones and, owing to the somewhat greater length of the tibia of *Trogontherium*, the difference relatively is still less. In three of the adult bones from the Forest Beds I was able to measure the extent of the confluence, and found 52 mm., 55 mm. and 59 mm., the last measurement in a fragment which is somewhat stouter than the bones from Tegelen.

Of the total width of the distal end (appr. 30 mm.) exactly half is accounted for by the fibula; in *Castor* not more than one-third, namely, 10 mm. of the appr. 30 mm. (Pl. XIII, figs. 8, 9*a*).

This strong distal extremity of the fibula curiously enough possesses in *Trogontherium*, besides the vertical articular surface, common to all animals, for the outside of the astragalean trochlea, another *nearly horizontal articular surface for a lateral process of the astragalus and for the calcaneum.* This is highly remarkable, since a similar articulation between fibula and calcaneum has never been found in any simplicidentate Rodent, whether recent or fossil. In TULLBERG (1900) we read on page 60: "Im Fuszskelett der Simplicidentaten ermängelt der Calcaneus, wie bei den meisten Säugetieren einer Gelenkfläche gegen das Wadenbein."

And in MILLER and GIDLEY's definition of the Rodentia (1918) we find: "fibula never articulating with calcaneum."

The reason that neither OWEN nor NEWTON noticed this remarkable facet on the fibula will be due to their having had no astragalus at their disposal to build up the complete ankle joint. The corresponding articular surface on the calcaneum appears to have escaped their notice likewise.

Something similar may have taken place in other imperfectly known fossil skeletons, so that it is by no means certain that *Trogontherium* occupies an exceptional position among the Simplicidentata in this respect. (See also p. 222.)

A detailed description of this articular surface of the fibula may follow here, compared with the situation as found in *Castor*. The vertical and sagittally directed articular surface on the fibula, that borders almost perpendicularly on the articular surface of the tibia, also occurs in *Castor* with a somewhat different shape (Pl. XIV, figs. 6, 7), and articulates with the outer side of the astragalean trochlea. In the latter it stretches out as a flat facet, higher in front and narrowing backwards, over the whole depth of the fibula, while in the fossil it is also high in front, but suddenly becomes lower and ends before the posterior side of the fibula is reached.

With a rounded-off right angle at the lowest and most anterior part of this articular surface, an equally broad, ventral articular facet begins, which runs almost horizontally outwards, then bends backwards and rather outwards. It lies upon, and articulates with, the tongue-shaped horizontal outward process of the astragalus and also with the horizontal part of the lateral calcanean facet which forms the continuation of the astragalean process backwards (Pl. XIII, fig. 9). In *Castor* there is nothing of this triple articulation to be seen; the fibula ends distally with the malleolus lateralis, from the lowest point of which a strong ligament goes off to the lateral surface of the calcaneum, beside the articular surface for the astragalus, *i. e.* to the place where in *Trogontherium* the articular surface for the fibula is found. In this animal the fibula articulation projects quite 7 mm. under the malleolus lateralis, so that the calcaneum can be reached by the fibula along the outer side of the astragalus.

In both animals the malleolus lateralis bears on the posterior side a vertical ridge forming the dividing line between two longitudinal grooves on the fibula (Pl. XIII, figs. 8, 9*a*, Pl. XIV, figs. 2, 3, 4). Through the inner groove, which is the broadest and deepest, run the tendons of the peronaeus brevis, strong in *Castor*, and of the peronaeus medius; both foot-extensors are attached to the outward-sloping back of the metatarsal v, the former to the most ventral point of its basis, the latter to the capitulum, as we shall see later on. In the narrower and less deep lateral groove runs the tendon of the m. peronaeus longus, which exercises the same function and which, in *Castor*, after having passed through the ventral groove of the calcaneum and of the cuboid, attaches itself to the plantar side of the basis of the metatarsal I.

The course of the tendons of this group of muscles was in *Trogontherium*, as appears from the bones in question, exactly alike and their action no less strong, as can be inferred from the deep grooves.

In the collection of the Mission House at Steyl, I found a fragment which exhibits the divergence of the fibula from the tibia, the only specimen on which it is to be seen (Pl. XIV, fig. 1). The angle is but little greater in *Trogontherium* than in *Castor*. The collection Krause contains a distal end of tibia-fibula, in which about one centimeter of the free fibula is still perfect, but the tibia has been broken off here just at the dividing line (Pl. XIII, fig. 8).

A sharp ridge unites with the tibia at the base of the foramen interosseum. Here ends also the ridge which runs along the outer side of the anchylosed part of the fibula and to which on its proximal end the strong ligamentum interosseum cruris (Pl. XIII, fig. 9*a*) is attached, which stretches to the hamular process of the fibula.

Of the further free portion of the fibula nothing is represented in the different collections, probably owing to the fibula having become, proximally, broader but thinner, just as is the case in the beaver. Of its attachment to the proximal epiphysis of the tibia nothing is known either, as the only tibial epiphysis which I met with in the collections was damaged just at that place.

This proximal epiphysis of a right tibia (Pl. XIII, figs. 5, 9*b*) was fortunately but slightly damaged at the edges. It is remarkable that also this epiphysis appears to anchylose very late with the shaft. The same thing was observed by FILHOL (1879) in about sixty tibiae of *Steneofiber viciacensis*, of which in not more than ten specimens the proximal epiphysis was consolidated with the shaft. Of the four proximal ends of tibia shafts which I had at my disposal, there was not one where the epiphysis had not slipped off, although the bones were not merely adult, but were even so old that the line of the distal epiphysis had become very indistinct.

In accordance with the proportions on the distal end of the femur, the depth at the proximal epiphysis of the tibia is also slightly greater in proportion to the width than in *Castor*; likewise the distance between the facies articularis is less.

The bottom of the fossa intercondyloidea in *Trogontherium* seems to stretch rather further backwards in proportion to the articular surfaces, but, as the facies medialis lacks a portion posteriorly, this cannot be determined with certainty. As has been observed, the place of attachment of the fibula to the condylus lateralis is lacking, owing to the injuries.

With regard to the free part of the shaft of the tibia, OWEN mentions the shallower concavity on the posterior side as a point of difference, one which indeed is striking. I measured in *Trogontherium* a depth of 3.5 mm.; in a recent *Castor* 7—8 mm.; in that from Mosbach in the collection Mainz, a few centimeters below the epiphysis, 7 mm. The reason also lies, as OWEN mentions, in the internal border being less high and sharp, which tends to curve over backwards, and on which I could find no muscular depression as is to be found on the bone of *Castor*, where the popliteus muscle is attached here, by which the lower leg can be flexed and turned inwards.

That the crista tibiae in *Trogontherium* is thicker than in *Castor* is certainly not true of the specimens from Tegelen and Mosbach, as I could see on the five pieces of shafts which show this crest clearly. The contrary is the case, as is evident from the cross-sections through the shaft of two left specimens two cm. below the epiphysial line (text fig. 9). The crista tibiae which, in *Trogontherium*, is sharper and projects considerably further, still curves outward here; lower down on the shaft the ridge becomes lower and its direction straight forward.

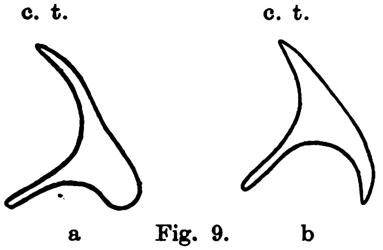


Fig. 9.

Cross-section through proximal part of left tibia: a. of *Trogontherium* from Tegelen, b. of *Castor fiber*. c. t. = crista tibiae.

A proximal tibia fragment of *Castor* (one of the skeleton parts which are fairly frequently found as fossils) can be distinguished at the first glance from one of *Trogontherium*, when it is viewed perpendicularly upon the external ridge (crista interossea). This crest in the beaver (text fig. 9*b*) then runs just in the middle, dividing the bone into two longitudinal halves of equal width. If we regard the tibia of the extinct animal in this way, the half which is formed by the crista tibiae is much broader than the other half (text fig. 9*a*).

In *Castor* the facies articularis for the astragalus on the tibia (Pl. XIV, figs. 3, 4, 5) is only slightly convex transversally, and the margin touching the fibular facet is rounded outwards. *Trogontherium*, however, possessed a strongly convex articular surface and the boundary on the fibular side is concave. From the middle of the boundary line a small groove runs obliquely backwards, which cuts off a postero-lateral angle from the articular surface, larger in the one individual than in another. This part has not been covered with articular cartilage, and agrees with the form of the astragalus, which will be discussed later.

From the anterior side of the articular surface in *Castor* a short, narrow groove runs straight backwards as far as the middle of the cochlea (fig. 5). In the other this groove is narrower and shorter and runs obliquely in the direction of the fibular surface.

On the inner side of the tibia the "medullarterial canal" (OWEN), in which the tendons of the flexor hallucis longus run in *Castor*, is in *Trogontherium* deeper and narrower (Pl. XIV, figs. 6, 7), while, moreover, the entire ankle-joint is less stout in structure and the shaft above it narrows quickly, imparting a more slender appearance to the bone. The groove can also be traced farther upwards in *Trogontherium*, as far as the dividing line between tibia and fibula. About a centimeter below its upper end this groove gives off downwards and backwards a flat, narrow, double groove, which bends straight downwards in the middle and then loses itself in the confluence of tibia and fibula. (Pl. XIII, fig. 5*a*). Neither in the fossil nor in the recent beaver skeletons did I find any trace of a groove of this kind, probably due to the impress of a blood-vessel or a tendon.

The tibia-fibula of *Castoroides* corresponds to that of *Trogontherium* in as far as the distal ends of the two bones have completely coalesced; in the former to an extent relatively as large (95 mm. on a tibia length of 253 mm.) as in the latter (55 mm. on a length of 148 mm.). "It is with difficulty that the line of union can be traced", writes MOORE (1890). An articulation between fibula and calcaneum did not occur; the degree of flexion of the tibia resembles rather that in *Castor*.

Of *Steneofiber viciacensis* these limb-bones also have been described by FILHOL (1879). They are slender, and united to each other for a short distance only, though not fused, so that, as in the fossil beaver, tibia and fibula are always found separated. There is no mention of an articular surface on the fibula for the calcaneum, although there was one perfect fibula among the material. *Trogontherium*, therefore, stands alone among the Castoridae known at present, unless there may have been such an articulation in *Palaeocastor fossor* PETERSON, as might be assumed from that author's description (1905) of the fibula of this animal, in which the following observation occurs: "The distal epiphysis is slipped off so that its character cannot be ascertained. The calcaneum indicates, however, that the fibula may have touched the exterior face of the sustentacular facet." Moreover, the possibility exists, according to Matthew (1905), that something similar occurs in *Eutypomys*, since we find in this writer: "fibula-calcanear contact slight or absent."

Calcaneum. (Pls. XIV, XV.)

In OWEN's publication (1869) we also find a left calcaneum of *Trogontherium* described and illustrated together with a calcaneum of *Castor canadensis.*

The description runs as follows: "The calcaneum in both *Castor fiber* and *Castor canadensis* is remarkable among rodents for both the considerable length and breadth combined, of the hind or fulcral process, which, with the articular part of the bone placed horizontally for renewing and supporting a superincumbent vertical tibia, is so inclined as to seem to be flattened vertically (depressed) rather than from side to side (compressed).

"From the "Forest-bed" of Mundesley, Mr. Gunn obtained a calcaneum (left) of this castorine type, equalling that bone of a full-sized beaver in length, but exceeding it in breadth. I assume it to belong to the *Trogontherium.* The articular part of the bone presents two surfaces superiorly, for the astragalus and part of the larger anterior surface remains on the fossil for the cuboides. The outer and upper surface is longer and narrower in *Trogontherium* than in *Castor*; the inner process is simply concave, not convex, and flat posteriorly, as in *Castor.* The fulcral process is broader and thicker, relatively much broader to its length, since in *Trogontherium* the bone is equally divided between its articular and fulcral parts, whereas in *Castor* the latter is the largest. In *Castor* the inner and lower border of the fulcral part is almost straight. In *Trogontherium* by the inclination of the tendinal canal to the under and fore part of the bone, the inner border of the fulcral process is somewhat convex."

As was the case with the tibia-fibula, the measurements which I found on the nine heel-bones of *Trogontherium* from Tegelen in the various collections do not quite agree with OWEN's figures of the English specimens. Furthermore, the proportions between fulcrum and articular part differ from those given by OWEN.

In the recent *Castor fiber europaeus* (fig. 11) I found an absolute length of 54 mm., 24 mm. of which are the articular part and 30 mm. are the fulcrum. In a fossil specimen from Taubach this dimension is 56.5 mm., divided into 29 and 27.5 mm.

The average length of the calcaneum in *Trogontherium* I found to be 46.5 mm.; the maximum was 47 mm. The fulcrum was never longer than 20 mm. and the articular part not more than 27 mm.

Thus, in *Trogontherium* from Tegelen, the length of the two parts is not the same, as OWEN states and illustrates of the English bone, but rather as 3 : 4. In the beaver the ratio varies between 5 : 4 and 1 : 1; there is thus, less of a difference between the lengths of the two parts than in the extinct animal.

NEWTON (1882) illustrates the same calcaneum as OWEN did, with dimensions of 22 and 26 mm., instead of 25 and 25 mm., for the two parts.

As regards the position, OWEN's figure shows a dorso-medial view, as does the illustration of NEWTON. OWEN did not state the position, and NEWTON terms it "seen from inner side". I have figured the calcaneum of both animals in the same position (figs. 10*a*, 11*a*) as these authors did. to allow of a comparison with the English illustrations. The calcaneum, as seen from above, is given in the phototype on Plate XV, figs. 1, 2, 4; not "the articular portion stands horizontal", but only the internal articular surface for the astragalus, which is then in the proper position to support the tibia-fibula. We see, however, that the characteristic feature attributed by OWEN to both animals, namely, an appearance as if the fulcrum were compressed from above downwards, holds good for the beaver only, as regards the whole length of this process. In the fossil merely the most posterior part of it is flattened in such a way, but the angle made by the longest diameter with the horizon is still as much as 25° here. This posterior end of the fulcrum is more strongly developed in *Trogontherium* and bears a much larger epiphysis, the place of attachment of the tendo Achillis. This, indicative of powerful calf muscles, agrees with the massive distal extremity of the femur where these muscles arise.

Anteriorly the fulcrum runs obliquely upwards, while, seen from above, it also becomes narrower. Where the articulating portion begins, the height of the fulcrum is greater than the breadth.

To the description of the articular surfaces I can add the following: In the beaver the external articular surface is not merely broader and shorter (9 by 12 mm.), but it represents only the distal convex portion of the narrower external articular surface (7 mm. by 14.5 mm.) in *Trogontherium.*

The proximal part of this facet is very slightly concave and bears the tongue-shaped process of the astragalus (Pl. XIV, figs. 9, 10*a*, 14). It bends outwards in a rounded right angle, so that it comes to lie horizontally to form the posterior and outward continuation of the astragalean tongue, forming in this way, together with this astraglean process, the articular surface for the fibula (Pl. XIV, fig. 9).

With respect to the internal astraglean facet on the sustentaculum tali, this is, as also in the recent animal, convex at the posterior end, but this convex portion is not more than a tiny tapering point in *Trogontherium*. Owen does not mention this small part on his specimen; this will be due to the circumstance that the fossil was somewhat damaged on the surface, as indeed appears from the figure. The facet has an average maximal breadth of 7 mm.; the length is 18.4 mm. (In *Castor* these measurements are 4.8 and 17.2 mm. respectively.) There is one remarkable difference, however, in the shape of this articular surface in the two animals. From behind forwards the facet runs on uninterruptedly in the beaver until it ends in a sharp point (appr. 55°) along the cuboid facet. A slight narrowing is seen at the place where it reaches the cuboid facet. At this spot the articular surface in the other animal is interrupted for a distance of over 2 mm. (fig. 10*a*). The larger posterior portion, and the narrower, smaller anterior portion, are pear-shaped in *Trogontherium*, and have the round ends directed towards each other. The anterior portion along the cuboid surface tapers more than in the beaver, the two sides forming an angle of appr. 20°.

The cuboid facet stands vertical and is, on the calcaneum of both animals, triangular in shape, and has the sharpest angle turned outwards (Pl. XIV, figs. 10*c*, 11*b*). The horizontal dorsal side and the lateral side of the triangle are nearly straight and equally long, and form an angle of about 150° in *Trogontherium*. The third, medial, side is deeply notched, so that two lobes are formed, the lower of which is broad and round, the upper pointed and directed somewhat backwards, ending along the anterior astragalean facet. In *Castor* all three sides are concave, and here it is just the lower lobe that is smaller than the upper one, which ends in a blunt point at the same level as the whole facet.

The interior, lower border of the calcaneum in *Castor* runs almost straight, or very slightly convex from behind forwards (fig. 15). Just in the middle a tiny tuberosity indicates the place of origin of the abductor hallucis. In *Trogontherium* the said edge is decidedly convex, owing to the great size of this tuberosity (fig. 14), between which and the sustentaculum runs Owen's "tendinal canal". This broad canal crosses, ventrally and anteriorly, almost at right angles, the tendinal groove for the peronaeus longus at the base of the calcaneum and cuboid (fig. 13). In *Castor* one can hardly call this a "tendinal canal", as the sustentaculum and the small tuberosity are far apart and the latter is too small to form a canal wall.

Some differences in character which the calcaneum of *Castoroides* shows with that of *Castor* are given by MOORE (1890): "The inner projection for the support of the astragalus is relatively greater than in *Castor*, and the tuberosity is more thickened vertically." Both these differences again are intermediate between the characters of *Trogontherium* and *Castor*.

FILHOL writes of *Steneofiber viciacensis*: "Le calcaneum est comme l'astragale, sembable à celui des Castors".

Regarding *Palaeocastor fossor*, PETERSON (1905) mentions: "The tuber is relatively much broader than in the beaver", and "the fibula may have touched the exterior face of the sustentaculum facet, which is relatively as broad as that in the beaver". (Of course PETERSON does not mean here the sustentaculum facet, but the *outer* facet of the calcaneum.)

Astragalus. (Pls. XIV, XV.)

Nowhere in the literature on *Trogontherium* have I found any mention of this bone of the tarsus. In the collection in the TEYLER Museum there is a complete right astragalus of *Trogontherium* (fig. 17). In the Berlin collection I saw two uninjured right, and in that at Vechta, two almost perfect left specimens. Beside one of these two, illustrated on Plate XV, fig. 4, lay a label stating that this object has already been referred to *Trogontherium* by NEWTON, together with a vertebra, figured on our Plate IX, fig. 9.

The best preserved is the right ankle bone in the collection at Maestricht (fig. 16). Unfortunately the trochlea is damaged on the inner side, but the articular surfaces are dark in colour and thereby clearly distinguishable from the other, lighter coloured, parts of the bone. In the last-mentioned collection there are also two left specimens. Thus in all I had eight bones at my disposal.

When viewed from above (Pl. XIV, figs. 17*a*, 18*a* and Pl. XV, figs. 1, 2, 4), the astragalus of *Castor*, which corresponds to that of *Trogontherium* as regards its dimensions (average 22.5 mm. long and 21.5 mm. broad), shows a trochlea which is broader than it is long, and the breadth of which (appr. 17 mm.) is the same anteriorly and posteriorly. The direction of the transversal concavity is straight forward. A broad neck, situated inwardly and directed obliquely forward, connects the broad head with this pulley, the articular surface of which exhibits a deep notch anteriorly. According to LECHE (1890), the extent of motion of the foot is greatly increased by this medial position of the head.

In *Trogontherium* we see, in accordance with the narrower facet on the tibia, a much narrower trochlea (appr. 11 mm.), likewise deeply notched anteriorly on the articular surface. Both borders of the pulley, the outer one of which is higher than the inner, diverge slightly forwards. The narrower neck leads to a head lying straight in front of the trochlea. The caput is 2 to 3 mm. higher than that of the beaver, and the articular surface for the navicular is produced farther on the upper side.

On the internal side of the astragalus (figs. 17*d*, 18*d*) in *Castor* the facet for the tibiale occupies the whole surface of the low head and the neck, whereas in the other animal the neck remains uncovered, and only the round distal edge of the head is covered by a narrow, arched facet. The tibiale here lies thus more ventrally on the higher head. On the inner side the trochlea bears a long, narrow facet, owing to the concave articular surface of the tibia enclosing the trochlea also sideways, in *Castor* rather more than in *Trogontherium*.

The ventral side of the ankle bone (figs. 17*b*, 18*b*) is occupied by the two large articular surfaces for the calcaneum, separated by a groove, broad in front and narrowing backwards, which ends, distally as well as proximally, at the trochlea. The inner articular surface covers the entire breadth of the caput, and in *Castor* becomes suddenly narrower backwards, to end broader again and concavely. In *Trogontherium* the facet narrows gradually to the end, which here lies somewhat less distally. This end is likewise concave, but merely at the extremely tapered point, in accordance with the situation which we have found at the distal end of the inner calcaneum facet.

The form of the outer articular surface on the lower side differs appreciably in the two animals. In *Castor* the concave surface is clearly bounded by an angle of nearly 90° from the vertical facet for the fibula which occupies the lateral side of the trochlea. In the extinct animal these two surfaces merge into one another gradually, so that the lateral posterior angle of the astragalus, so distinct in *Castor*, has entirely disappeared in *Trogontherium*. The anterior angle in this animal thereby projects transversely in a tongue-shaped process, which transversely, as well as from before backwards, is slightly convex, and bounded in front by a straight line. The inner edge of this facet stands higher against the outer ridge of the trochlea, so that the surface there is concave from side to side, as in the beaver. Here, however, the angle between the anterior and the inner edge of the facet is not a right angle, but is formed by a long oblique line, making the sulcus between both calcanear facets broad at that place.

On the outer side of the astragalus we see (figs. 17*e*, 18*e*) again the higher head and neck in the fossil animal and the merging, without any angle, of the lateral calcaneum facet into that for the fibula. The dividing line is merely indicated by a rougher strip, 3 to 4 mm. broad, which has not been covered with articular cartilage.

In *Castor* the fibula facet stands sagittally on the astragalus over the entire antero-posterior extent, similar to the situation on the fibula. In *Trogontherium*, however, this surface is standing only partially vertical and only on the anterior side; then it bends with a rounded right angle outwards, and in its further course is directed downwards and slightly backwards. This part, totally lacking in the beaver, articulates in *Trogontherium* with the dorsal side of the tongue-shaped process of the astragalus, and stands almost perpendicularly upon the vertical facet for the fibula (figs. 9, 16, 17*a*). It projects nearly horizontally beyond the bone, to lie against the outer articular surface of the calcaneum. Together with the small adjacent facet of the calcaneum, it forms the horizontal articular surface for the fibula.

The indications, to be seen on the caput, of boundaries between the facets for calcaneum and cuboid, navicular and tibiale, exhibit a higher articular surface for the navicular, a broader one for the calcaneum and the cuboid, and a narrower one for the tibiale.

Whereas we saw that on the calcaneum the internal facet was interrupted, the corresponding facet on the astragalus runs on unbrokenly, merely a faint ridge on the head indicating a separation. On the outer side of the caput the boundary line between calcanear and navicular facet terminates proximally in a somewhat higher point, which at the same time is the apex of a rectangular notch in the articular surface (figs. 9, 16, 17*e*). Medially the boundary line between the calcanear and navicular facet on the one side and the tibiale facet on the other, lies nearer to the border of the caput, so that the tibiale facet is narrower, as we have seen; moreover, it lies more proximally and lower down on the head.

MOORE (1890) saw no difference between the astragalus of *Castoroides* and that of the beaver, no more than FILHOL (1879) did between the ankle-bone of *Steneofiber viciacensis* and that of the latter.

PETERSON mentioned that *Palaeocastor fossor* exhibits a relatively longer neck and narrower trochlea on the astragalus than *Castor*.

Two astragali from the upper-miocene Flinz of Anmeister, near Münich (STROMER, 1928), have, as I think, been rightly referred by the author to *Steneofiber minutus* v. MEYER. They are 9 mm. long and very similar to the ankle bone of *Trogontherium*. They differ from that of *Castor* by the same features as *Trogontherium* does, and from the latter by a relatively narrower head, which lies more before the inner side of the trochlea, and by the absence of the tongue-shaped outer process. The neck is relatively shorter than in *Palaeocastor fossor* and the trochlea less narrow.

Navicular. (Pls. XIV, XV.)

Besides the calcaneum the navicular is the only element of the foot of *Trogontherium* that has already been described; this was by MARTIN A. C. HINTON (1914) in his communication: "On some Remains of Rodents from the Red Crag of Suffolk and from the Norfolk Forest Bed."

Before reproducing HINTON's description here, I will state for the sake of clearness that what I have termed *ventral* on the tarsus, Hinton calls *posterior*, or behind; where I have spoken of *distal*, he speaks of *below*, etc.

His description runs as follows:

"One of the most interesting of Mr. SAVIN's recent acquisitions from the West Runton deposit is a foot-bone which I have determined as the right navicular of *Trogontherium*, a part hitherto unknown. Four views of the fossil are given with corresponding views of the navicular of *Castor fiber*. Generally the fossil closely agrees with the recent bone in form and in the number and arrangement of the facettes; it differs principally in having the articular surfaces much larger, the posterior spur, on the other hand, much smaller, so that as a result, its absolute size is but little greater. Anteriorly it is wider, posteriorly narrower, so that its plan is triangular instead of nearly rectangular. In the beaver the astragalean facette is a circular, rather deep basin, with a well-defined posterior rim, occupying about half of the proximal surface; in the fossil it is a rather shallow, irregularly shaped concavity with an ill-defined posterior margin occupying fully two-thirds of the proximal surface. The distal surface presents the usual three facettes for the cuneiforms, and these have a greater antero-posterior extent than in the beaver. The facette for cuneiform III is nearly plane instead of concave, antero-posteriorly; that for cuneiform II is relatively wider and gently convex from behind forwards, instead of nearly flat. The facette for cuneiform I is large, crescentic and concave, forming the anterior side and roof of a profound notch which cuts almost through the bone from the distal to the proximal surface; in the beaver this notch is much less deep and the facette is greatly reduced and convex, only the anterior part of the facette of the fossil being represented. On the other hand in the beaver the anterior face of the greatly developed descending process or "spur" bears a small additional facette for the posterior margin of cuneiform I, which is not represented in the fossil. Between the superior border of the chief facette for cuneiform I and the astragalean surface there is in the beaver a rather large, slightly inclined, oval facette for the "naviculare tibiale"; in the fossil this facette is also present, but is narrower, triangular in shape, and highly inclined. The outer (fibular) side of the bone is occupied anteriorly by the cuboid facette. In the beaver this is relatively short, low behind, its plane nearly vertical, and very slightly concave antero-posteriorly. In the fossil it is longer, much higher behind, its nearly vertical anterior portion faces backwards and outwards, and its oblique hinder part faces slightly forwards, downwards and outwards; the outer border of the bone, when viewed from below, consequently appears widely notched instead of straight or gently concave. The posterior spur is much less developed than in the beaver; in the latter its plan is nearly square, its flat upper surface ascends posteriorly, while below it is produced as a massive projection descending considerably below the general level of the distal surface; in the fossil it is narrower; its upper surface is rounded and shelves away behind and laterally, while below the descending process is little developed and scarcely attains the level of the distal surface".

HINTON is correct in drawing attention to the slight difference in size between this tarsal bone of the beaver and that of *Trogontherium.* He, however, gives the length of the latter as 1 mm. longer, whereas in my objects the difference was not more than 0.1 mm., as the beaver bone I measured was 0.6 mm. longer and that of *Trogontherium* 0.3 mm. shorter than those of HINTON's. Further it appeared from the transversal diameters dorsally (HINTON's anteriorly) and ventrally (HINTON's posteriorly) that the Teglian navicular was rather smaller and the recent bone somewhat larger, so that my absolute measurements approach each other more nearly.

The only perfect navicular, a left one (Pl. XIV, fig. 19; Pl. XV, fig. 4), which I had at my disposal, belongs to the collection of St. Joseph's College at Vechta, in Oldenburgh. For the rest, the collection DUBOIS, in the TEYLER Museum possesses a left specimen, which lacks the ventral part with spur and facettes for cuneiforms I and II.

What struck me in studying the figures given by HINTON was the great difference in form between the naviculars of the two animals, a difference which is much slighter in the two objects I compared, at first sight visible only in the larger articular surface for the astragalus and in the weaker spur. As is evident from photos 19 and 20 on Plate XIV, the outlines of the bones are similar on the whole. Of a triangular form in *Trogontherium,* as compared with a rectangular form in *Castor,* as HINTON's drawings show, I can find only a trace. Neither does my beaver bone show the purely circular facet for the astragalus, nor is its outline in *Trogontherium* so decidedly angular. It is apparent from the Table on page 232 that the three facets on the distal side in the objects I had, are slightly higher in *Castor* than in *Trogontherium.* The facet for cuneiform II on the Teglian specimen is different in form from that given by HINTON for the English one. It shows in the middle of the longest measurement a distinct constriction, as the dorsal boundary is slightly, and the ventral more strongly, concave. The "small additional facet for the posterior (ventral) margin of cuneiform I" (HINTON), which occurs in *Castor,* is of a different nature from the other facets, since it is not covered with cartilage in the living animal.

Measurements of navicular (millimetres)	Trogontherium				Castor			
	Absolute		Reductions		Absolute		Reductions	
	Tegelen	Forest Bed	Tegelen	Forest Bed	Elbe	Thames	Elbe	Thames
		HINTON		HINTON		HINTON		HINTON
Antero-posterior diameter.....	19.4	19.7	100.0	100.0	19.3	18.7	100.0	100.0
Transverse width in front	15.3	15.7	78.9	79.8	13.9	13.7	72.0	73.4
,, ,, behind	6.6	7.1	34.0	36.1	9.1	8.6	47.1	46.0
Width of astragalean facet ...	11.0	11.7	56.7	59.4	9.7	8.6	50.2	46.0
,, ,, facette for cun. III.	8.5	8.6	43.8	43.7	8.5	9.0	44.0	48.2
,, ,, ,, ,, ,, II..	5.7	6.6	29.4	33.5	5.2	5.0	26.7	26.8
Ant.-post. diam. of fac. f. cun. III	6.4	6.8	33.0	34.6	6.5	5.7	33.7	30.5
,, ,, length of cuboid fac.	10.1	12.0	52.1	61.0	9.5	10.5	49.2	56.2
Height of cub. fac. at post.-ext. corner of fac. f. cun. III....	6.1	5.0	31.4	25.4	4.6	5.2	23.8	27.8
Height of cub. fac. behind ...	6.0	6.6	30.9	33.5	4.5	4.8	23.3	25.7
Least dist. betw. fac. f. cun. III and front edge of prox. surface	5.0	5.1	25.8	25.9	3.7	4.0	19.2	21.4
Height of spur behind	7.6	7.3	39.2	37.1	10.7	11.0	55.4	58.8

Like Hinton, I was not able to find it on the fossil bone.

Whereas the absolute length and breadth of the navicular of the beaver I measured exceed those of Hinton's specimen, it is remarkable that the cuboid facet is appreciably narrower and shorter in the Teglian object. Likewise the length of this facet is much less than in the Runton fossil. The angle between the dorsal and the ventral portion of this facet is smaller in the Teglian specimens (max. 30°). Distally the distance from this facet to that for cuneiform II is considerably less than in the beaver. The cuboid facet in *Trogontherium*, namely, makes a sharper angle with the astragalus facet than in *Castor* (83°), so that it turns further distally and occupies a larger region on that side (fig. 19*b*).

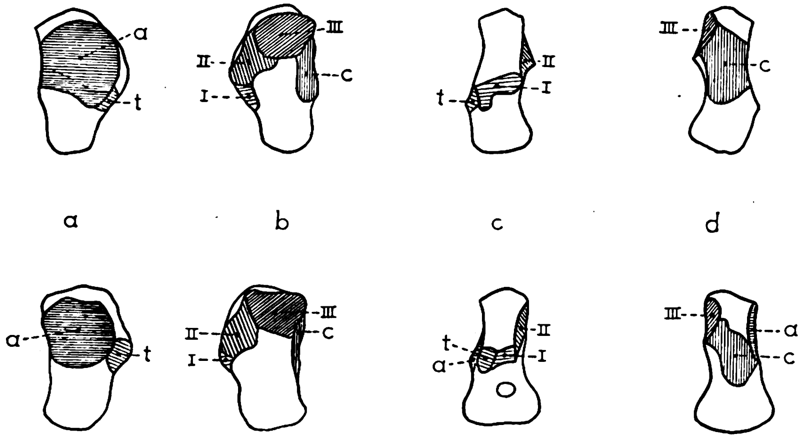


Fig. 10. Left naviculars of Pl. XIV, figs. 19 and 20.
a. proximal, b. distal, c. internal, d. external view.

The dorsal side of the navicular in *Trogontherium* preserves the same antero-posterior dimension from side to side, whereas in *Castor* a distinct point juts out distally (figs. 19*e*, 20*e*), which intervenes somewhat between cuneiforms II and III, so that these two form an angle with each other transversely. In the fossil these two bones lie more in one line beside each other. Owing to the more ventral position of the tibiale facet the dorsal surface of the navicular is to be seen for a larger part at the back of the tarsus.

It would be somewhat dangerous to deduce from the faint spur that "the flexor muscles" are less powerful. This could only be true for one portion of the tibialis posticus which is inserted here in *Castor*, and for the abductor hallucis which arises there (CARLSSON, 1891). These are muscles of but minor importance compared to the two large toe flexors, the plantaris muscle (perforated superficial flexor of the toe, SCHULZE, 1867) and the flexor tibialis (flexor digiti cummunis longus), with regard to which nothing can be inferred from the form of the navicular. That the tibialis posticus, which also sends off portions to the tibiale and the "accessory bone", might be weaker in *Trogontherium*, appears to me to be probable, since not only the spur of the navicular is weaker here, but, as we shall see later on in this treatise, also the tibiale.

HINTON infers from the form and dimensions of the navicular of *Trogontherium*, firstly, that the animal to which this bone belonged must have been larger than the beaver. In my opinion there is no indication of this. The larger articular surface for the astragalus has, as we have seen, a bearing upon the higher head of this bone, which is not larger than in the beaver. Neither would the greater surface for the cuboid be any proof of this bone being larger, which, as we shall see later on, is not the case. The same applies to the larger size of the articular surfaces for cuneiforms I and II. What all these larger articular surfaces do indicate, however, is a greater extent of movement between the tarsal bones.

Another of HINTON's deductions is that the narrower facet for cuneiform III on the English specimen, and the greater development of the facets for the two other cuneiforms, would seem to imply that the third toe will not have been so much more developed than the second, as is the case in *Castor*. The fact that in the Teglian specimen the facet for cuneiform III is not narrower than in the beaver, is a further indication that caution must be exercised in making deductions based upon the measurements of one single specimen. It is true that the specimen from Tegelen also showed the difference in breadth between the facets for cuneiforms II and III to be less than in *Castor*. A glance at the whole foot (Pl. XV, fig. 1), however, shows that the difference in length and in thickness between the second and the third toe is considerable. I cannot understand HINTON's writing: "From the circumstance that, judging from the navicular, the two digits (III and IV) were less specially favoured in *Trogontherium*, etc.", since nothing can be inferred from a navicular regarding the fourth digit. Rather might a larger cuboid and a *more* developed fourth digit have been deduced from the larger cuboid facet on the navicular if we are to deduce the size of the bones from the size of the facets, which, however, is not allowable, as we have seen.

Neither the navicular of *Castoroides* nor that of *Steneofiber* or of *Palaeocastor* has been described.

Cuboid. (Pl. XV.)

The collection in the Teyler Museum is the only one which contains a cuboid of *Trogontherium*; this is a perfect right one (fig. 5) which, in respect of form and size and the arrangement of the facets for calcaneum, astragalus, navicular and metartarsal IV, shows great similarity with this tarsal bone of *Castor*. The form and dimensions of the facets differ considerably, however. The smallest differences are seen in the horseshoe-shaped facet for metatarsal IV, lying on the distal side (fig. 5*a*). This side

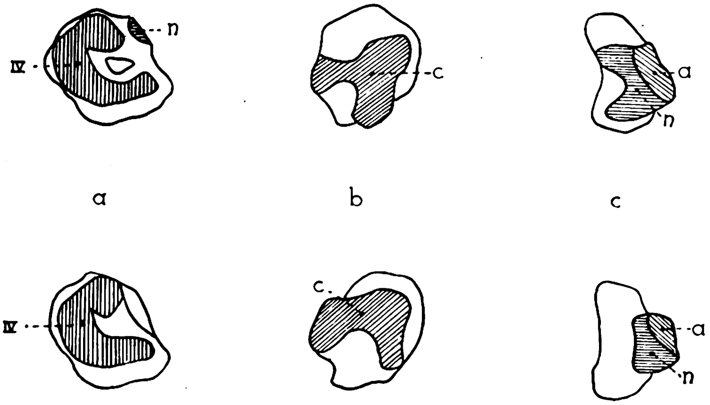


Fig. 11. Right cuboids of Pl. XV, figs. 5 and 6.
a. distal, b. proximal, c. internal view.

in *Trogontherium* is more concave in transversal direction, while a triangular tuberosity is to be found in the deep part between the two lobes of the horseshoe, probably the point of attachment of the ligament of this joint. In the beaver the concavity between the two lobes of the facet is narrower and not deep. The ventral lobe of the facet in the latter is broader and rather shorter. Besides this large facet for the fourth metatarsal we see in the fossil (fig. 5*a*), on the medial margin of the distal surface, a small part of the very convex large facet for the navicular.

The proximal surface of the cuboid bears the large facet for the calcaneum, which differs more in form in the two animals, as might be expected from what was found on the corresponding facet of the calcaneum.

In both animals it is almost triangular in outline, but in *Trogontherium* the three sides are more concave than in *Castor*. In the former the upper lobe is the weakest, in the latter the strongest; the notch is broadest in *Castor*. The angle formed by this facet with the astragalus facet is the same in both animals, but in *Trogontherium* the boundary line is noticeably shorter. The facet for the calcaneum on the cuboid is smaller than the facet for the cuboid on the calcaneum.

The difference between the internal surface of the two cuboids is remarkable (figs. 5*c*, 6*c*). On the fossil bone we see a large, nearly heart-shaped articular surface occupying the entire breadth. A very low ridge, which curves from the proximally situated top of the "heart" to the middle and then straight upwards, shows faintly the boundary line between the proximal part, articulating with the astragalus, and the distal part, articulating with the navicular. In the beaver the separation between the two parts is much clearer, since they form an obtuse angle with each other (appr. 130°). Both facets in this animal are so small, however, that together they occupy only a small rectangular region on the proximal end of the internal surface and leave a broad strip free between the facet for the navicular and the facet for metatarsal IV, which stands perpendicularly upon it. This considerable difference in size between these facets is not surprising, however, as larger facets for the cuboid have been found on the astragalus as well as on the navicular in *Trogontherium*.

Here again they point to greater extent of motion, as does the deeper concavity of the articular surface for the fourth metatarsal.

The astragalean facet on the cuboid is the prolongation forwards of the internal astragalean facet on the calcaneum. In *Castor* it is flat, in *Trogontherium* slightly concave in a vertical direction, and considerably higher, corresponding to the greater breadth of the calcanear and cuboid facet on the astragalean caput. The facet for the navicular in the fossil is, as was to be expected, much higher, and also broader, and, moreover, convex from below upwards. The notch is hardly to be seen in *Castor*, where merely a dull spot on the glistening facet shows where it lies in *Trogontherium*.

Palaeocastor fossor is the only fossil castorid of which a cuboid has been described, which PETERSON (1905) has compared with that of *Cynomys*.

Tibiale. (Pl. XV.)

Of the tibiale, too, the only specimen, a left one (fig. 7), is in the TEYLER Museum. This tarsal bone was noticeably smaller in *Trogontherium* than in the beaver, as is also the case with its facets for the astragalus, the navicular and cuneiform I.

In *Castor* the shape is a short wedge (fig. 8*d*), the horizontal ventral side, the oblique dorsal side and the proximal side of which have no facets. The vertical (external) surface (fig. 8*c*) bears the large concave facet for the astragalus and the flat rectangular facet for the navicular, which is not so high, and narrower. This adjoins, with an angle of nearly 90°, the facet for cuneiform I on the distal surface of the bone; this facet is triangular and concave from side to side.

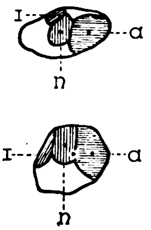


Fig. 12. Left tibiales of Pl. XV, figs. 7*c* and 8*c*; external side.

The tibiale in *Trogontherium* is 11.3 mm. broad and 9.7 mm. long; in *Castor* it is 11.7 and 11.6 mm. respectively. The astragalean facet in *Trogontherium* is 5.5 mm. in height and 7.3 mm. in length; in *Castor* 6.5 and 8.3 mm. respectively. The same measurements on the navicular facet of the extinct animal are 4.5 and 2.5 mm., in the beaver 5.3 and 3.0 mm.; those of the facet for cuneiform I in the former 3.5 and 2.5 mm., in the latter 2.8 and 5.0 mm. respectively.

The wedge-like form of the fossil bone is not so distinct, as the ventral and the medio-dorsal surface are somewhat convex, and the inner point is bent downwards (fig. 7*d*). Moreover, the facets lie differently. In *Castor* all three facets are standing vertical. If the large, oval, concave facet for the astragalus in *Trogontherium* be set vertical, the flat, bean-shaped facet for the navicular will be turned slightly upwards and the tiny, flat, oval facet for cuneiform I, which adjoins the latter with a very blunt angle, will lie entirely on the dorsal side (fig. 7*c*) and can thus be seen foreshortened in the right-hand lower corner of fig. 7*a*. From this it appears that the tibiale was situated more ventrally on the tarsus with respect to these two bones, as we already stated in the description of astragalus and navicular, and that this applies still more to the first cuneiform, of which no specimen has been found.

We have already remarked that the largest surface of the tibiale is the medio-dorsal one, which is convex in *Trogontherium*, but concave in *Castor* (fig. 8*d*), in accordance with the peculiar position of the "accessory bone" (Pl. XV, figs. 2, 12) in this animal. On the shallow concavity in the middle of this surface of the tibiale there lies, namely, the proximal extremity of the so-called sixth toe, a flat ossicle, covering the proximal outer corner of cuneiform I, and lying with its distal end beside this bone (text fig. 13).

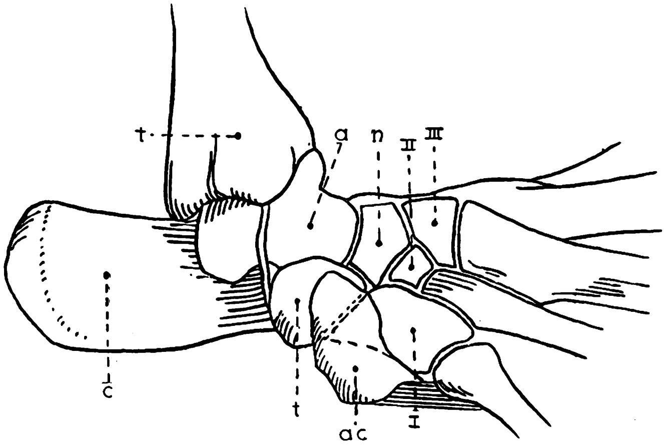


Fig. 13. Left tarsus of *Castor fiber*, inner view.
ac. = accessory bone partly covering tibiale and cuneiform I.

In **Giebel** and **Leche**'s "Säugetiere" we can read on page 616: "Die sechste Zehe geht bei *Castor* als langer Knochen von der Tibialfläche (des Tibiale) aus und liegt dem Entocuneiforme an." Their text figure 7, after a drawing of **Albrecht**, is not in agreement with this, as in the figure we see the "6e Zehe" lying beside the tibiale and the entocuneiform. The tarsus is drawn flat there, so that the accessory bone seems to lie horizontal like the two adjacent bones.

On the half-dozen beaver skeletons which I could examine the situation is, however, as I have already briefly described it, namely, the proximal half of the accessory bone lies on the distal half of the medio-dorsal surface of the tibiale, and causes a broad, shallow concavity transversely across the middle of that bone. More distally the ossicle covers also the medio-proximal corner of cuneiform I. Only the distal extremities of both bones lie beside each other. In this way a thin, almost vertical, inner foot-edge is formed in *Castor* by the so-called prehallux, from the distal border of which a firm ligament runs to the inner side of the first metatarsal bone. The entocuneiform is not, as ALBRECHT's figure shows, connected by a ligament with the first metatarsal, but by a distinct joint.

Whether *Trogontherium* may have possessed such an accessory bone, or sixth toe, cannot be determined. The tibiale bears no depression upon its convex medio-dorsal surface here, and since the tibiale is also weaker than that in *Castor,* the ossicle in question, if indeed it were present, has been of minor importance. Since CARLSSON (1890) states that in *Castor* the tibialis posticus sends off not only portions to the spur of the navicular and to the tibiale, but also to the accessory bone, and presumes the muscle to be also the extensor of the prehallux, the slight development of all these three parts of the tarsus in *Trogontherium* would seem to indicate a weaker tibialis posticus and a less strong development of the medial side of the tarsus.

It may be mentioned in passing that CARLSSON draws the accessory bone in her figure distally from the tibiale, and not partially covering it, as the position is in reality. Without going into the question of the nature of tibiale and accessory bone, I should like to remark that CARLSSON's conception of the tibiale in general appears to me to be correct, namely, that it is, as GEGENBAUER, TORINER and others have already pointed out, a sesamoid bone in origin, which has become absolutely equivalent to the other tarsalia, as there is more than one muscle attached to it. CARLSSON, however, interprets tibiale and accessory bone in *Castor* as an "Ueberzähligen Strahl", fallen into two pieces, whereas I believe their peculiar position (*viz.* partially covering each other) to be a strong objection to this conception. Going upon what I found on the skeletons of *Castor* with preserved ligaments, I am inclined to term the accessory bone a sesamoid, originating in the strong, flat ligament that runs from the middle of the medio-dorsal side of the tibiale to the base of the first metatarsal.

A good drawing of tarsus and metatarsus of the beaver is to be found in TULLBERG (1900) on Plate XXXV.

No other tibiale of castorine type is known. Stromer (1928) observed on the ankle-bone of *Steneofiber minutus* a facet for an inner sesamoid bone (tibiale tarsi?).

Metatarsus. (Pl. XV.)

The collections from the Teglian Clay contain one or more specimens of all metatarsalia of *Trogontherium.* Only of three of these, mts. II, III and IV, reproduced on Pl. XV, fig. 1 and on Pl. XVI, fig. 7, is it certain that they have belonged to one and the same animal. As all the metatarsalia of *Castoroides ohioensis* have been described and illustrated by Moore (1890), and all of *Palaeocastor fossor* and *barbouri* by Peterson (1905), it is possible to make a comparison of the instep-bones of five Castoridae.

Considering first the relative lengths of the metatarsals, we find these to be exactly the same in *Castoroides* and *Trogontherium,* as will be apparent from the Table below, in which 100 has been taken as the length of mt. II in all five animals. The conditions in the beaver differ in so far as the first mt. is much shorter than the other four, and further, while mts. II, III and IV do not differ greatly from each other in length, mt. V is here shorter than mt. II.

	Absolute length in millimetres					Relative length				
	Pal. b. Nebraska	Pal. f. Nebraska	Castor Europe	Trog. Tegelen	Cast.s Indiana	Pal. b. Nebraska	Pal. f. Nebraska	Castor Europe	Trog. Tegelen	Cast.s Indiana
Metatarsal I	5.0	10.0	27.8	37.4	53.8	56	71	64	80	81
" II	9.0	14.0	43.5	46.9	66.8	100	100	100	100	100
" III	12.0	15.0	51.7	57.9	85.8	133	107	119	124	128
" IV	9.0	14.0	55.5	69.3	101.6	100	100	128	148	152
" V	4.5	7.0	40.4	48.6	69.8	50	50	93	104	104

Thus, if *Castoroides* resembles *Trogontherium* closely as regards the relative lengths of the metatarsalia, with respect to the relative stoutness of these bones, the resemblance of *Castoroides* to *Castor* is quite striking. "To see the metatarsalia in *Castor* is to see them in *Castoroides,* with but a very slight modification to increase the scale and a little variation as to proportionate length. The fourth metatarsal in *Castor* is the longest and stoutest, yet its pre-eminence in this respect is not so marked as in the specimen before us. No. III appears at once to be four or five times stouter than II" (MOORE, 1890). Mt. IV he terms: "the giant brother of the set." The remarkably great difference in thickness between II and III is characteristic of *Castoroides*, where IV exceeds III but little in this respect. In *Castor* mt. III and mt. IV are nearly the same in thickness, but there is less of a difference between them and mt. II, although the ratio of the circumference of the shaft of mt. II to that of mt. III is 2: 3. In *Trogontherium* mt. IV is still more "the giant brother", also as regards the stoutness; in this respect it surpasses mt. III as much as mt. III does mt. II. The ratio of the circumference of these three metatarsalia in this animal is as 3: 5: 8.

As regards the shape of the metatarsalia, *Trogontherium* differs from *Castor* in so far as the distal extremities of mts. II and III bend inwards, those of IV and V outwards. Since the bases of the metatarsalia (as we shall see), as well as the position of the facets for cuneiforms II and III on the navicular, indicate a more parallel position of the toes, it is remarkable, that the metatarsalia in their distal half exhibit this slight bending away from the axis of the foot which runs between III and IV (Pl. XV, fig. 1; Pl. XVI, figs. 3*a*, 9*a*, 14).

The toes hereby come to stand farther apart. In *Castor*, where this bending does not occur, the metatarsalia show transversal enlargements on the dorsal side, which touch each other and keep the four outside toes at a considerable distance from each other.

The same "inward bending" of mts. II and III, and the "outward bending" of IV and V, was observed in *Castoroides* by MOORE, who wrote: "This bending helped to give spread to the toes."

The extent of the movement of the instep-bones with each other was greater in *Trogontherium* than in *Castor*; the bases and capitula of these bones are higher and the shafts rounder.

Metatarsal I. (Pl. XV.)

In the collection in the TEYLER Museum there is a right metatarsal I of *Trogontherium*, lacking the distal extremity, and a left one which is damaged at the proximal end. In the collection at Berlin I found a right specimen which was quite perfect (fig. 13).

If this bone be laid beside a right mt. I of *Castor fiber*, in such a way that the positions of the capitula are the same, the specimen of *Trogontherium* might be taken to be a left one (figs. 13, 14), for on the basis (which in mt. I is also the epiphysis) the articulation for cuneiform I has exactly the opposite inclination in the two animals. Further, the opposite edge of the articular surface projects considerably; in *Trogontherium* this border lies on the inner side of the foot, in *Castor* on the outer, *i. e.* the edge turned towards mt. II. Owing to the peculiarly twisted position of mt. I in this animal, this high border forms on the sole of the foot the so-called "Sohlensöcker" to which the peroneus longus is inserted. On a closer examination it appeared, however, that the fossil metatarsal also was a right specimen which must have lain less twisted on the foot edge, as will be discussed later on.

Seen from the front, the first metatarsalia of both animals exhibit other points of difference also. The beaver bone is much shorter and thinner in the middle in proportion to the extremities. The base, which bears a high, narrow hinge-joint for cuneiform I, is, as usual, triangular in cross-section.

As, however, the bones in the webbed foot of the aquatic beaver are flat and broad, and the tarsus, too, is flattened in the "fin-plane", the thin rectangular cuneiform I (fig. 11) does not stand vertical, as is commonly the case in the foot of terrestrial types, but slopes outwards (fig. 2), while the articulation for metatarsal I is not directed straight forwards, but obliquely outwards. The extent of movement of the first digit in *Castor* is very great, as this articulation, not being strictly a hinge-joint, allows not merely of a vertical movement, but also of one in a horizontal direction, whereby this toe can be brought inwards under the second toe, as well as far outwards, a factor of great importance in swimming, as hereby the size of the web can be contracted and extended considerably. The other toes, the metatarsalia of which are connected proximally by ligaments for a considerable length, cannot be of much use for this purpose.

Owing to the oblique position of the articulation between cuneiform I and metatarsal I, this metatarsal also comes to lie in such a position that the medial surface, into the base of which the tibialis anticus muscle is inserted, looks obliquely upwards here. This muscle, and the peroneus longus, attached ventrally to the "Sohlenhöcker" of mt. I, effect the intensive inward and outward movement of the first toe.

Whereas the dorso-medially situated edge of the joint in *Castor* is very short, we see, as already mentioned, that in *Trogontherium* this side of the base of mt. I is just the one which is most developed and furnished with a rough surface; it is produced as a ridge for a short distance on the ventral side (fig. 13*b*). Just at the place of this ridge in *Castor* the ligament is attached that comes from the tibiale and in which the accessory bone is developed. It is possible that in *Trogontherium*, too, a similar ligament arose from the rough dorso-medial surface of the tibiale and was attached along that ridge, possibly with an ossification like the accessory bone in its substance. Strong marks of both muscles, mentioned above in the case of *Castor*, can also be seen in *Trogontherium* on the ventral knob and on the medial side of the base of the first metatarsal. Whereas in *Castor* the articular cartilage continues a short way over the top of the joint on the plantar side, in *Trogontherium* it is limited to the dorsal side of the bone (figs. 13*d*, 14*d*). The direction of the joint indicates a more vertical and straight forward position of cuneiform I, and a less twisted one of the first metatarsal. This would be in entire agreement with the other indications of a less broadly built foot, namely, the more ventral position of the smaller tibiale. In discussing the other metatarsalia we shall find still further indications of this fact.

Regarding the bone from the side (figs. 13*c*, 14*c*), we see the height of metatarsal I gradually decrease towards the capitulum in *Trogontherium* without, as in *Castor*, increasing again. This distal end in the latter is somewhat broader and, when regarded upon the distal facet, less symmetrical, being lower on the inner side than on the outer.

A mt. I of *Castor*, also from the Teglian Clay and belonging to the Utrecht collection, is damaged proximally (fig. 15). It is somewhat stouter than the bone of the recent beavers I saw. Width and height of the base in *Trogontherium* are 9.9 and 10.7 mm. respectively; in the recent *Castor* 8.0 and 7.7 mm. Width and height of the capitulum in the former are the same, *viz.* 6.6 mm.; in *Castor* from Tegelen 7.2 and 7.4 mm. The same measurements in the middle of the shaft in the extinct animal are 4.5 and 6.0 mm.; in the beaver from Tegelen 5.3 and 4.3 mm. respectively.

Mt. I of *Trogontherium* is thus appreciably longer and higher, especially proximally, than that of *Castor* with, in proportion to its extremities, a thicker shaft. The inner edge of the proximal articulation is the strongest developed. Seen dorsally, the articulation is inclined forwards and outwards.

Moore does not mention any difference between mt. I of

Castoroides and that of *Castor*. In his illustration it can be seen that the proximal end (at all events, if not damaged) bears a joint bounded by two equally high rims. Again an indication of the morphologically intermediate place of *Castoroides* between *Castor* and *Trogontherium*.

Metatarsal II. (Pls. XV, XVI.)

In 1893 DEPÉRET, in his treatise on "Les terrains tertiaires de la Bresse", mentions and illustrates a mt. II, which he assumes to belong most probably to *Trogontherium*. This assumption proves to be correct, for I have found a specimen exactly identical among the *Trogontherium* material from Tegelen.

The French specimen came from the upper Pliocene (p.1*b*) of the Saône valley, from the "sables de Saint Cosme", near Chalon sur Saône; it is now in the collection of the Faculté des sciences, at Lyons. DEPÉRET assumes mt. II to be "parfaitement semblable" to that of *Castor fiber*, but larger than the latter, being 45 mm. long, against 40 mm. in a Rhône beaver "de grande taille".

On a careful comparison I found some characteristic differences in form between the second metatarsals of the two animals, while the difference in length was less in my objects of comparison, since the recent Rhône beavers are not of great size.

The only specimen of mt. II of *Trogontherium* that I found in all the material, and fortunately a perfect one, is in the collection at Haarlem. That its length exceeds the same bone in *Castor* much less than was the case with mt. I, will be evident from the Table on page 142.

In comparing the bones the first point that strikes one is the above-mentioned inward bending of the distal end, the greater height of the base, and the considerably shorter extent of that portion of the bone bearing traces of contact with the adjacent metatarsalia. We have referred above to the transversal enlargements which occur on the dorsal surface of the three middle metatarsalia in *Castor* and which are lacking in *Trogontherium*.

The height and the proximal width of the base of mt. II in *Trogontherium* are 11.5 and 4.0 mm.; in *Castor* 9.4 and 5.3 mm. The height and width in the middle of the shaft in the extinct animal are 4.9 and 5.5 mm. respectively; in the beaver 4.0 and 5.1 mm. The dimensions of the capitulum were the same in both animals, *viz.* 9.0 mm. wide and 8.2 mm. high.

Besides these differences, it is noticeable that with the same position of the capitula (being here, as in metatarsals II, IV and V, also the only epiphysis) the dorsal surface of the base in the extinct animal exhibits a sharper slope downwards to the inner edge of the foot, *i. e.* to cuneiform I adjacent to it inwardly. This is another indication of a higher, narrower middle foot, slanting more sharply inwards. This difference in inclination is as much as 20° and, in consequence, if we regard mt. II upon the proximal extremity, we see in *Trogontherium* (fig. 16*b* and text fig. 13) an outline like a right-angled triangle, the hypotheneuse of which stands nearly vertical on the foot, forming the boundary towards mt. III. The dorsal side is formed by the steep, sloping dorsal surface above-mentioned, which forms a right angle with the triangular inner surface of the base (fig. 16*d*). In *Castor* this surface lies sagittally (fig. 17*a*); in *Trogontherium* obliquely (fig. 16*a*). The contact with mt. I exists only at one point on the internal surface of the base in *Castor*; also in *Trogontherium* a similar point is to be seen at the corresponding place. It is not a facet covered with cartilage, however, but rather an accessory facet, such as we found on the spur of the navicular in *Castor*. A similar oval facet in both animals lies somewhat ventral from the aforesaid point, and is the place of contact for cuneiform I.

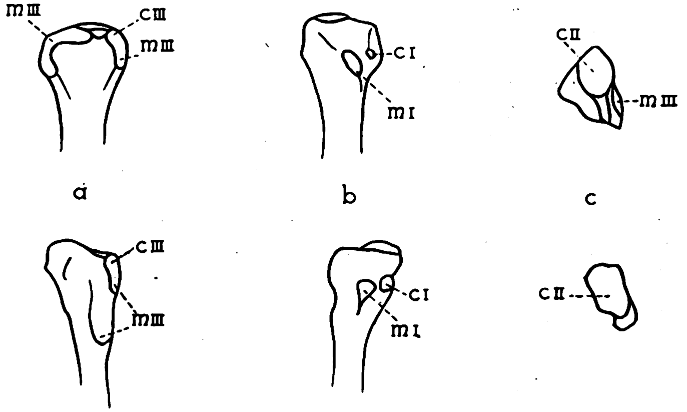


Fig. 14.
Right metatarsal II, of Pl. XV, figs. 16 and 17, proximal end.
a. external, *b.* internal, *c.* proximal view.

The proximal facet for cuneiform II (6.5 mm. high and

4.4 mm. wide) is narrower and lower in the extinct animal, and covers only the broader dorsal portion of the narrow pear-shaped proximal surface. The ventral portion, in the beaver sloping sharply upwards, is lacking in *Trogontherium* (fig. 16*d*, 17*d*). The base of mt. I extends further downwards over the base of the second metatarsal, whereby a narrower strip of the base of this bone, projecting in a point, is to be seen on the sole of the foot. A similar narrowing of the ventral base is to be seen on mt. III (Pl. XVI, figs. 7, 8).

On the outer surface lies a wide, round cavity for the reception of a round tubercle of mt. III. Dorsal and proximal to this concavity lies a long kidney-shaped facet, in the concave distal extremity of which articulates the inner point of the dorsal side of the base of mt. III (Pl. XV, fig. 1). The proximal flat portion of the facet is a contact facet for the third cuneiform. In *Castor* there is no round concavity, but a rough surface; the tubercle on the third metatarsal which, in *Trogontherium*, articulates in it, is here totally lacking. In the beaver the facet is smaller and the distal portion less decidedly concave; but here, distally from this facet, the triangular contact surface extends outwards to meet a similar enlargement of mt. III.

The flattening of the dorsal surface which accompanies these enlargements in metatarsals III and IV, is absent in the extinct animal.

The ventral angle of the external surface in the latter animal bears a long, narrow, curved facet for the ventral point of the base of the third metatarsal, where in *Castor* there is merely an uneven surface.

Briefly thus, mt. II of *Trogontherium* is distinguished, firstly, by those characteristics which have been mentioned respecting the first metatarsal, *viz.* greater length, higher base with sharper inclination inwards, and higher shaft. Further, by an inward bending, more distinct facets, and freer articulation with the third metatarsal, a smaller zone of contact with this metatarsal and absence of a transversal enlargement of the shaft.

The surface of contact with the first cuneiform stands obliquely on the longitudinal axis of the base.

With regard to mt. II of *Castoroides*, MOORE (1890) writes: "No. II, which is comparatively slender, is much enlarged at the distal end, where it is somewhat bent inward. It is much flattened laterally at the base, where it joined the small middle cuneiform. This flattened proximal end is squarely truncated, and has a shallow fossa for the articulating surface and a tubercle on the under side."

Metatarsal III. (Pls. XV, XVI.)

Of the middle metatarsal I had at my disposal 8 specimens, all of right feet. One is quite complete (Pl. XV, fig. 1; Pl. XVI, figs. 3, 7) and belongs to the collection in the TEYLER Museum, at Haarlem. The one from the Berlin collection is not quite full-grown and lacks the capitulum along the epiphysial line (fig. 5). The bone from the Utrecht collection is broken off slightly higher than this line, as is also the one from the Mission Museum at Steyl (fig. 6). Further, I found three more fragments of different specimens in the collection WEINGÄRTNER, and one distal extremity in the Berlin collection.

Like mt. II the middle instep-bone is also larger, with a higher and narrower base than in *Castor* and a robuster shaft. The height of the base and the width (dorsally) in *Trogontherium* averages 15.8 and 10.2 mm., against 14.8 and 11.8 mm. in *Castor.* Height and width in the middle of the shaft are 7.5 and 9.1 mm., and in the beaver 6.7 and 8.0 mm.; the same measurements on the capitulum are 11.3 and 12.5 mm., against 11.0 and 11.8 mm. in the recent animal. Likewise the inward bending of the distal end and the absence of the transversal enlargement can be constated here. Not only is the base, dorsally as well as ventrally, narrower in the extinct animal (figs. 3*a*, 4*a*, 7 and 8), but both side surfaces indicate, by round dents and knobs which fit into similar formations on the base of the second and fourth metatarsalia, a greater extent of mobility than is possible in *Castor*.

The dorsal boundary line of the base is seen to be less oblique in transverse direction; the angle with the axis of the bone is 10° larger in *Trogontherium* (figs. 3*a* and 4*a*). In contrast to what we observed of the second metatarsal, mt. III slants more sharply inwards in *Castor*, if the capitula be placed in the same position. The slope in the latter is 30°; in the extinct animal only 15°. On the outer side of the base, quite dorsally (Pl. XIV, fig. 5*a*) lies an oval, convex facet (in *Castor* longer and concave) for the distal facet on the base of the fourth metatarsal. (Pl. XV, fig. 1). Ventrally of the facet a round hollow, and more ventrally again, a smaller concavity receive two round tubercles of mt. IV, while the concavity between these two receives a ventral knob of mt. III (Pl. XVI, fig. 7). In *Castor* this articulation is more restricted (fig. 8).

On the inner side of the base (figs. 4*b*, 5*a*), besides the round protuberance which can articulate in the wide concavity of mt. II, there can be seen quite dorsally the end of the large proximal facet bent over outwards. This small portion articulates with the narrow dorsal facet on mt. II. At the place where the transversal enlargements lie on mt. III of *Castor*, a broad, low ridge begins in *Trogontherium* (Pl. XVI, figs. 3*a*, 5*a*) on either side of the shaft; these ridges run forwards and somewhat downwards, and disappear in the shaft at a short distance from the capitulum. The lateral ridge, proximally, bears a distinct long muscle depression at the same level as where on the fourth metatarsal a long, deep muscle depression is to be found. Similar ridges, though weaker, run in *Castor* in the same direction from the transversal enlargements (fig. 4*b*).

The proximal surface of the base is occupied by the articular surface for the third cuneiform. This facet in the beaver (fig. 4*d*) is invariably one piece, and this is the case also in one of the bones of *Trogontherium* (fig. 5*b*). In the other, however (fig. 9*b*), there is a large dorsal facet, twice as wide as it is high, which is divided from a small ventral facet by a distance of some millimetres. The large facet is laterally slightly higher than medially, where it bends over to form a small articular surface for the second metatarsal. The small elliptic ventral facet looks inwards and upwards (fig. 5).

I cannot make out from MOORE's description if there is any difference in form between the middle metatarsal of *Castoroides* and of *Trogontherium*. A difference with *Castor* he does not mention.

Metatarsal IV. (Pls. XV, XVI.)

The only mention of a fourth metatarsal of *Trogontherium* is to be found in LAUGEL (1862), in the following words: "Le grand Rongeur de Saint-Prest est encore representé par le quatrième métatarsien".

The only perfect specimen that I have seen forms part of the collection of the Mission Museum at Steyl; it is a left one (Pl. XVI, figs. 9, 12). Two other left specimens, one of which lacks the proximal, the other the distal extremity (Pl. XV, fig. 1; Pl. XVI, fig. 7), are in the collection at Haarlem. The proximal half of a right metatarsal IV (Pl. XVI, fig. 11) is to be found in the Berlin collection, together with a right one, the proximal end of which is lacking, and a juvenile left specimen in which the articular surfaces at both extremities are missing. It is also represented in the collections at Maestricht and Vechta, namely, in the former by the proximal portion of two left specimens, in the latter by a damaged distal extremity.

We have already discussed the length and thickness ratios compared with the other metatarsals and with those of both the other large castorids (page 142).

On the nine above-mentioned more or less perfect bones I found the following average dimensions: Height and width (dorsally) of the base are 15.1 and 9.8 mm.; in *Castor* 13.2 and 11.4 mm. Length and height of the facet for mt. III are 4.5 and 5.6 mm., in *Castor* 6.7 and 6.1. Height and width of the middle of the shaft 14.2 and 11.7 mm., against only 7.4 and 8.2 mm. in the beaver. The capitulum is 13.7 mm. high and 15.6 mm. wide; in *Castor* 11 and 13 mm.

It appears that here again the base is higher and narrower, and the shaft higher. The distal half here also bends away from the axis of the foot (fig. 9). The convexity of the dorsal side longitudinally extends over the entire bone in *Trogontherium* (figs. 9*c*, 12), whereas in *Castor* the proximal portion of the back is flat, and broader on the lateral side. This flat enlargement bears on the ventral side the distal facet for mt. V, and disappears in the shaft (Pl. XV, fig. 2; Pl. XVI, figs. 8, 10*b*) about midway the bone.

The total length of the region of contact with the adjacent metatarsalia (leaving the dorsal enlargement which occurs only in *Castor* out of consideration) is less in *Trogontherium* than in *Castor*, also relatively less. For, whereas in the latter this on the outer side is one-third of the length of the bone, in *Trogontherium* it is not more than one-fourth (figs. 9*b*, 10*b*, 12, 13). The zone of contact with metatarsal V consists of a long and narrow, articular facet (fig. 7), covered proximally with cartilage, and of a smaller elliptic distal facet, which is connected by a ligament with the distal facet of the fifth metatarsal (figs. 14, 15). Both facets, which lie on the ventral surface, are smaller in *Trogontherium* than in *Castor*, and in the former more distinctly separated from each other by a concave strip of a few millimetres in width (fig. 7). In *Castor* both facets merge into one another and the connection with the fifth metatarsal is very solid at that place (fig. 10*b*).

When the bone is viewed from the ventral side the median ridge is very conspicuous; in the beaver it is only developed proximally, where a very deep, longitudinal groove separates it from the lateral region with the facets for mt. V (figs. 8,10 *b*). This ridge extends no further distally than the flattened portion does on the dorsal surface. In *Trogontherium*, too, this median ridge is separated by a shallow groove from the facets for mt. V. At the point, however, where it disappears in *Castor*, it becomes, in the extinct animal, a sharp ridge, which bifurcates just before the distal extremity (fig. 9*b*). Proximal from the middle of the bone it is marked by an oblong muscle depression. A cross-section through the middle of the shaft in *Castor* is a round-oval, wider than it is high; in the extinct animal it is a triangle with one very convex side, and two almost straight sides which form an angle of about 65°. The outer straight side is longer than the inner one. (See text figure 15.)

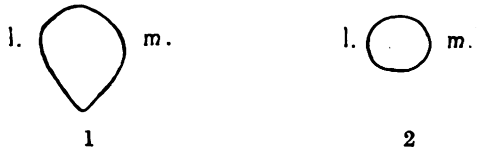


Fig. 15. Cross-section through the shaft of mt. IV; 1. *Trogontherium* from Tegelen, 2. *Castor fiber*. *l.* lateral, *m.* medial side.

Also the facets for the articulation with the third metatarsal are smaller in *Trogontherium*, and lie at a greater distance from each other. In *Castor* a ligament goes off from the proximal facet, while the distal, and more dorsally situated, contact surface is an articular facet covered with cartilage. Of the proximal facet nothing is to be seen in *Trogontherium*, but the ventral, most proximal point of the base fits into a hollow in the base of the third metatarsal (fig. 7). Divided from this point by a notch which receives a knob of mt. III, we see another tubercle on mt. IV which fits into the larger, more dorsal, concavity of mt. III.

The cuboid facet is similar in shape in both animals (figs. 11*c*, 10*d*) and covers, in the form of a horseshoe, the whole outer and ventral side of the proximal surface, which in *Trogontherium* is considerably higher.

Characteristics of the 4th. metatarsal of *Trogontherium*, thus, are its greater size and thickness in comparison with the other metatarsalia, and the high base and shaft, on the plantar side of which runs a median ridge.

In *Castoroides* (Moore, 1890) the base ends ventrally in a "powerful inferior tuberosity". The articular facet for the cuboid is less convex than in *Castor*.

Metatarsal V. (Pl. XVI.)

Of the 5th. metatarsal I saw three left specimens, one of which (complete except for the ventral, sharp spur-like ridge which occurs on all metatarsals in the middle of the capitulum) is in the collection at Berlin, and two in the collection at Maestricht.

A left mt. V of *Castor*, likewise from the Teglian Clay and forming part of the collection at Utrecht, served as an object for comparison. The slender form (fig. 15), the distinct outward bending of the distal extremity and the comparatively small portion (approx. one-third) of the bone that bears the two facets for the neighbouring metatarsal, are characteristic differences with *Castor* (fig. 17), where this bone is much shorter and the shaft thinner in proportion to the stout extremities, the base being very high (15.3 mm., against 11.8 mm. in *Trogontherium*). The two facets are larger in *Castor* than in *Trogontherium*; the height of the capitulum in both animals is the same (8.5 mm.); the width in *Castor* 10.2 mm., in the extinct animal 9.2 mm. Height and width of the middle of the shaft in *Castor* are 5.9 and 6.6 mm., against 7.1 and 6.1 in the other, so that in the latter the height again exceeds the width. The bone is borne, just as in *Castoroides* and *Castor*, entirely by metatarsal IV. The proximal facet is shorter than in the latter, and separated from the almost circular concave distal facet by a greater distance (figs. 14, 15). In the beaver the latter facet is flat and a longish oval, almost touching the proximal facet (fig. 17*a*, *b*). The depression of the peroneus brevis muscle in *Castor* lies on the top of the outer surface of the base (fig. 11*b*), in *Trogontherium* more distally (figs. 16, 17*c*).

The base of the fifth metatarsal of *Castoroides* is similar to that of *Castor*: "a broad base exteriorly gibbous below, with a flattened tuberosity which slants forward along the under side of the shaft into a low crest." "No. V is but a magnified view of the corresponding member of *Castor*".

The Missing Cuneiforms.

No cuneiforms have been found either of *Castoroides* or of *Trogontherium*. But it is possible, from our knowledge of the first row of tarsalia and of the bases of the metatarsalia of the latter, to form a conception of their shape and position (text fig. 16).

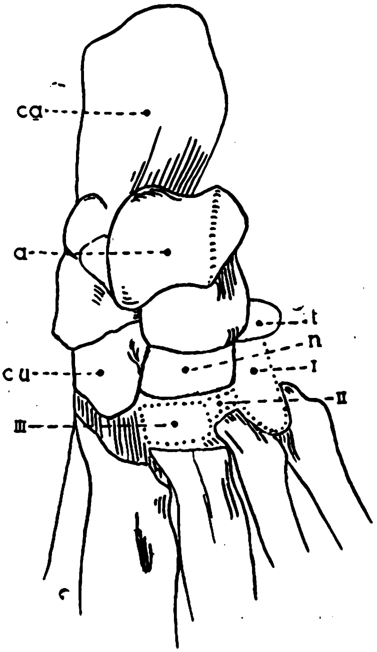


Fig. 16.
Reconstruction of the right tarsus of *Trogontherium*; dorsal view.

Cun. I was bounded behind by the tibiale and the navicular, laterally by cun. II and the inner surface of the base of mt. II, and in front by mt. I. Except the 2nd. cuneiform, all these parts and their facets for the first and largest cuneiform are known. On the tibiale the facet is smaller, on the navicular, however, larger than in *Castor*. We have noticed that in the fossil cun. I adjoins the tibiale more dorsally, but the navicular lower down. That, moreover, it stood more perpendicularly on the foot-edge is indicated by the inclination of the articulation on the base of the first metatarsal.

The surface of contact with the base of mt. II must, as we saw, have stood vertical, but at the same time oblique to the axis of this bone. From this we can figure cun. I as a long, narrow, high, rectangular bone, with many of the features of that of *Castor* (Pl. XV, figs. 2, 11), bearing distally the concave vertical articulation surface for the first metatarsal, slanting inwards and lying lower against the navicular, whereas the tibiale adjoined cun. I again lower than in *Castor*. All this is in accordance with the narrow, higher tarsus, as we have deduced this to be from the proportions on the bases of the metatarsalia. In most animals cun. I, with or without the tibiale, forms the inner edge of the tarsus;

it stands vertical and is directed straight forward. As has been mentioned, the precuneiform (prehallux or accessory bone) in *Castor* (text fig. 13), which lies partly against the tibiale, partly against and medially behind cun. I, forms the inner edge of the tarsus; it always stands vertical and is directed straight forward. It is not probable that such an element of the foot occupied an important place in *Trogontherium*. Cun. I here stands vertical, and the tibiale, situated low down against the navicular and the astragalus, shows, as we have already remarked, no trace of a partial covering by a precuneiform. The dorsal surface of the tibiale, however, as well as that on the strong base of the first metatarsal, would, by reason of its roughened appearance, warrant the supposition, that tendons of strong muscles (tibialis anticus and posticus) were attached here, in whose course a small sesamoid is very well imaginable.

Also the form of cun. II can be determined with a fair degree of certainty. This, the smallest of the cuneiforms, adjoins in front the very narrow base of mt. II, and behind the facet on the navicular, which facet is broader than in *Castor*. The dorsal surface on the back of the tarsus will thus have been narrower in front but somewhat broader behind than in the beaver. A further characteristic difference with this animal is the fact that the dorsal surface of the navicular shows that proximally the middle cuneiform lay in one line with cun. III, whereas on the navicular of *Castor* an obtuse angle of about 35° is formed by the facets for cuneiforms II and III (text fig. 13) This shape of the navicular in *Castor*, causing on the tarsus a divergence of the metatarsalia II and III, is favourable to the spread of the toes. (This divergence of the second row of tarsalia and of the metatarsalia is not brought out clearly in TULLBERG's figure of the skeleton of the beaver foot (TULLBERG, 1900, Pl. XXXV.) As we have seen, a similar result has been arrived at in *Trogontherium*, by the bending away of the distal extremities of the metatarsalia from the foot-axis, whereby a narrower, higher tarsus is maintained.

The form of cuneiform III on the back of the foot was nearly rectangular, no broader in front than behind, as the base of mt. III is narrower than in *Castor*, but the facet on the navicular is equally broad.

The distal surface was higher and dorsally narrower than in the beaver, as may be inferred from the relative proportions on the base of mt. III. The ventral narrow portion may have been separated from the dorsal portion and directed more outwards. The angle between the dorsal and the ventral portion of the distal facet in *Castor* is very blunt (155°) (Pl. XV, fig. 9); in *Trogontherium* an angle of about 120° must be assumed.

Digital Bones. (Pls. XV, XVI.)

Like the metatarsalia, also the digital elements of the right side have been preserved in the greatest number. Among them are the first phalanges of the four inner toes, of which, unfortunately, only that of the second toe is uninjured. Of the four outer toes of the right foot (Pl. XV, fig. 1) the phalanges of the second row are complete. Of the left foot I met, besides a juvenile specimen, three specimens of perfect first phalanges of the third toe (Pl. XVI, figs. 20, 22, 23) and the second phalanx of the fourth toe, besides a juvenile specimen of the same bone in the collection at Berlin.

Nearly all these bones belong to the collection at Haarlem, and the collections at Vechta, Maestricht and Berlin possess each a first phalanx of the third toe.

Besides all ungual phalanges, thus, only the first phalanx of the fifth toe and the distal half of the first phalanx of the first toe are lacking. The length of the first phalanges of the second and third toes only is known (see Table on page 157), *viz.* 36.0 and 40.2 mm., against only 24.3 and 27.6 mm. in *Castor*. These phalanges are thus one and a half times as long as those of the beaver and relatively still longer than the metatarsalia, as compared with those of *Castor*. The length of the first phalanx of digit IV may be estimated with a fair degree of certainty to be a few millimetres longer than that of digit III, thus about 43 mm. This estimate is possible because, ventrally, just at the fracture-surface of the only specimen, the beginning of the small ridges for the attachment of ligaments can be seen on both sides (Pl. XVI, fig. 24*b*), which also occur on the first phalanx of digits III and IV and disappear on the shaft at a distance of about one centimetre from the distal extremity. Also on the toes of *Castor* I found these traces of ligamental attachments. The length of the first phalanx of digit V can be only guessed at, as no fragments of it have ever been found. The fragment of the first phalanx of digit I does not allow of any estimate as to the length.

		absolute length			relative length		
		Trog. cuv. Tegelen	Cast.s oh. Indiana	Castor fiber recent, Eur.	Trog. cuv. Tegelen	Cast.s oh. Indiana	Castor fiber recent, Eur.
Metatarsal	II	46.9	66.8	43.5	100	100	100
Phalanx	II^{1}	36.0		24.3	77		56
,,	III^{1}	40.2	53 ?	27.6	86	79 ?	63
,,	IV^{1}	43 ?	53 ?	26.5	91 ?	79 ?	61
,,	II^{2}	21.2		16,7	45		38
,,	III^{2}	21.6		16.3	46		37
,,	IV^{2}	22.2	26.5 ?	15.5	47	40 ?	36
,,	V^{2}	18.7		14.3	40		33

Of *Castoroides ohioensis* described by MOORE (1890) only the first phalanx of digit III and IV and the second phalanx of the latter have been preserved. No dimensions of these are given; the illustrations are one-third of the natural size. From this it may be inferred that the first phalanges of both toes are equally long, *viz.* about 53 mm. In this respect also, namely the relative length of the phalanges to each other and to the metatarsalia, *Castoroides* ranks between *Castor*, where III is longer than IV and all the first phalanges considerably shorter in length than the metatarsalia, and *Trogontherium*, in which IV is somewhat longer than III and the difference in length between the metatarsal bones and the first phalanges is much less.

Yet not merely in length but also in shape do the first phalanges of *Trogontherium* differ appreciably from those of the beaver. A first phalanx of digit III of *Castor fiber* from Tegelen, in the collection at Utrecht (Pl. XVI, fig. 21), is indeed very different from the analogous bone, illustrated in figs. 20, 22, 23, of the extinct animal. These differences again are mainly of the same nature as on the corresponding metatarsalia, namely, a higher, narrower base and a higher shaft. The base is so high that on the first three toes it considerably exceeds the height of the capitulum of the metatarsalia. The distal extremities are relatively narrow and low; the trochlea is narrower and more deeply notched, on the plantar side as well as distally, than in *Castor*. Also on the articular facet on the base, which is as high as it is broad, we find a deep ventral notch between two distinct condyles.

On II^{1} and III^{1} there lies on the epiphysis of the dorsal surface of the base a tuberosity for tendinal attachment (figs. 18, 20, 23); on IV this lies more distally (fig. 24*a*).

Seen from the side the ventral surface of III^2 appears to be much less concave than in the beaver, the back is concave, in *Castor* convex. Height and width of the base on III^1 of *Trogontherium* are 12 mm. and 11.3 mm., against 10.0 and 13.3 on that of *Castor* from the same locality; width of trochlea on the distal extremity in the former 8.1, and in the latter 9.7 mm. All the first phalanges in *Castor* are shorter, flatter and broader. Respecting the first phalanx of the 4th. digit of *Castoroides*, MOORE (1890) wrote that it had been injured, and further: "The proximal ends of the first series of phalanges are concave with a sharply defined notch in the lower border of the articular surface. These notches cover the sharp spur-like ridges of the distal ends of the metatarsals. The sharply defined, well-pitted and roughened scars which mark the attachments of the various ligaments and tendons indicate how powerfully the parts of the feet were held together."

In the second row the phalanges (Pl. XV, figs. 1, 2) are also longer and more slender in *Trogontherium* than in *Castor*. It is remarkable that in the recent animal the second phalanx of digit II is the longest and that they decrease in length consecutively till the fifth toe. In *Trogontherium* they grow longer from the second to the fourth toe; the fifth is then, as in *Castor*, the shortest of all. From V^2 it appears that the fifth toe was conspicuously slender, more so than the second, in contrast to what we find in *Castor*.

The second phalanx of digit II shows in *Trogontherium* also a pronounced torsion round the longitudinal axis. Probably this torsion has some connection with the occurrence of a double "combing-claw" on this toe and on the first one in the beaver. WARREN (1927) gives a description and a good illustration of these claws, and quotes part of VERNON BAILEY's (1923) description of the use that the beaver makes of it: "Never until I had tame beavers to study did I fully understand the use and structure of these peculiar nails nor the reason for the incurving form of the two inner toes. With one foot at a time the sides, shoulders and belly were systematically gone over with inward rotary strokes of the two double claws, until every kink and snarl of the fur was straightened out and not improbably, as SETON suggests, any mites or insect parasites combed out and off." Both parts of the claws are movable, and can be tightly locked with each other. On the ground of a similar torsion in II^2 of *Trogontherium*, one might infer a similar position of the terminal phalanges; perhaps here, too, there were "combing-claws" as in *Castor*.

Summary of the comparison between Trogontherium and Castor

The characteristics of the *skull* of *Trogontherium* from East Runton, which NEWTON (1892) gives to distinguish it from the beaver skull, are the following:

"1. The premaxillary region is wider and stronger. The frontals are longer, the parietals are shorter, and the postorbital processes are further back.

"2. The anterior jugal buttress descends only about halfway down the maxilla, and not to the alveolar margin as it does in the Beaver.

"3. The palatine foramina are much nearer to the front grinders than to the incisors, and they are formed about equally by the maxillae and premaxillae; in the Beaver they are midway between the incisors and grinders, and are almost wholly formed by the premaxillae.

"4. The posterior palatine notch is further forwards than in the Beaver, and the pits in the hinder extremities of the palatines are not seen in the Beaver". (These "pits" on the English skull are the large posterior palatine foramina filled by matrix; they occur also in the beaver, but are inconsiderable there. SCHR.)

"5. The under surface of the basioccipital has a median ridge with a shallow fossa on each side of it; in the Beaver the basioccipital is entirely occupied by one large and deep fossa.

"6. The tympanic bullae are less inflated; and the foramen magnum is more triangular than in the Beaver."

Our knowledge of the skull fragments from Tegelen furnishes other three points of difference:

7. A distinct alisphenoid canal is present.

8. The alveoli of the grinders, whose growth is checked at a much earlier stage, are divided by partitions into minor cavities for the reception of the roots.

9. A conspicuously deep venous canal runs in the mastoid, of which canal two large foramina are to be seen on the occiput, its ventral extremity lying like a broad groove on both sides

lateral from the condyle. In the beaver this canal is present, but inconsiderable; the foramina may occur here.

The fragment of skull from Mosbach enables us to add to the above-mentioned characteristics three other important features:

10. The ductus nasopharyngeus appears to be divided by the pterygoid plates coming in contact in the median line into an upper and a lower passage, each with a separate exit, one ventral of the anterior border of the basioccipital and one (the choanae) dorsal of the posterior border of the palatinum ("upper and lower posterior nares" of *Castoroides*, according to HAY, 1914); thus the two wide pterygoid fossae are separated only by a double osseous plate formed by the pterygoids.

11. The basisphenoid exhibits dorsally no fossa hypophyseos as in *Castor*, but is inflated, and shows ventrally a deep cavity, being the posterior portion of the upper passage mentioned *sub.* 10.

12. Also the right and left maxillae (and possibly the vertical wings of the palatinum) come into contact with each other dorsally, forming the roof of the wide nasopharyngeal passage, which, to a certain degree, is subdivided by some transversal upright ridges on the lateral walls.

13. The presphenoid exhibits one very large transverse foramen which crosses the pneumatic passage; in *Castor* many smaller foramina occur in the presphenoid.

The characteristics mentioned *sub* 10—12 do not hold for the Teglian specimens; that, therefore, it will be essential to distinguish this form from that known from Mosbach and Taganrok, will be more fully exposed in the following chapter.

The massive *mandibula* of *Trogontherium* differs from that of the beaver especially by its width at the hinder part, where the strongly developed, angular process offers large places of attachment for the internal pterygoid muscle and the masseter. The entire lower jaw is very much wider than in *Castor*, but the distance between the condyles does not differ appreciably owing to the narrow brain-cavity. Other characteristics are the higher position of the more elongated narrower condyle, the very rough symphysial surface, the circular form of the fossa masseterica and the sub-divided sockets.

The *incisors* are much larger and thicker, the very convex front side and part of the outer side are covered with rough enamel. The end of the lower incisor is not chisel-shaped, but pointed; on the upper incisor the end is round and deeply excavated at the back. The outward curve of the lower incisor is more pronounced than in *Castor*. The incisors from Mosbach are considerably longer then those from Tegelen.

The *teeth* are less hypsodont, the pattern on the grinding surface changes continually by wear. Not a single fold remains open to the exterior on the basal half of the tooth; where it is worn down to the half, all the folds have lost their connection with the external enamel layer and so have become islands. The last molar of the upper jaw has the most elongated grinding surface (in *Castor* it is the smallest), and exhibits one or two small outer enamel folds more than the other teeth. The greatest curvature of the upper grinders in *Trogontherium* lies in a sagittal, in *Castor* in a transverse, plane. Cement never occurs on the teeth. The cross-section of the upper teeth is elliptic, in *Castor* quadratic with rounded angles.

Nearly all the following differences with *Castor* concern the Teglian species only, as from other localities nothing but the femur is adequately known.

The *atlas* is more robust, the dorsal arch very flat, so that the foramen vertebrale is low. The articular facets are larger and, as can be seen on all vertebrae, directed more straight backwards and forwards.

The *epistropheus* is completely fused with the third cervical vertebra, as may also occur in *Castor*.

On all the *cervicals* the centra are broad and very low, and the depressed foramen vertebrale is broadest at the base; in the beaver its maximal width lies higher up.

The sixth and seventh cervical vertebrae are fused; the latter being smaller than the sixth, and embraced laterally by the first thoracic vertebra.

As not more than three fragments of *dorsal vertebrae* are known, it will suffice to state that the first dorsal exhibits the same characteristics as the cervicals in respect of size and direction of the articular facets. As regards the form of the low centrum and foramen, this applies also to the two other fragments of dorsals, on which it can further be seen that the ventral surface of the centrum is less concave and much less keeled than in *Castor*.

The fragments of *lumbar vertebrae* indicate a less stout build of this portion of the spinal column than we see in *Castor*. The foramen is broader again and flatter, the centrum less keeled and the dimensions all smaller than in the beaver.

Likewise the *sacrum* is less robust, the spinal processes higher, the corpora more slender and ventrally less concave, the arches narrower and the foramen vertebrale smaller. The anterior as well as the posterior zygapophyses stand closer together. The sacrum as a whole is less strongly curved; the crista, formed by the dorsally fused spinal processes, is thicker than in the beaver.

The *caudal vertebrae* agree in general with the build of the sacrals. The greatest difference with the caudals of *Castor* appears where in this animal the flat, scaled portion of the tail begins. There, in *Trogontherium*, all the apophyses are nearly equally long, whereas in the beaver the transverse processes are by far the longest.

The few fragments of *ribs* of *Trogontherium* which have been preserved, are slightly more slender than the corresponding, almost equally long, ribs of *Castor*, by reason of a rather more elongated caput, a somewhat longer neck and the absence of the broadening of the rib dorsally in the arch.

The *clavicle* is longer, somewhat stouter and rounder, and the outer curvature slightly deeper.

The blade of the *scapula* is slightly narrower, but the glenoid cavity is somewhat wider; the coracoid process is shorter, broader at the base, and less curved than in the recent animal.

The *humerus* is appreciably smaller than that of *Castor* and has also relatively a narrower caput, but a broader distal epiphysis; an epicondylar foramen is always present.

Radius and *ulna* are considerably longer than in the beaver. The articular facet for the ulna also covers the external side of the radial head, and so points to greater extent of movement between the two bones. The ulna is not merely longer, but also thinner and rounder distally; the olecranon is finer in structure and its top is bent inwards and forwards. The sigmoid fossa, both above and below, is broader than in *Castor*, which agrees with the broader trochlea of the humerus and the larger articular facet on the radius. The long cavity on the outer side of the shaft is comparatively shorter.

Of the carpus only the *pisiforme* is known; the longer and thinner spur is again an indication of a more slender build of the carpus than we see in the beaver.

Also the only element preserved of the metarcarpus, *viz.* the *metacarpal III*, points to a small fore-foot. It is not only narrower, but also shorter than that of *Castor*. A few minor features on the base point to greater mobility with the adjacent metacarpals.

The *pelvis* differs from that of the beaver in so far as ilium and ischium lie entirely in one line and are flattened in the same plane; the iliac spine is not turned outward.

The *femur* is shorter and rounder, the distal epiphysis narrower, both condyles project equally far backwards. The fossa patellaris is longer and runs obliquely outwards; the bone exhibits a clear outward torsion. The endocondylar tuberosity is very strongly developed. The narrow trochanter tertius lies slightly higher than the trochanter minor on the other side of the shaft.

The *fibula*, distally, has ossified completely with the *tibia*, and is an important element in the ankle-joint by reason of its articulation with the calcaneum.

The entire lower leg is longer and more slender than in *Castor* and the flexure of the tibia is much greater; the ankle-joint is finer in structure and the tibial crest larger.

Trogontherium has a shorter but broader and higher *calcaneum*, with also a relatively shorter fulcrum. There is an articular facet for the fibula on the outer side of the lateral articular surface for the astragalus. The inner articular surface for this bone, on the sustentaculum tali, is divided into an anterior and a posterior facet.

The *astragalus* is characterised by a narrower trochlea and a higher caput lying straight before it. The outer edge of the astragalus runs in a spiral line to the extremity of a tongue-shaped lateral process which is covered ventrally by the articular facet for the calcaneum, dorsally by that for the fibula.

The *navicular* has larger articular facets, especially for the astragalus and cuneiform I; the spur is smaller and the tibiale facet lies appreciably more ventral.

Also on the *cuboid* the facet for the astragalus is larger, likewise that for the navicular. The facet for the calcaneum is different in shape, and that for metatarsal IV is more concave.

The *tibiale* is smaller than that of *Castor* and the position of the smaller facets indicate a more ventral position of the tibiale with respect to the other tarsal bones. There is no indication of an "accessory bone" on the convex medio-dorsal surface of the tibiale.

The *cuneiforms* of *Trogontherium* are unknown.

All the bones of the *metatarsus* are present. The absolute length of all of them is greater than in *Castor*: their relative lengths to the second metatarsal (100) are:

for *Trogontherium* 80—100—124—148—104,
for *Castor* 64—100—119—128— 93.

Thus, the first metatarsal in *Trogontherium* is also relatively longer; metatarsals II, III and IV exhibit greater differences in length between each other than in the beaver, and metatarsal V is longer than II. Likewise the difference in stoutness between the three middle metatarsals is much greater in the extinct animal; the fourth metatarsal is particularly large and stout, *viz.* appr. 70 mm. long and appr. 38 mm. in circumference.

The slight bending of the metatarsals away from the axis of the foot, gives spread to the toes, just as the dorsal broadenings on the proximal half of these bones does in *Castor*. The extent of the motion of the metatarsals with each other was greater in *Trogontherium*; the bases are higher, in accordance with the higher bones of the tarsus, and the shafts are rounder.

The ungual phalanges of none of the toes are known, neither the distal half of the first phalanx of the first toe nor the first phalanx of the fifth toe.

All the *phalanges* are appreciably longer than in *Castor* and, like the metatarsals, exhibit a rounder shaft and higher base, which is also narrower than in the recent animal. The phalanges of the fourth toe are also relatively the longest, in *Castor* those of the third. The second phalanges of the three middle toes increase in length from the second to the fourth; in *Castor*, on the contrary, they become shorter in the same order. The fourth digit is thicker, the fifth more slender, than in *Castor*.

CHAPTER IV

The genera Trogontherium and Conodontes

In Chapter I a general survey has been given of the specimens preserved under the name of *Trogontherium cuvieri* F. and *minus* Newton, together with a reference to the literature on the subject. To avoid confusion the name of *Trogontherium* has always been employed in the foregoing chapters to designate all the remains described, or merely mentioned, under this name, thus also those specimens for which I deem it desirable, for reasons to be discussed now, to employ the name of *Conodontes*.

As regards the portions of skull found in and near Mosbach, these are identical with Fischer's type species *Trogontherium cuvieri* (Pl. II, figs. 1, 2). We can, however, affirm this only in respect to a comparatively small piece of the skull, as from Mosbach no more of it has been preserved than the maxillae with all the cheek-teeth and the palatinum, the basisphenoid, and the adjoining fragments of the presphenoid and of the characteristic pterygoid plates.

I see no reason for not referring the remains from Mosbach to *Trogontherium cuvieri* Fischer.

With regard to Rüger's *Trogontherium soergeli*, see p. 109.

It is a different case, however, with the Teglian fossils. There, in the first place, the dimensions of the corresponding skull fragments (Pl. II, fig. 5; Pl. IV, figs. 1*b*, 5) are somewhat smaller than those from Mosbach and from Taganrok. The lower jaw (Pl. V, figs. 1, 2, 4), the rows of teeth, and in particular the incisivi (Pl. VI, figs. 4, 5, 6) of the Teglian specimens, are appreciably shorter, though not narrower. The premolars of the lower jaws from Mosbach have a much larger grinding surface (Pl. VII, figs. 20, 21, 22, 14), while there is in front a distinct fourth lingual fold which, at a further stage of wear, becomes isolated to a fifth island.

Of greater significance I esteem the difference in form of the nasopharyngeal passage, which, in the fragments from Tegelen, resembles that of *Castor* closely, but in the Mosbach remains is much wider and transversely somewhat subdivided by a few vertical ridges projecting like short side wings on the inner walls.

The greatest difference, however, as far as one can judge at present, lies in the shape of the basisphenoid.

This, in the fragment of the skull from Mosbach, is so much hollowed out ventrally that its corpus for the posterior half must have been either as thin as a film, or more probably pierced, (Pl. III, figs. 1*c*, 2) as was the case in *Castoroides* (HAY, 1914), the opening in the living animal closed by a membrane. The isolated basisphenoid bones found among the material from Tegelen, are all of the common mammalian shape, and distinguished only from those of *Castor* by a slightly narrower corpus and the absence of a distinct fossa hypophyseos (Pl. III, figs. 4, 5, 6).

As the Teglian Clay has yielded no larger fragments of the cranial base, it is not known whether the pterygoid plates approach each other more or less towards the median plane, so as to form two passages one above the other, as in the skull fragment from Mosbach.

The posterior border of the palatinum also is typical of the Teglian fragments by reason of two small notches right and left of the median line, and by the relatively small posterior foramina (Cf. Pl. II, figs. 2 and 5).

The similarity of the palate bone from Tegelen with that of *Castoroides* (Pl. II, fig. 3) is thereby greater than its similarity with the corresponding bone of *Trogontherium* from Taganrok and of the fragment from Mosbach. Moreover, the palatina from Tegelen lack the median dorsal ridge which occurs in the specimen from Mosbach.

Regarding the other elements of the skeleton, only four femora from Mosbach are known, three of which lack the epiphyses. Moreover, the only specimen with a fused distal epiphysis is smaller than the average-sized thigh bones from Tegelen. The difference in size between the animals of the two localities probably lay mainly in the length of the premaxillary and maxillary region of the skull.

The material from Jockgrim and from the two other German localities is too scanty to allow of drawing any inferences regarding the size of the animal. The few fragments of radius, ilium, femur and tibia-fibula from Jockgrim are all slightly smaller than the average Teglian specimens. The mandibula fragments from Jockgrim, like the cheek-teeth, differ but little from those from Mosbach, but they are somewhat stouter than the average from Tegelen. The proximal half of a humerus from Jockgrim is broader than that from Tegelen, though not longer (Pl. X, figs. 16*b*, 19).

Judging from the fine plaster-cast (Pl. II, fig. 6) which was sent me from Paris, I am convinced that the skull of *Trogontherium* from Saint Prest does not belong to the Russian-Mosbach, but to the Teglian type; this is borne out by the shape of the posterior border of the palatinum, as well as by the pterygoid plates being separated, by the moderately large pterygoid fossae and by the size of the cheek-teeth.

According to NEWTON (1892), in the skull from the Forest Bed of East-Runton the pterygoids seem to be entirely broken away. The author mentions nothing special regarding the nasal passage nor the basisphenoid of that skull.

The posterior border of the palatinum in the illustration of the English skull looks exactly like that of the Russian-Mosbach skulls, but NEWTON states that "posteriorly the palatines are somewhat broken". This author looked on the English skull for a similar "deep fossa" (distinctly to be seen on our Plate II, fig. 1), as is described for the Russian skull, situated on the base between the tympanic bullae, and he was of opinion that by this fossa a cavity was meant in the basioccipital, such as *Castor* possesses. NEWTON did not find any such cavity on the English skull. I presume that the posterior opening of the ductus pneumaticus cranii (HAY's "upper posterior nares" of *Castoroides*) is identical with the hole on ROUILLIER's illustration, which, however, would be seen more oral in the Russian skull if the sandy matrix had been drilled away forwards and not, with an idea to the cavity in the basioccipital in *Castor*, just on the aborale side, whereby the latter bone has been injured.

The bases of the broken off pterygoid plates point to the Teglian type.

The sizes of the French and English skulls are the same, according to NEWTON, and both are smaller than the Russian, especially as regards the premaxillary region, although the Russian skull is younger. Nevertheless NEWTON found among the English material a couple of premaxillae still larger than those of the Russian skull. The same may be said of the size of the cheek-teeth. The comparison of the dimensions of the lower jaws indicates that the French mandibula-fragment from Curtil (COLLOT, 1908), and the many English fragments described by OWEN and NEWTON, rank in size between the Mosbach and the Teglian specimens. The greater number of the English fragments resemble in structure rather those from the latter locality, likewise as regards the strength of the fourth anterior inner fold on the lower premolars, which is slightly more developed than the faint groove on the premolars from Tegelen, but is never equal to the three other inner folds, as is the case in the premolars from Mosbach.

As far as we are able to judge at present, the differences between the Russian and Mosbach remains on the one hand, and the Teglian, French and English on the other, are striking enough to distinguish the latter group from FISCHER's *Trogontherium cuvieri*. This name may be given only to the first group. LAUGEL, as early as 1862, expressed his belief that the French skull is not to be identified with the Russian, for which reason he gave to it another name, *viz. Conodontes boisvillettii*, from the conical grinding surface of m^3, and after the naturalist who found the skull.

Later his arguments appeared to lack cogency, as NEWTON (1882 and 1892) quite rightly proved. Real points of difference, however, namely, the characteristic form of the pterygoid plates, of the basisphenoid and the palatine, escaped the notice of both LAUGEL and NEWTON, probably owing to the fact that they had only less satisfactory figures to go upon. In the illustrations given by GERVAIS (1867—1869) of the skull from Saint-Prest, for instance, the view of the under side is not only appreciably too large, but also the shape of the posterior border of the palatine is incorrect, as became apparent to me in studying the plaster-cast of that skull.

As NEWTON's description of the skull from East Runton does not agree entirely with his illustration, I asked for a photo of the ventral side of this skull (Pl. II, fig. 4); from this I was able to ascertain that the notch of the, unfortunately damaged, posterior border of the palatinum is the same in width as that of the French skull, and that the former, in respect to the position of the bases of the pterygoid plates, agrees entirely with the latter.

A close comparison of the skull fragments from Tegelen with the skull from East Runton and that from Saint Prest, did not lead to the discovery of any other differences than those of age. In my opinion we have to do here with one and the same species, which ought to be given the name of *Conodontes boisvillettii* LAUGEL.

The following points of difference between the two genera can be stated:

Trogontherium cuvieri F.

Basisphenoid deeply excavated ventrally. Nasal passage wide and high, with a few blunt vertical ridges on the inner walls. Posterior palatine border with one median notch. Very large pterygoid fossae, inner pterygoid plates coming in contact in the median plane. Fourth inner enamel fold on p_4 distinct, becoming isolated by wear to form a fifth enamel island.

Conodontes boisvillettii L.

Premaxillary and maxillary region and mandible somewhat narrower, but decidedly shorter and less high than in *Trogontherium*. Incisors and series of cheek-teeth shorter. Basisphenoid not excavated. Nasal passage less high and wide without ridges. Palatine border with two notches. Moderately large pterygoid fossae, inner pterygoid plates most probably not coming in contact with each other. Fourth enamel fold on p_4 merely indicated by a small groove.

A much smaller species was described by NEWTON (1890) as *Trogontherium minus*, after the discovery of an upper jaw with the three anterior grinders in the base of the Red Crag, near Woodbridge, in England. Provisionally he has also referred to this species an incisor from the Norwich Crag of Sizewell Gap, near Southwold, the greatest diameter of this tooth being only 8 mm., and, according to NEWTON, on incisors of *Trogontherium cuvieri* the diameter is the double of this.

HINTON, however, afterwards described three fragments of very young incisors (two upper and a lower), from the Forest Bed of West Runton, with diameters of not more than 6.5, 4.5 and 3 mm. respectively. This author does not mention a specific name, but the two young lower incisors found in Tegelen, the one of 4.5 (at the thinnest end) to 6 mm. (at the thickest end), and the other (still in the jaw) with a maximal diameter of appr. 8 mm., justify the supposition that the tooth from Sizewell Gap, as well as the three specimens from West Runton, belonged to juvenals of the large species so common in the Norwich Crag and Forest Bed.

DEPÉRET, in "Animaux pliocènes du Roussillon" (1890), describes a femur which he refers to the genus *Castor* on the strength of the following features: flattened diaphysis, peculiar shape of the trochanter minor, and strong condylus internus with a large tuberositas endocondylea. He admits that the form and position of the trochanter tertius aroused some doubt in him, because it was just this important feature which differed.

In studying his illustration I was struck by its great similarity with the femur of *Conodontes* from the Forest Bed, from Bligny sous Beaune and from Tegelen, although all these are much larger.

In due consideration of the above-mentioned *Trogontherium minus* of NEWTON, from the somewhat older formation than that where the larger species is found in England, I have expressed it as my opinion (Pal. Zeitschr. 1928), that in all probability we must look upon this femur as belonging to this small forerunner, occurring in France in the strata of Roussillon, which are somewhat older than the horizon of Chagny, and which DEPÉRET terms synchronous with the English Red Crag.

Prof. DEPÉRET informed me by letter that he, too, believes this femur must be ascribed to "une petite espèce de *Trogontherium*, peut-être un proche parent de *Trogontherium minus* NEWTON du Red Crag".

CHAPTER V

Restoration and probable habits

The study of the characteristics and size of the skeleton shows that neither *Trogontherium* nor *Conodontes* surpasses *Castor* in length, whether of the trunk or of the limbs; the name of "Giant Beaver" ought to be kept for their really giant contemporary known of America. Their head is no less flat than that of the beaver, but, owing to the width of the lower jaw, it must have been broader; the premaxillary region was longer, the incisors larger and the muscles of the lip more strongly developed. In *Trogontherium*, as we have seen, the premaxillary and maxillary region was still higher and longer than in *Conodontes*. Judging by the length of the vertebrae available, we may be sure that there cannot have been any great difference in length between *Conodontes* and *Castor*. The extremities were equally long, but more slender, the more movable fore-arm and the lower leg were longer in proportion to the upper arm and the upper leg. The hind-feet were extraordinarily large, the fore-feet even still smaller than those of the beaver. Whether the toes were webbed or not, cannot be stated, but the greater extent of movement between the metatarsals and the fact that these are not flattened, as is the case in the beaver, might occasion some doubt on this head.

The tail was certainly less expanded, because there is no trace of flattening to be seen on the caudal vertebrae. As the last few caudals are missing, we cannot draw any inference regarding the tip. Strong muscles made the tail very flexible.

As OWEN (1869) has already remarked with reference to the comparison of a femur and a tibia-fibula of "*Trogontherium*", from the Forest Bed, with the same bones of *Castor fiber*, the former animal will have been a "swifter mover", and less adapted to aquatic life.

Nevertheless, the strong ankle-joint with the fibulo-calcanear articulation on the very large feet, and the enormous size of the fourth toe, point to a very energetic use of the hind-feet; the thinner spur on the navicular, however, might be an indication of some weaker foot flexors. The structure of the entire skeleton shows that *Condontes* was at all events less heavily built than the beaver and moved about on land more easily.

The fact that wherever not too few remains of *Trogontherium* or of *Conodontes* have been found, beaver remains also have been discovered, warrants the supposition that these nearly equal-sized animals must have had different habits. Yet we find *Castoroides* and *Castor* occurring together in the Pleistocene of North America. *Castoroides*, although eight times the bulk of the beaver, bears more resemblance to the latter in the form of its skeleton than *Trogontherium* does to *Conodontes*, and it is assumed by HAY that *Castoroides*, which has with truth been named the Giant Beaver, also led an aquatic life, was addicted to cutting down trees and building dams, and even had a "house" like the beaver's. It may be that just this almost similar mode of life of *Trogontherium*, *Conodontes*, *Castoroides* and *Castor* has contributed to the extinction of the three first species and to the survival of the last, as being best of all adapted to an aquatic life.

The cavities in presphenoid and basisphenoid of *Trogontherium cuvieri* F., when coated with mucous membrane, may have assisted to a considerable production of mucus with which the coarse vegetable food was mixed before it was swallowed. In *Trogontherium* this pneumatic passage appears for a large part to be narrower than the ductus nasopharyngeus. The contrary is the case in *Castoroides*, and this would agree with the size of this animal, which required a corresponding quantity of the coarse food and of the lubricating mucus.

The strong muscles of the probably prehensile lip, the movable fore-feet and the strong hind-feet, admirably adapted to digging, suggest that *Conodontes* also fed upon roots and tubers.

CHAPTER VI

Survey of the Castoridae

A survey of the American rodent families, recent and extinct, and their relation to each other. can be found in MATTHEW's publication on *Paramys*, and the affinities of the Ischyromyidae (1910).

According to this author, the origin of the Castoridae lies, like that of all the American and European families of the Simplicidentata, in the American family of the Ischyromyidae, the oldest rodents known. The genus *Paramys* from the Eocene, and *Ischyromys* from the Lower Oligocene, are well known, as many skulls and some nearly complete skeletons of these small, merely aboreal, animals have been found.

There can be no question, however, of direct descent of the Beavers from either of these two genera, since *Paramys*, as well as *Ischyromys*, possesses a tetradactyle fore-foot with a rudimentary thumb. It must be assumed, therefore, that the development of the earliest and still primitive Ischyromyidae from the Lower Eocene trended in the direction of the Upper Oligocene *Palaeocastor* and *Steneofiber*. Perhaps the course ran via *Sciuravus*, a Middle and Upper Eocene Ischyromyid; the number of its digits is unknown, however.

This line of descent does not include *Eutypomys* which, according to MATTHEW, may have been a side branch of the *Sciuravus-Ischyromys* line. *Eutypomys*, like *Steneofiber*, shows a completely modernized, antorbital region, where the masseter is inserted in front of, and above, the infraorbital foramen on the lateral side of the muzzle. MATTHEW, therefore, does not reckon *Eutypomys* to the Ischyromyidae, but presumes it to be the first castorid, although, like the Ischyromyidae, it has two premolars in the upper jaw. *Eutypomys* will have died out without having given rise to any other forms. A still primitive *Palaeocastor*, or *Steneofiber*, may be taken to be the ancestor of all the other Beavers.

SCHLOSSER (1902) was first of opinion that *Steneofiber*, "der Stammvater der Castoriden", must be derived from *Theridomys* *aquatilis*, but in a note at the end of the same publication he renounces this opinion. The Theridomyidae, a European family of rodents from the Eocene, Oligocene and Miocene, much resembling the American Ischyromyidae, bear no phylogenetic relation to the castorids.

It is clear that these phylogenetic problems lead us into the sphere of speculation, since the palaeontological record is not nearly adequate enough to construct the "phylogenetic tree" of the Castoridae with any degree of probability.

For the course of specialization of very few features runs parallel in the castorids which are known sufficiently well; in other words, many crossings of specialization occur ("chevauchements des spécialisations", DOLLO: Phylogénie des Dipneustes, 1895).

A few series of adaptive stages (ABEL's "Anpassungsreihen", 1914), can be given concerning the following characters:

a. degree of hypsodonty,
b. degree of inflation of the typanic bullae,
c. relative stoutness of the premaxillary region and of the incisors,
d. degree of the angle of convergence between the series of teeth,
e. relative length of the fourth digit,
f. proportional lengths of the lower segments of the limbs (Table p. 203).

To these may be added the presence (+) or absence (—) of some features regarded as more specialized characters, *e. g.*

g. presence of postorbital process,
h. tympanic bulla with internal lamellae,
i. "sub-division" of the ductus nasopharyngeus,
j. occurrence of larger m^3,
k. occurrence of smaller m^3,
l. large pit in basioccipital,
m. reduction of the angular process,
n. predominance of the transverse vertebral processes on the posterior half of the tail,
o. absence of entepicondylar foramen,
p. fibula ossified with tibia,
q. absence of fibulo-calcanear contact.

TABLE.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*	*n*	*o*	*p*	*q*
Palaeocastor...	1	3	1	1	1	1	—	+	—	—	+	—	—	—	—	—	?
Steneofiber....	1	3	1	1	1	1*a*	—	?	—	—[*]	—	—	—	—	—	—	+
Castor........	3	4	2	2	2	2	+	—	—	—	—	+	+	+	+	+	+
Conodontes....	2	2	3	3	3	3	+	—	?	+	—	—	—	—	—	+	—
Trogontherium.	2	2	3	3	?	?	+	?	+	+	—	—	—	?	?	?	?
Castoroides....	4	1	4	4	4	4	—	?	+	+	—	—	—	+	+	+	+

From this Table it is evident that *Castor* and *Castoroides* possess the greatest number of specialized characters, *Palaeocastor* and *Steneofiber* the fewest. The highest degree (4) of specialization of a character occurs most frequently in *Castoroides*, the lowest in the two last-mentioned castorids. Further, the Table shows that *Castor* and *Castoroides* cannot stand in any direct phylogenetic relation to each other, nor to *Conodontes* and *Trogontherium*, since some specializations do cross, as, for instance, *a*, *b*, and *c*. It is a different case with *Steneofiber* and *Castor*, where, according to the features here mentioned, a straight line of descent, *Steneofiber-Castor*, might be possible.

Of *Steneofiber*, unfortunately, nothing of the foot skeleton, nor of the vertebrae, has been preserved, so that here some reservations must be made until the whole skeleton can be studied. With regard to *Palaeocastor* with its fossorial characters, PETERSON (1905) denies that it could be ancestral to *Castor* (see page 280).

TULLBERG (1890), who was not in the occasion to investigate the extinct forms belonging to the Castoroidae, discusses the more primitive form of the angular process on the lower jaw in *Steneofiber*, which is larger here (Pl. III, fig. 9) and does not run up so high to the angle of the jaw as in *Castor*, where this process appears to be reduced. According to TULLBERG, *Castoroides* would exhibit an "*aussergewöhnliche Reduktion des Angularprozesses*", whereby the place of insertion of the pterygoid muscle had become smaller, and was attended by an enlargement of its place of origin, the pterygoid fossa. This enlargement was accomplished by the pterygoid plates being pushed inward, so that they touch each other in the median plane. It is astonishing, however, to find in HAY's diagnosis of *Castoroides* (1914): "*angular processes greatly developed*"! I can more readily concur with HAY's opinion than with that of TULLBERG, for in *Castoroides*, *Conodontes* and *Trogontherium* the margo inferior of the angular process is very broad, so much so indeed that one might speak of a shelf, or basal plate. TULLBERG's angulus anterior and posterior are the foremost and hindmost points of this "plate", the dorsal side of which affords internally (TULLBERG's crista pterygoidea) a very large place of attachment for the internal pterygoid muscle. In *Castor* this pterygoid crest is much less distinctly separated from the mandibular ramus, in *Steneofiber* likewise, but in the latter the posterior angle is more distinct than in the beaver. *Castor* has most probably, as compared with *Steneofiber*, a reduced angular process, but in *Trogontherium*, *Conodontes* and *Castoroides* the development of this portion of the lower jaw is extraordinarily strong.

---

[*] *Steneofiber minutus*, (STROMER, 1928) seems to form an exception here.

TULLBERG believes that the firm connection in the symphysis of the mandibular rami of the beaver has to do with this reduction of the angular process. This connection in both the other large castorids is much freer, which is again an indication that in them the said process can hardly be reduced.

Regarding a possible phylogenetic relation between the three Beaver-species named in TULLBERG's work, *viz. Steneofiber*, *Castor* and *Castoroides*, this author does not express any opinion. In his "hypothetischer Stammbaum" one branch of the Sciuromorphi, the Castoroidei, throws off three side branches, at the ends of which stand *Steneofiber*, *Castor* and *Castoroides* respectively.

MATTHEW (1910) makes three branches go off from the earliest form of *Steneofiber* from the Oligocene. The first leads via the Miocene *Palaeocastor* to *Hystricops*, which becomes extinct in the Lower-Pliocene. The second leads, without any intermediate forms known, to *Castor*. The third goes by way of *Dipoides* to *Castoroides*, which dies out in the Post Glacial. MATTHEW has indicated the last branch by a dotted line, implying that he lacks reliable foundation for this line of descent. (See p. 289.) In his "phylogeny" the author has merely taken into account the North American castorids. Since nothing but jaw fragments and some cheek-teeth are known of *Hystricops*, and MATTHEW, in a recent letter to me, terms *Hystricops* a "species of doubtful affinities", we can only state, with respect to the phylogeny of the Beavers, that nothing can yet be affirmed regarding any phylogenetic relationship.

EUROPE			NORTH AMERICA	
Holocene	Flandrian	Castor	Castor	Holocene
	Monastirian	Castor	Castoroides, Castor	Upper Pleistocene
Pleistocene	Tyrrhenian (Chellean)	Castor, Trogontherium [1]		
	Milazzian	Castor, Trogontherium	Castoroides, Castor	Middle Pleistocene
	Sicilian	Castor, Trogontherium		
	Calabrian	Castor, Trogontherium	Castoroides, Castor Castor	Preglacial
Pliocene	Astian	Castor, Trogontherium, Castoromys, Dipoides		
	Plaisancian			
	Pontian	Steneofiber	Hystricops, Amblycastor, Eucastor Eucastor	Snake Creek Procamelus zone
Miocene	Vindobonian	Steneofiber		
	Burdigalian	Steneofiber		
	Aquitanian	Steneofiber	Euhapsis, Palaeocastor Palaeocastor Palaeocastor (Eutypomys) (Eutypomys)	Lower Rosebud and Harrison Upper John Day Upper White River Oreodon zone Titanotherium zone
Oligocene	Stampian	Steneofiber		
	Sannoisian			

---

[1]) For the use of the name of *Trogontherium* see page 101.

The same holds good for possible Beaver migrations between North America and Eurasia (TAYLOR, 1916), the premises of the various authors being directly opposed to each other. Therefore, in the Table on page 275 neither migrations nor possible phylogenetic alliances have been considered. For the subdivisions of the Cenozoic Era in Europe, DEPÉRET (1895 and 1918—1922) and G. DUBOIS (1924) have been followed, for those in North America OSBORN and MATTHEW (1909). The last-named publication has been used also to settle the correlation between the European and the North American formations. To obviate the necessity of making a choice among the widely differing conceptions regarding the boundaries between the principal subdivisions of the Tertiary, no division lines have been drawn, nor yet between Pliocene and Pleistocene. As DEPÉRET includes the strata of Saint-Prest in the Calabrian stage, and OSBORN the same in the American Preglacial, these two stages have been put on the same line in the Table.

Doubtful Castorids

Cylindrodon.

Among the fauna of the Lower Oligocene Pipestone Beds, White River Beds of Montana, DOUGLASS (1901) makes mention of two mandibular fragments with cheek-teeth of a small rodent, to which he gives the name of *Cylindrodon fontis* gen. et sp. nov. DOUGLASS does not yet include this new genus, of which he illustrates a left mandibular ramus, in any rodent family. To these few remains MATTHEW (1903) added several lower jaws and one upper jaw, collected in the same strata on an expedition in 1902. This author was then able to state that the number of cheek-teeth agrees with that of the castorids, and that the tooth pattern exhibits great similarity with that of *Steneofiber*; further, that the molars in the upper jaw decrease in size backwards. He gives this "curious little rodent" provisionally a place among the Beavers.

Some years later (1910) MATTHEW referred this fossil, again provisionally, to the Ischyromyidae, but remarked at the same time that this systematic place is one of "convenience in classification" rather than of actual affinity. A relationship to the true Hystricomorpha, which appear much later in America, might, in his opinion, be possible.

Although the structure of the teeth resembles *Steneofiber* much more than some Ischyromyidae, it may no longer be reckoned to the castorids on account of the primitive structure of the antorbital region of the skull. This character is considered by MATTHEW of such importance to the systematic classification of the Rodentia, that it must turn the scale in doubtful cases.

MILLER and GIDLEY, who studied a skull from the collection of the University of Wyoming, set up a separate family, the Cylindrodontidae, which contains *Cylindrodon* only. As characteristic features they mention the fossorial skull, the narrow brain-case, and the very hypsodont teeth which, however, do not grow from a persistent pulp.

"Position of the group doubtful" is what these authors add to their diagnosis of this family, which they include in the superfamily of the Dipodoidae, thus widely separated from the Castoridae, placed in the superfamily of the Sciuroidae.

In a recent letter to me MATTHEW suggests that *Cylindrodon* may possibly be regarded as a primitive type of pro-Sciuromorphs.

Eutypomys.

Eutypomys, from the American Lower and Middle Oligocene, is no typical castorid either. "Sciurid by definition in several respects, but apparently of Castorid affinities", is what it is termed by MATTHEW (1910).

The antorbital region is already much more advanced in modern direction than in *Cylindrodon*, since the attachment of the lateral portion of the masseter was extended forwards on the muzzle. Characteristic of *Eutypomys* is the large number of small enamel islands on the grinding surface of the partially worn teeth, which would render it unique among the Beavers, the more so by reason of the presence of a p^3 in the upper jaw. MATTHEW (1905) further mentions the small infraorbital foramen and the absence of a postorbital process on the skull.

Tibia and fibula are separated, as in *Steneofiber*; the fibulo-calcanear contact is slight or absent. (This character was found by PETERSON (1905) in *Paleaocastor fossor*, and is very pronounced in *Conodontes.*) A typical castorid feature is the axis of the foot, passing through the fourth digit and not through the third, as in the Ischyromyidae.

MILLER and GIDLEY (1918) set up a separate family for *Eutypomys* also, the Eutypomyidae, and place it immediately before the Chalicomyidae, Castóridae and Castoroididae in the superfamily of the Sciuroidae.

If *Eutypomys* is to be reckoned to the Castorids, then the dental formula typical for this group must be relinquished, since this is for *Eutypomys*: $i\frac{1}{1}$, $p\frac{2}{1}$, $m\frac{3}{3}$.

Anchitheriomys Wiedemanni ROGER.

Professor FREUDENBERG, in a letter to me, drew my attention to the fragments of incisors described and illustrated by OTTO ROGER in 1885 and in 1898, of, to use the author's own words, a "Nagetier von ganz ungewöhnlicher Grösze" from the Helvetian of Bavaria, to which in his first publication he gave the name of *Hystrix Wiedemanni.* In the latter article he calls it *Anchitheriomys Wiedemanni,* and mentions with regard to the fragment of lower incisor described and illustrated in 1885, that it is 12.5 mm. broad and characterised by thirteen longitudinal grooves on the convex enamelled front side. This fragment came from the Dinotherium Sands of the Reischenau. In the equally old deposits of Stätzling another fragment was found, also grooved and nearly as thick, which forms a segment of a smaller circle and will therefore very possibly be part of an upper incisor; the width is 11 mm. Further, a calcaneum is mentioned by ROGER as probably belonging to this species, as it is too large (50 mm. long) to belong to *Hystrix* or to *Steneofiber*.

To *Anchitheriomys Wiedemanni* R. SCHLOSSER (1902) has referred a cheek-tooth from Häder (formerly attributed by him to *Hystrix suevica*), and a left premolar out of the lower jaw from the Upper Miocene of Abbach, the dimensions of which match those of the mighty incisors.

The photographs (1898, Pl. II, figs. 9 and 10) of these small fragments appear at first sight to be strikingly like those of *Conodontes* found at Tegelen (Pl. VI, fig. 15), both in respect to the thickness and to the granular structure of the highly convex enamelled surface. The longitudinal grooves on the incisor fragments of *Anchitheriomys*, however, are somewhat sharper, just as we see them in *Castoroides*; they lie closer together, so that they are more in number than in *Conodontes* which, as a rule, has 9 grooves. In compliance with my request, Professor FREUDENBERG was so kind as to send me a drawing of the calcaneum which, in his opinion, furnishes the proof that we have to do here with a castorid. The similarity with the calcaneum of the beaver is indeed great, greater than with that of *Hystrix*, both as regards the flattening of the tuber and the other proportions. The outer facies tali, however, is considerably larger on the fossil bone; the sustentaculum tali has been broken off. The length of the entire heel-bone is intermediate between that of *Castor* (av. 55 mm.) and that of *Conodontes* from Tegelen (approx. 47 mm.), but the resemblance to *Castor* is greater; just the contrary, thus, as in the case of the resemblance of the incisors.

Further, I received a drawing of the teeth which had been found together with the calcaneum, namely, a premolar out of the lower jaw, and one molar, both rather brachydont and thereby distinctly different from *Conodontes* and *Castor*. Professor FREUDENBERG considers them too large for *Hystrix suevica* from the same deposits, and informed me that he is assured of the "Castoriden-Verwantschaft". These teeth are not mentioned by ROGER, however, and, in my opinion, cannot be those mentioned by SCHLOSSER, because the latter came from Häder and Abbach.

If the incisor fragments, the calcaneum and the grinders might belong to the same species, there must have lived in the Helvetian of Bavaria a large rodent of the size of a beaver, which had incisors very much like those of *Conodontes*, but brachydont grinders. Whether this animal was a castorid will not be known until more of the skeleton has been found, but the calcaneum, and the incisors with the "Canellierung" on their very convex enamel, like that also to be seen in *Castoroides*, *Amblycastor* and sometimes in *Conodontes*, would seem to point in this direction.

Palaeocastor

In accordance with MILLER and GIDLEY (1918), MATTHEW (1925) and ROMER and MC. CORMACK (1927), I prefer to revive the name of *Palaeocastor*, given by LEIDY (1869) to the North American group of small beavers from the Upper Oligocene and the Lower Miocene. Although some of the earliest forms bear a distinct resemblance to the European *Steneofiber*, yet the differences are too great to combine the American and the European remains into one genus, *Steneofiber*, as has ordinarily been done since LEIDY's time, and among others by PETERSON (1905). Since the skeleton of the limbs of but few geologically younger species of *Palaeocastor* is known, we can only state respecting these species that the difference between the limbs of *Palaeocastor*, as described and illustrated by PETERSON (1905), and those of *Steneofiber*, made known by FILHOL, is considerable, especially as regards the proportionate lengths of the lower segments of the limbs (see Table on page 203). These earliest *Steneofiber* species prove an advancement in a different way of specialization than that taken by *Palaeocastor*, where we find short, powerful limbs and a brachycephalic skull with more brachydont grinding teeth.

Palaeocastor fossor is found in abundance in the Lower Miocene Harrison, or Daemonelix Beds (Lower Rosebud) of Nebraska and Wyoming, which are comparatively poor in fossil remains. PETERSON (1905) mentions how fourteen specimens of this species, including some almost complete skeletons, were found in as many "devil's corkscrews" (Daemonelices) which, according to this author, are burrows dug by these castorids. BARBOUR had previously (1892—1897), as also ABEL at the present day (1927), expressed himself most emphatically in favour of the vegetable origin of the fossil corkscrews which, in ABEL's opinion, are the casts of the root of a desert plant; this root would rot quickly away and leave the hole to be tenanted and further extended by little animals. I think PETERSON's interpretation is the most probable: the screws being casts of rodent burrows, and the cylinder of tangled rootlets on its surface and sometimes in its interior, being the roots of the vegetation of the desert in which the burrows were made.

Of the *Palaeocastor* remains, now preserved in the Carnegie Museum, at Pittsburg, PETERSON gives a detailed description with Plates. Regarding a relationship to *Castor* he comes to the following conclusion: "It is plain that the beaver bears no close relation to it, so far as the structure of the limb is concerned. The long fore-arm, the short femur, the long tibia-fibula and pes, and the greatly developed hallux in the beaver, are not suggested in *Steneofiber fossor*. At the present time I cannot confidently point to any living rodent of which *Steneofiber fossor*, which shows highly developed fossorial characters, might be the ancestor." As some typical features of this castorid he mentions, for instance, the great size of the cranium in proportion to the body, the powerful limbs and feet, and the round, heavy tail of moderate length. The ratio of the length of the skull to that of the spinal column in *Palaeocastor* is as 1 : 4, in the beaver as 1 : 6. For the proportionate lengths of the parts of the limbs as compared to those of the other castorids, see Table on page 203.

Besides the species *P. fossor*, PETERSON (1905) describes a large part of the skeleton of *Palaeocastor barbouri* spec. nov., also found in a Daemonelix and bearing much resemblance to *Palaeocastor fossor*. He gives a survey of the seven American species then known of the genus, as these have been described by LEIDY, COPE, SCOTT and DOUGLASS, and compares them with the two new species. According to ROMER and Mc. CORMACK (1927), at the present time a dozen species are known in North America, found in the Upper Oligocene and Lower Miocene, the earliest representatives in the Upper White River formation (Leptauchenia Zone). These (*e. g. Palaeocastor nebrascensis*) are less specialized than those from the slightly younger Upper John Day formation, which are again primitive compared to those from the Lower Rosebud and the Lower Harrison (Daemonelix) Beds. The species from these deposits (which PETERSON and MATTHEW reckon to the Lower Miocene, and OSBORN to the transition strata between Oligocene and Miocene) are the most numerous; they are the geologically youngest yet known and exhibit such differences that, according to MATTHEW (1907), they are probably to be divided into several distinct genera or subgenera. The teeth become more hypsodont, and a tendency to reduction of the enamel folds to one principal inner and one outer fold on both, upper and lower teeth, as well as to reduction of the hindermost upper molar, is to be observed. MATTHEW sees in *Palaeocastor simplicidens*, for instance, an approximation to the *Dipoides* (*Eucastor*) pattern. The largest skull of *Palaeocastor* ever found has been described by ROMER and Mc. CORMACK (1927). This is 92 mm. long, and comes from the Lower Harrison Beds, in Wyoming. Geologically a young species also and named by the authors *Palaeocastor magnus*, it exhibits no "features suggesting relationship to *Dipoides* or *Amblycastor*, and is, in general, conservative in structure".

The adaptation of *Palaeocastor* species to a drier climate, whereby in the transition strata between Oligocene and Miocene the forests were replaced by open plains, induced a specialization of this rodent towards burrowing and fossorial habits. *Steneofiber* most probably built the devil's corkscrews in the same way as *Geomys*. at the present day, its burrows with their cul-de-sac sloping slightly upwards, widened at places, and connected with the surface of the earth by a vertical spiral passage at their lower end. This might be an argument in favour of WINGE, TULLBERG and WEBER's supposition, that the Beavers are related to the Geomyoidea.

While our knowledge of a possible descent of any castorid from *Palaeocastor* is purely hypothetical, an equal obscurity envelops the origin of this genus. As we have pointed out on p. 271, MATTHEW (1910) supposes that the castorids can be traced back to *Sciuravus.* TULLBERG (1900) maintains that *Steneofiber* belonged to the "neue Einwanderer", migrating in the Upper Oligocene from Asia to North America.

Palaeocastor is abundant and characteristic in the transition strata between Oligocene and Miocene, but dies out soon after.

Steneofiber, Chalicomys

The European *Steneofiber* (*Chalicomys*) species are, unfortunately, less well known than *Palaeocastor.* Only of the earliest and small species, *Steneofiber viciacensis* GERVAIS (*Chalicomys Eseri* MYR.) from the Aquitanian (Upper Oligocene) of St. Gérand le Puy, the skull, a large portion of the extremities, and some parts of the pelvic girdle are known. The spinal column and the fore and hind-feet, with the exception of the calcaneum and the astragalus, are not known. Both skull and limbs show that this form is totally different from that represented by PETERSON's *Palaeocastor fossor* and *barbouri.* It is possible that the earliest American species might show more similarity, but of these nothing but the skull and a few teeth are known. Regarding the latter, PETERSON (1905) writes as follows: "The configuration of cheek-teeth in *Steneofiber* varies so much with age that they do not furnish a reliable basis for specific determination."

Steneofiber viciacensis, minutely described by FILHOL (1879) from a great number of specimens, has more slender limbs and a narrower skull than the American fossorial species (Cf. Pl. III, figs. 7 and 8).

Most palaeontologists agree in their opinion that the Miocene *Steneofiber* (*Chalicomys*) species have developed directly from the Oliogene. They may be traced through the entire Miocene period, but their separation into different species is a matter of great difficulty, although the large number of specific names found in the literature is evidence of the various attempts to do so. STEHLIN (1925) opines that there are no "différences morphologiques palpables", and that only "mutations" can be distinguished according to the size, which increases in the course of geological times, although in the Middle and Upper Miocene very small types, such as *Steneofiber minutus* MYR, still occur contemporaneously with large ones, *e. g.* *Steneofiber* (*Chalicomys*, *Castor*) *jaegeri* (= *Castor subpyrenaicus* GERVAIS).

Of the Middle Miocene *Steneofiber depéreti* MAYET, the humerus (SCHREUDER, 1928) and the femur (MAYET, 1908) are also known, the size and form of which are intermediate between the small Oligocene species and *Castor fiber*.

It is an open question if the European genus *Steneofiber* developed in the Old World or in the New. According to TAYLOR (1916) it was probably in the former, as *Steneofiber*, in his opinion, has been found in older deposits in Europe than in North America, whither it will have migrated in the Upper Oligocene.

MATTHEW (1902), on the other hand, writes: "The American species of *Steneofiber* are a rather closely allied group, characteristic of the Oligocene, and more primitive than the European assemblage of species, which are characteristic of the Miocene epoch and in general larger, longer-toothed and nearer to the modern branches. The *St. viciacensis*, of the Upper Oligocene (St. Gérand le Puy), appears to be the nearest to the American group."

SCHLOSSER (1902), with the decisiveness characteristic of this author, states: "Von *Theridomys aquatilis* (from Frohnstettin, Upper Eocene) muss wohl die Gattung *Steneofiber* abgeleitet werden, der Stammvater der Castoriden". And further, regarding the Theridomyidae, small rodents of which only jaws and teeth are known: "Dass diese Formengruppe unter Anderem auch den Ausgangspunkt der Castoriden bildet, ist für mich auch jetzt noch ebenso sicher wie vor beinahe 20 Jahren, etc." In a note at the end of his treatise, however, he renounces this opinion.

Since MATTHEW (1902), as well as both PETERSON (1905) and TAYLOR (1916), holds the opinion that the development of the *Palaeocastor* group has not proceeded in the direction of *Castor*, they assume for this animal a descent from the European *Chalicomys* species in Eurasia, followed by a migration to America. As far as can be inferred from the teeth, the similarity between the Upper Miocene *Steneofiber* species certainly indicates a development in the direction of *Castor*. A mandible of *Steneofiber jaegeri*, with all the teeth in place, from the Tortonian of Soblay (Ain), illustrated by DEPÉRET (1887), is, judging from this figure, undistinguishable from that of the beaver.

SCHLOSSER declares positively that *Castor* is directly descended from *Chalicomys*, but, as MATTHEW (1907) remarks, SCHLOSSER based his judgment, as usual, on the cheek-teeth principally, the structure of skull and skeleton being but little known. The American author considers it possible, however, that the most primitive *Steneofiber* species might be ancestral to *Castor* in Europe and to *Dipoides* and *Mylagaulus* in America, the last related through some form or other to *Euhapsis*.

The remarkable extinct family of the Mylagaulidae, which occurs in the Middle and Upper Miocene and in the Lower Pliocene, will not be discussed here, as they can only stand in a rather far-removed relation to the Castoridae. They are characterised principally by a very broad, short skull, one premolar of extraordinary size, and reduction of the molars (*Mylagaulus monodon*). MATTHEW (1924) suggests that the horn which some had on the nose might possibly be a character of sex.

Euhapsis

The name of *Euhapsis platyceps* was given by PETERSON (1905) to a skull and a lower jaw fragment out of deposits directly beneath the Daemonelix Beds (OSBORN reckons them to the Oligocene, MATTHEW to the Miocene) in Nebraska. The skull is nearly as broad as it is long (58 and 60 mm.), and shows much resemblance to that of the Mylagaulidae, while the grinding pattern is almost identical with that of *Steneofiber*. MATTHEW (1907) describes another species, *Euhapsis gaulodon*, from the Lower Rosebud formation, namely, a complete skull with all the teeth, which is considerably longer than that of *E. platyceps*.

The two oblique islands on the grinding surface of both front molars, as also the elliptical outline of the crowns of these teeth, are exactly similar to the two first molars in older *Conodontes* and *Trogontherium* specimens. The premolar, however, is different, and in *Euhapsis* the last molar is the smallest, as is the case in *Steneofiber*.

Eucastor, Dipoides, Sigmogomphius, Castoromys

Remains of *Castor* (*Eucastor*) *tortus* LEIDY, from the Upper Miocene (Loup Fork) of Nebraska, were first described and illustrated by LEIDY (1869). They comprise a large part of the upper jaw with the three first cheek-teeth and fragments of the incisors on both sides. Later, some fragments of the lower jaw, likewise with the three first grinders and pieces of incisors in place, from the same deposits, were determined by MATTHEW (1902) as belonging to the same species. MATTHEW and COOK (1909) consider it possible that an upper jaw with the three first grinders, five isolated molars and a humerus, found in the Snake Creek Beds (Lower Pliocene), may also be ascribed to *Dipoides* (*Eucastor*) *tortus* LEIDY, which was about as large as a guinea-pig.

MERRIAM (1913) makes mention of another species, *Dipoides lecontei* from the Siestan Beds (Pliocene) in California, of which a piece of a skull with three cheek-teeth and the incisors on both sides has been preserved. He adds that formerly he had given this specimen the name of *Sigmogomphius*, although he had observed a great resemblance to *Eucastor* LEIDY. He thought at that time, however, that three was the normal number of teeth and saw, moreover, a difference with *Eucastor* in the grinding pattern which, on second thoughts, he ascribes to the "*Sigmogomphius*" teeth being less worn off. He therefore afterwards (1913) came to the conclusion that neither *Sigmogomphius* nor *Eucastor* are distinguishable from each other, nor from *Dipoides* JAEGER from Eurasia.

The upper jaw, illustrated by LEIDY, exhibits a striking similarity with the teeth of a not too young individual of *Trogontherium* or *Conodontes*. Here, too, on m^1 and m^2, which have exactly the same elliptical form as in *Eucastor*, there are only two enamel islands, isolated from the exterior enamel wall, standing, as LEIDY remarks of *Eucastor*, so oblique to the axis of the row of teeth that "what was their inner side has become posterior", which holds equally well for *Conodontes* (Pl. II, figs. 5, 6) and *Trogontherium* as for *Euhapsis gaulodon* MATTHEW (1907).

This oblique position of the enamel folds, however, is also seen in *Eucastor* on the lower row of teeth. The folds on the molars are but two in number, *viz.* one on the lingual and the other on the labial side, the former lying furthest forward. On the premolar of the lower jaw two more inner folds occur, one of which lies just before, the other just behind, the labial fold. P^4 exhibits three labial folds. The figure (fig. 11) given by MATTHEW (1902) of the three first teeth from the right lower jaw at once suggests MOORE's illustration (fig. 5) of the same row of teeth of *Castoroides* (1889). The folds in both animals are the same in number and directed obliquely in the same degree. We have only to imagine the folds in *Eucastor* prolonged until they divide the grinding surface into separate oblique tubes, to arrive at the pattern of the *Castoroides* teeth. MATTHEW and COOK (1909) mention incidentally that *Eucastor* exhibits a distinct resemblance to *Castoroides* in the pattern of the teeth and in the infraorbital region of the skull.

Also MERRIAM's illustration of the outer side of a lower premolar from the Siestan Beds brings out well the resemblance to the Giant Beaver, if it be compared with the figures given by MOORE (1890) and LEIDY (1889) of the outer side of the teeth in *Castoroides*. The cheek-teeth of *Eucastor* are not so extremely hypsodont (LEIDY mentions the occurrence of fangs), but the premolar figured is still young and the pulp hole apparently not yet closed, while the fold grooves on the wall still run to the base of the tooth.

It would be interesting to know whether any cement has been observed on the teeth of this little animal, as this is such an important feature in the teeth of *Castoroides*.

Equally striking is the resemblance of the *Eucastor* teeth to those in the lower jaw of *Castor* (*Castoromys, Chalicomys*) *sigmodus* CROIZ., from Montpellier, illustrated by GERVAIS (1859) on Pls. I and VIII. According to DEPÉRET (1887), these teeth show "racines dentaires séparées".

MATTHEW and COOK (1909) further illustrate a right lower jaw with perfect incisors and three front teeth, naming them *Dipoides curtis* sp. nov.; a portion of the hindermost (fourth) teeth can be distinctly seen. This species is much smaller than *D. tortus*, the diastema shorter, the cheek-teeth more brachydont and similar to *Steneofiber*.

Dipoides problematicus n. sp. is the name given by SCHLOSSER (1902) to some teeth from the Bohnerz Formation of Salmendingen and Melchingen (Lower Pliocene), a few of which had been described and illustrated earlier by JAEGER and by QUENSTEDT. All these teeth are very hypsodont, all illustrations of their labial and lingual sides show the fold grooves continuing to the base of the tooth.

Conspicuous is the likeness between fig. 11 above-mentioned of MATTHEW's *Eucastor tortus* LEIDY and the two first cheek-teeth from the lower jaw of *Dipoides problematicus*, illustrated by SCHLOSSER in his Plate I, fig. 20. The enamel island made by the third (hindermost) lingual fold, is still visible on the crown of the premolar of *Eucastor*, and, it is true, absent in *Dipoides problematicus*, where it may be already worn off.

It will be a more difficult matter, in my opinion, to include in the genus *Eucastor* LEIDY the cheek-teeth which SCHLOSSER gives as upper teeth of *Dipoides problematicus*, having one inner and two or three outer fold grooves running down to the base of the tooth. For these teeth are so very hypsodont that a pattern in which the molars exhibit two oblique enamel islands only is hardly possible, not even in an advanced stage of wear. A further argument against classing these German teeth with the American specimens in the same genus is that in the latter, as also in *Palaeocastor* and *Euhapsis*, reduction of the hindermost upper molar can be observed, whereas SCHLOSSER writes of the occurrence of three labial folds on m^3 in *Dipoides problematicus*, whose other molars have but two folds. Moreover, it is evident from his illustration that this molar has the largest grinding surface. In this respect, thus, *Dipoides problematicus* agrees with *Conodontes*, *Trogontherium* and *Castoroides*. It would, therefore, be advisable for the present to distinguish the American genus, as *Eucastor*, from the European genus, which might retain the name of *Dipoides*. The same thing, thus, as has been done with the genus *Steneofiber*, for which a separation is now considered necessary between the European *Steneofiber* (*Chalicomys*) and the American *Palaeocastor*.

According to SCHLOSSER (1902), the teeth of *Dipoides problematicus* bear the greatest resemblance to the tooth from Copford, in Essex, to which he gave the name of *Dipoides lydekkeri* n. sp. Yet the ending of the labial fold grooves at half the height of the wall of the more brachydont tooth from Copford forms an important point of difference with *Dipoides*. Only the grinding surface of a young tooth like that from Copford, which was identified later (1916) by NEWTON as a premolar of *Trogontherium cuvieri* F., can show that striking resemblance to *Dipoides problematicus* in the grinding pattern.

SCHLOSSER's humerus of 45—50 mm. in length (a better illustration of which is given in his treatise than by JAEGER (1855)), probably also belongs, in the opinion of the former author, to *D. problematicus*. The similarity (according to the evidently reconstructed figure) with the humerus of *Steneofiber depéreti* MAYET is very great, although the length of the latter is about 70 mm. That this French humerus cannot be referred to *Lutra*, as was done by GERVAIS (1867) and by MAYET (1908), but to the above-mentioned species of *Steneofiber*, the present writer has exposed recently.

Also in the Pliocene of China a lower jaw has been found with four cheek-teeth, which has been accounted by SCHLOSSER (1902) to *Dipoides problematicus*. As long as the upper jaw is not known it cannot be ascertained whether it must be referred to *Eucastor* or to *Dipoides*.

TAYLOR (1916) writes: "The *Eucastor* line soon ran out in the Old World, while in North America it appears to have given rise to the Pleistocene family Castoroididae, with its characteristic genus *Castoroides*".

The phylogenetic origin of *Dipoides* is considered by MATTHEW and COOK (1909) as established: "The genera *Eucastor* (*Dipoides*) and *Hystricops* of the Upper Miocene and Pliocene, both being specialized descendants of *Steneofiber* of the Oligocene and Lower Miocene. *Dipoides*, however, occurs in the Pliocene of China, and intermediates between it and *Steneofiber* are not known from our Miocene, so that it is perhaps also (like *Castor*) Palaearctic in origin".

TAYLOR (1916), on the other hand, gives an opinion to the effect that "the *Eucastor-Dipoides* stock would seem to have originated in North America, since it is first found in the Upper Miocene of that continent. By Pliocene time it had migrated at least to Asia."

Professor MATTHEW, in a letter to me (1927), expressed himself as follows: "It (*Dipoides* = *Eucastor*) is apparently an aberrant form."

SCHLOSSER (1902) remarks that *Steneofiber minutus*, which is not unfrequent in the Upper Miocene, may certainly be considered as ancestral to *Dipoides* "sofern *Dipoides* nicht etwa auf nord amerikanische Formen zurückgeht."

We have seen that the upper teeth of the American *Eucastor* are more brachydont than those of *Dipoides* from the Bohnerz Formation, and that the hindermost upper molar is smaller than the other molars in the former, while it is larger in the latter. Similarly we can state that the grinding pattern of the former agrees with that on older *Trogontherium* and *Conodontes* teeth, that of the European genus with the pattern on younger ones. As regards the lower teeth, these of *Eucastor* and *Dipoides* bear much resemblance to each other, as well as to those of *Castoroides*.

However, if only on account of the said reduction of the last upper molar, I do not think we are entitled to hold *Eucastor* to be ancestral, however distantly, to *Castoroides*. MATTHEW (1907) writes with respect to the teeth: "In the *Dipoides* (*Eucastor*) pattern the minor inflections (present in *Steneofiber*) have disappeared, the teeth are very hypsodont (? rootless) and the *last molar reduced*." In *Castoroides*, on the other hand, the last molar of the upper jaw has the largest antero-posterior diameter of the grinding surface, both in young individuals and in old ones, attended by the occurrence of one enamel tube more than on the other teeth. It would thus be more logical to regard *Dipoides problematicus* SCHLOSSER, instead of *Eucastor*, as a form ancestral to *Trogontherium*, *Conodontes* and *Castoroides*, since we have remarked the same trend of specialization on the last upper molar.

Hystricops

Hystricops (*Hystrix*) *venustus* LEIDY, which that author regarded as belonging to the Hystricidae, is, according to MATTHEW and COOK (1909), a castorid where the teeth are more specialized than those of *Eucastor* and may, as a descendant of *Steneofiber*, have been a fossorial animal. It was larger than *Eucastor* and had a peculiar "inflated" premolar, like the Mylagaulidae. Unfortunately little is known of *Hystricops*. Besides the lower premolar associated with a first molar, described by LEIDY (1869), MATTHEW and COOK (1909) referred to this species a premolar and a first grinder in a fragment of the upper jaw from the Lower Pliocene Snake Creek Beds of West Nebraska, as size and form of the inflated and enlarged premolar suggest vividly that described by LEIDY. These upper teeth are very convex on the inner side, the lower teeth on the outer side. The crowns are long, but roots are present. The grinding pattern exhibits little difference with *Steneofiber*; the size is nearly the same as that of *Hystrix* and *Castor*. In 1918 MATTHEW relinquished the idea of classing in one species the lower teeth of LEIDY and the upper teeth of the jaw fragment from the Snake Creek Beds. With more probability they might be referred to *Amblycastor fluminis* In his revision of the faunal list of the Snake Creek Fauna, the name of *Hystricops* has therefore been omitted.

In the above-mentioned letter from Professor MATTHEW (1927), he terms "*Hystrix*" *venustus* LEIDY "a species of doubtful affinities", and advised a comparison with *Trogontherium*, which I made carefully, without, however, finding anything but a very superficial resemblance in size and in the general form of the cheek-teeth, as can be seen by comparing MATTHEW and COOK's fig. 10 with figs. 6 to 10 and 34 on Pl. VIII of the present work. The teeth of the Teglian animal, however, are more cylindrical in form, those of *Hystricops* more conical and thus much more brachydont. Never more than four enamel islands occur on the three first grinders of the upper jaw in *Trogontherium* and *Conodontes*.

Since "intermediates" between *Hystricops* and *Steneofiber* occur, according to MATTHEW and COOK, in the Middle Miocene of Colorado, these writers consider it possible that *Hystricops* is of American origin, but they give this opinion under reservation, as our knowledge of these intermediate forms is very inadequate.

Amblycastor

Amblycastor fluminis is introduced by MATTHEW (1918), in his second contribution to the Snake Creek Fauna, as a new genus and species. It is represented by an extremely short, heavy, lower jaw, with the premolar and a fragment of the robust incisor in place, the latter with numerous longitudinal grooves in the enamel of the very convex anterior surface. The grinding pattern resembles that of *Euhapsis*; the alveoli of the molars show that they have contained a posterior and a bifid anterior root. As has already been stated, MATTHEW also refers to this species the upper jaw fragment with two cheek-teeth, first (1909) associated by him provisionally with LEIDY's "*Hystrix venustus*".

Amblycastor has been larger than *Castor*, and its heavily grooved incisors remind us of *Castoroides*, *Anchitheriomys* and some specimens of *Conodontes* from Tegelen. According to MATTHEW, in its large premolar, the short and wide jaw and the reduction of the molars, it resembles *Mylagaulus*, and in the grinding pattern *Euhapsis*; it may be related to the latter.

Castor species

There is no modern anatomical description of the skeleton and muscles of the beaver, as far as I am aware, and I was therefore obliged to depend on WIEDEMANN's publication (1804) and on what is to be found on this subject in the works on general comparative anatomy and systematics. The muscles have been very well illustrated in CUVIER and LAURILLARD's Atlas (1840), and most of the skeleton in CUVIER's "Ossemens fossiles" (1832). In BRANDT and RATZEBURG's "Monographie des Bibers", the anatomy of the skeleton is not given in any detail, although in this work attention is drawn to the great variability in the number of the vertebrae in the different sections of the spinal column.

A vast amount of literature on the skull and teeth has been published, most of it with reference to the differences between the recent European and American beavers and the comparison of these with the fossil castorids.

There are distinct differences between the proportions of the skull bones of the beavers of the Old and New Worlds; they can, for instance, be seen at once in the length of the nasals, which in *Castor europaeus* is 37—42.6% of the length of the skull, in *Castor americanus* 34.3—35.3%. VON REICHENAU (1912) compared for this purpose ten European and four American skulls. The age of the skulls, however, must be carefully borne in mind, a matter of some difficulty in the case of the beaver where the very hypsodont teeth show alterations in the grinding pattern only in very young and very old stadia. In the skull of the beaver, as IVOR MONTAGU (1924) has demonstrated by measurements on many skulls from the fen deposits of Cambridge, the intensity of growth in the premaxillaries and nasals exceeds that of the other regions of the skull; this in connection with the ever increasing size of the incisors. The older the skull, thus, the higher VON REICHENAU's percentage will be.

The American beaver is on the whole smaller than the other. Also HARVEY HOLDEN (1917) compares the skeleton of the two "species", the American beaver and the European one, but, taking into account the great variability which the beaver skeletons exhibit, and the fact that the author had but one specimen of the European type at his disposal, we are not warranted in attaching conclusive importance to his comparison.

Neither can the great number of "species" set up for both *C. europaeus* and *C. canadensis* be entered upon here. TAYLOR (1916) gives as many as seven subspecies of the latter. WARREN (1927) mentions thirteen geographic races in America, differing from each other in size, bodily proportions, colour of the skin and characters of the skull.

For the European beaver races no author has yet succeeded in defining typical differences. MATSCHIE (1907) set up a number of species, *e. g. Castor galliae* (France), *europaeus* (England). *fiber* (Sweden), *albicus* (Elbe), *balticus* (Pomerania and Holstein) and *vistulanus* (Poland). MATSCHIE's work, however, was not well founded, and was "subjected to a destructive analysis by Forsyth Major", as MONTAGU (1924) has expressed it. FORSYTH MAJOR (1908), nevertheless, considers it highly probable that local races might be found of an animal with such a wide-spread range, but remarks "we require whole series (at least of skulls) from the different countries in order to arrive at some definite conclusion". VON REICHENAU (1912) observed that the skull bones and the teeth from one and the same region exhibit important differences, and so the necessity for the material to be really abundant is an obstacle to the making of a subdivision, as the beavers still remaining must, in Europe at least, be carefully protected.

A map of the earlier distribution of the beaver in Eurasia is given by VON LINSTOW (1908), and of the same in North America by WARREN (1927).

Also as regards the remains of the *fossil beaver* the number of "species" is legion. The oldest given for Europe is *Castor jaegeri* from the Pontian. This statement can be found constantly recurring, especially in American literature, as a proof that *Castor* already lived in Europe in the Upper Miocene. By this "*Castor*", however, is meant *Chalicomys* (*Steneofiber*) *jaegeri* KAUP, from the Upper Miocene of Eppelsheim, which the author (1839) afterwards included in the genus *Castor*. For this reason DEPÉRET and HAUG, as well as OSBORN, write of *Castor* as occurring in the Upper Miocene. GERVAIS' *Castor subpyrenaicus*, from the Miocene "sables de l'Orléanais", is identical with *Steneofiber jaegeri*.

In Europe, however, no *Castor* is known from older deposits than those in which the fossil fauna of Perpignan (Roussillon) is found, and which are regarded by DEPÉRET as synchronous with the base of the English Red Crag. DEPÉRET (1897) described and figured, namely, a large rodent skull from Perpignan, to which he gives the name of *Castor praefiber*. Although nearly entirely covered by marl, it clearly exhibits the two rows of teeth. From the illustration, the skull is 132 mm. long; the average length of the recent beaver skull in Europe is approx. 142 mm. The cheek-teeth, according to the author, are "assez semblables à celles de *Castor fiber* mais en diffèrent par leurs proportions moins lourdes, moins épaisses, leur émail plus mince, leur forme moins carrée, plus retrécie en dedans et qui tient à la disposition plus pincée des deux piliers internes de chaque molaire." Whether, taking into account the great variability in the beaver's teeth, these differences justify making a new species, is doubtful. The present authoress (1928) has explained why, in her opinion, the femur which DEPÉRET referred to the same species, cannot be that of *Castor*.

Castor issiodorensis is the name given by CROIZET and JOBERT to a lower jaw with cheek-teeth out of the Pliocene of Perrier (Puy de Dôme). This specimen was illustrated by GERVAIS (1859), and differs neither in form nor in size from that of *Castor fiber*. GERVAIS wrote: "nous ne lui avons reconnu aucun caractère que l'on puisse regarder sûrement spécifique". POMEL, BOSCO, DEPÉRET and HINTON (1914) hold the same view.

A lower jaw, from Chagny, described by DEPÉRET (1893) as *Castor issiodorensis*, has been identified by COLLOT (1906) as belonging to *Trogontherium cuvieri* F. (see p. 106).

In the German literature the name of *Castor issiodorensis* was given in 1880 by KOCH to a mandible from Mosbach, now in the Museum at Wiesbaden (ROEMER, 1895).

VON REICHENAU (1906), in his Record of the Mosbach Fauna, borrows this specific name from KOCH. Later, however, after his attention was drawn to this mandible by Professor FREUDENBERG, VON REICHENAU (1912) referred the jaw in question, of which he gives a photo, to *Castor fiber*. But where he remarks that this Mosbach jaw is too small to be referred to the "ganz grosze Art" *C. issiodorensis*, I cannot agree with him. The length of the row of teeth at the alveolar border is, on the type jaw illustrated by GERVAIS, 40 mm., a measurement I found also on large beaver jaws from Mosbach. According to SCHROEDER (1898), the collection of the Preuss. geol. Landesanstalt possesses also a lower jaw referred by KOCH to *Castor issiodorensis*. SCHROEDER reckons this jaw, however, to *Trogontherium*, as the enamelled side of the incisors is convex transversally and the fold groove in the outer wall of the premolar does not run to the base.

Castor issiodorensis cannot, in my opinion, be separated from *Castor fiber.*

The case is the same, as it appears to me, with *Castor plicidens* MAJOR, which is said to be distinguished from *Castor fiber* by broader incisors, slightly larger cheek-teeth and especially by the complex plication of the enamel folds (FORSYTH MAJOR, 1908). These characteristics, however, are also typical of older beaver jaws from Mosbach and from Taubach, as well as of the beaver jaw from Tegelen and the 18 mm. long molar from the synchronous clay layers of Belfeld (at a distance of about 4 Kilometres south of Tegelen on the Meuse). In the mandible from Tegelen (Pl. VII, fig. 23), as in the series of lower teeth from East Runton, figured by FORSYTH MAJOR, and in the photograph (fig. 10) given by VON REICHENAU of the above-mentioned jaw from Mosbach, the plication of the first and third lingual folds of the teeth is the most complex. On the tooth from Belfeld (Pl. VII, fig. 16), and on the basal view of HINTON's young tooth from West Runton, all three folds are crenulated in the same degree.

That the strong plication is observed as a rule on larger cheek-teeth together with the occurrence of broader incisors is, in my opinion, a confirmation of the view that *Castor plicidens* is nothing else than a robust form of *Castor fiber* at a more advanced age and geologically older. Yet the plication is very variable individually, as was evident to me from a large number of beaver jaws from Mosbach, Taubach and other localities, and was also proved by VON REICHENAU (1912). FORSYTH MAJOR mentions that on old recent beaver teeth a "moderate" plication of the enamel occurs. This crenulation is sometimes very pronounced although the individuals are not very old. It is impossible to separate *Castor plicidens* from *Castor fiber*, and this is still more evident if the alleged greater dimensions of the teeth and incisors be examined.

The dimensions which HINTON (1914) gives for the very old jaws of *Castor plicidens* from Bacton (Forest Bed), correspond exactly to those of the Teglian jaw and of some old jaws from Mosbach. The two young cheek-teeth of *Castor plicidens* from West Runton, figured in the same paper, do not differ in a single respect from those in the young beaver jaw from Ehringsdorf, preserved in the Berlin collection.

Likewise the two mandibles of *Castor plicidens* from Valdarno, photographed and described by Bosco (1890), tally in every detail with those from Mosbach and Tegelen.

That the strong plications of the enamel need not be invariably accompanied by broader incisors was evident to me from a beaver jaw from Mosbach, in the collection at Frankfort, on which just the contrary was to be observed, namely, a very broad incisor (9.9 mm.) and but slightly crenulated teeth. On the other hand, on another beaver jaw from Mosbach in the Wiesbaden collection I found intensively plicated folds and a breadth of incisor of not more than 8.6 mm.

Hinton (1914) concludes his note on "Forest-Bed Beavers" with the following words: "*Castor plicidens* seems thus to have rapidly acquired a dental feature which the recent beaver, had it been left alone, might have developed in the fullness of time." In my opinion something different has been the case. The earliest specimens of *Castor fiber* exhibit as a rule a complex folding of the enamel, and in the course of time, according as this plication became less complex, it appeared on the grinding surface later in the life of the individual. As in so many animals, the fossil specimens found are stouter than those of the present day. The jaws of the beavers from Mosbach are on an average more robust than those from the fen deposits, which exceed again those of the recent animals, even those of the Elbe which are the largest among the latter.

Ivor Montagu (1924) examined a large number of fossil specimens of the beaver from the fen deposits of Cambridge, including some twenty skulls, and found no anatomical difference between them and the recent beaver. With regard to the enamel folding he writes that this stands in no correlation to the individual age, though perhaps to the geological, "unless it is purely idiosyncratic".

The type species of *Castor veterior* Lankester consists of two left premolars out of upper jaws, found in the Red Crag of Sutton and described in 1864 by Lankester, who figured one of the two. These teeth, according to this author, differ from those of the beaver "in the great length of the fang, the greater width of the fossae of dentine between the enamel ridges and in the greater inward development of the large anterior (inner) fold." The pattern on the grinding surface is said to resemble that of the American beaver. NEWTON (1891) gives a few figures of the same premolar and remarks, in my opinion rightly, that the great variability which he had noticed in the teeth of *Castor fiber*, led him to doubt the validity of this new "species". The only difference he can state is that two of the three folds are to be seen on the outer wall of the tooth only for a short distance from the grinding surface; the middle one of the exterior three, like the single interior fold, runs to the base.

NEWTON, in the same treatise, figures a left upper premolar, found in the Red Crag of Newbourn, which exactly resembles some beaver teeth from Taubach, in the collection at Berlin. The upper premolar from Taubach (Pl. VIII, fig. 42), if it were as old as the one from Newbourn, would look exactly like that of NEWTON's, in respect to the length of the fold grooves on the outer side of the tooth. The distance from the base to the end of the posterior outer fold is as much as 17 or 18 mm. on this tooth from Taubach, where the base is still open, so that this distance might have increased still more.

The lengths of the outer grooves of the type species, two short ones with a very long one between them, are different from the relative lengths in the teeth from Newbourn and from Taubach, where the length of the posterior groove is shorter than that of the anterior, and the middle one is not much longer than the front one. In the same collection at Berlin there is a molar of *Castor fiber* from Mosbach, in which it is just the front groove that is the shortest and the length of the posterior one is intermediate between that of the two others. An upper tooth of *Castor fiber* from Tegelen, in the collection at Utrecht, is 26 mm. long; it is already closed at the base, and shows on the wall of the outer side three equally long grooves of not more than 6 mm.

A striking similarity with this tooth, as far as the length of the fold-grooves is concerned, is exhibited by the first molar in the right mandible of a beaver from the Red Crag of Woodbridge, in Suffolk. HINTON (1914) gives a figure of this mandibular fragment with the two front cheek-teeth, and refers it to *Castor veterior* LANKESTER, on account of the three grooves on the inner side of the molar and the single groove on the outer side of the premolar ending not far beneath the grinding surface.

The great variability existing in the lengths of the grooves in *Castor fiber*, fossil and recent, renders the value of a "species" based, as NEWTON's was, solely upon the relative lengths of these grooves, doubtful, the more so as the ends of the fold grooves in older specimens are hidden by a cement layer round the base of the enamel wall.

The well-developed fangs mentioned by LANKESTER and HINTON would assuredly be a typical difference with *Castor*, where only a somewhat uneven bottom closes the old tooth at its base. NEWTON, however, observed that the teeth from Sutton and Newbourn do not differ materially from those of *Castor fiber* in the form of the fang.

Castor rosinae MAJOR from Valdarno, as BOSCO (1899) has established, is a young jaw of *Castor plicidens*, *i. e.* in my opinion of *Castor fiber*.

In 1911 Miss KELLOGG described and figured a beaver tooth from Fresno County in California, found in deposits which may be reckoned to the Upper Miocene or to the Lower Pliocene. This *Castor californicus* KELLOGG is thus much older than the specimens from the Lower Pleistocene of the Silver Lake region of Oregon, known up till then as the earliest discoveries of *Castor* in America.

This tooth from California, which is termed a second molar of the upper jaw, is, according to KELLOGG, distinguished from the beaver tooth by reason of the antero-posterior diameter of the crown being greater than the transversal, namely 6.8 mm. against 5.8 mm.

Similar proportions, however, occur frequently in all younger beaver teeth. In the collection at Munich there is a molar (it is not possible to make a distinction between m^1 and m^2 of the beaver) of the upper jaw, from Jockgrim, in which the antero-posterior diameter of the grinding surface is 8.0 mm., the transversal 6.5 mm. This tooth is not even a very young one, for the enamel folds are already closed at the base of the tooth, as is also seen on the tooth described by KELLOGG.

A somewhat younger specimen from Ehringsdorf, in the Berlin collection, exhibits a similar proportion too, namely, 7.6 mm. and 7.1 mm. A still younger stadium is shown by the m^2 of a Swedish beaver, figured (fig. 5) by LÖNNBERG (1908); here the length exceeds the width by more than 2 mm. Moreover, VON REICHENAU's Table (1912) contains the measurements of several grinding surfaces of m^2, where the length exceeds the breadth. The same thing was found by myself in m^2 in the beaver skull (Pl. III, fig. 10), in the Teyler Museum, from the peat in the moat round the ruins of Castle Brederode, near Haarlem. Consequently, in my opinion, there is no argument against referring the tooth from California to *Castor fiber*.

KELLOGG considers the difference between the Californian tooth and those of *Eucastor* and *Trogontherium* to lie in the fact that *C. californicus* shows three outer enamel folds on the upper tooth, whereas a single one is to be seen in both the other animals. As regards *Trogontherium*, however, this holds good only of older teeth where the front and the last fold (island) are already worn off!

The discovery of this tooth, with its striking resemblance to that of the recent beaver, in such an old formation in California, is certainly of great importance, as it renders it doubtful whether *Castor fiber* will have originated in Europe. The descent of *Castor californicus* from European *Steneofiber* species becomes admissible, if a migration to North America during the latest Miocene or the earliest Pliocene be assumed.

The remains of *Castor fiber* in the Teglian Clay are trifling in comparison to the quantity of *Conodontes* material; they are nearly all figured in this treatise. The few specimens, a femur and an incisor in the Teyler Museum, and a femur in the Berlin collection, have been mistaken for remains of *Trogontherium*. Several specimens are to be found in the collection in the Geol. Institute of the University at Utrecht, *viz.* an almost perfect humerus, a tibia lacking only the proximal end, a damaged proximal extremity of the ulna, a metatarsal V and a phalanx, besides a mandibular ramus with all the teeth, a few skull fragments, separate upper teeth and fragments of incisors. Also to these specimens the name of *Trogontherium cuvieri* had been given by the collector, and thus L. RUTTEN (1909) makes no mention of beaver remains from Tegelen. VON LINSTOW (1908) observes that "bei Tegelen keine Reste von Biber nachgewiesen wurden." Not until the year 1915 does REID make account of *Castor europaeus* L. among the fauna of Tegelen, because NEWTON had identified as belonging to this species the molar from Belfeld near Tegelen, mentioned on page 194, which was sent to him by Dr. TESCH, then district geologist in Limburg. The Rev. Reg. Weingärtner informed me by letter that he had found this tooth in a claypit at Belfeld; it is now preserved in the collection at Vechta.

All the remains of the Teglian *Castor* indicate that this animal, with the exception of the premaxillary region, was in no case smaller than *Conodontes* (*Trogontherium*) from this locality, and had more robust extremities than the latter.

Castoroides

Castoroides, the geologically youngest and at the same time by far the largest of the castorids, received its name in 1858 from Foster, who described a mandibular ramus, a radius and one incisor, but gave a drawing of little utility. It is comprehensible that the fossil remains of this bear-sized animal, which inhabited a wide-spread area, are very numerous. Hay (1923 and 1924) enumerates a large number of specimens with the localities where they were discovered, the literature relating to them and the Musea where they are preserved. *Castoroides* lived from the State of New York in the east, to the "Great Plains" in the west, and from Florida to Yukon Territory, in Alaska.

Its vertical distribution is limited to the Pleistocene. Specimens are known from the Lower Pleistocene of Hay Springs (Nebraska) and from the First Interglacial (Aftonian), as well as from the Post Glacial. As Hay (1923) remarks, *Castoroides* thus withstood all the unfavourable factors of the Ice Age, but died out in the Post Glacial Period.

The skeleton of the Giant Beaver is almost completely known; only of the fore-foot nothing has ever been described. The most important document is a skeleton found in the State of Indiana, first described by Moore (1890), and later by Hay (1914); it is now mounted in the Museum at Richmond (Ind.). Hay gives a drawing of this skeleton, which has been restored at places.

It is probable that in the Lower Pleistocene a rather smaller form of *Castoroides* occurred (Hay, 1924).

Martin (1912) considers that *Castoroides kansensis* must be distinguished from *Castoroides ohioensis* on account of some differences which, for the greater part, however, are the same as have been found between older and younger specimens of *Castor* and which I have also met with in those of *Conodontes*. The species *kansensis* shows, for instance, proportionally larger incisors, a relatively longer diastema, comparatively longer nasals, deep rough pittings on the parietals, and the basioccipital firmly coössified with the basisphenoid.

The three first features are in close relation to each other and typical of older skulls, and so are strong muscle impressions and obliteration of sutures.

As regards the form of the skeleton *Castoroides* is a typical beaver, and in the form and proportionate length of the limbs stands closer to *Castor* than *Conodontes* does.

If the skeletons of *Conodontes* and of *Trogontherium*, described in Chapter III, had been known earlier, the division of the Beavers into *Castoridae* and *Castoroididae* would probably not have been made. Max Weber (1904) has, in my opinion rightly, placed *Castoroides* in the family of the Beavers, although most authorities consider the difference between *Castor* and *Castoroides* too great, especially as regards the structure of the cheek-teeth, the cranial base and the lower jaw, not to place the two animals in separate families. The earlier authors, Coues and Allen (1877), Trouessart (1880), Flower and Lydekker (1891) and Zittel (1891—1893), made the distance still greater by including *Castoroides*, in most cases together with *Amblyrhiza*, as the only members of the family of the *Castoroididae*, in the group of the *Hystricomorpha*. This was done mainly on the ground of the place of origin of the angular process on the lower jaw being looked upon as the same as that of *Hystrix*. As was established on page 147, this is an error; the angular process arises in *Castoroides*, just as it does in all the Beavers, at the lower border of the mandible. The point of view of these earlier authors is now abandoned, as the study of the entire skeleton of *Castoroides* shows that this animal cannot be classed together with a typically hystricomorphous form like *Amblyrhiza* (Cope, 1868 and 1893). Many authors, however, still positively favour a distinction of *Castoroides* and *Castor* into two separate families of the Sciuromorpha.

Besides a few minor differences in the relative proportions of the skull bones the chief ground for this distinction is, firstly, the so-called division of the posterior half of the ductus naso-pharyngeus in *Castoroides* into a lower and an upper passage, each with a separate posterior exit (Pl. II, fig. 3), accompanied by a deep ventral hole in the basisphenoid (not in the basioccipital, as Cope (1883), following Allen (1877) in this respect, mentions), while the deep ventral fossa in the basioccipital, as occurs in *Castor*, is lacking. A second important difference is seen in the structure of the cheek-teeth, which in the Giant Beaver have an unlimited growth and exhibit flattened tubes of enamel filled with dentine and united by cement plates (thus making an impression on the earlier authors of elephants' teeth), whereas in the beaver the teeth close at the base and show enamel folds, three on the one side of the tooth and one on the other. Of the enamel tubes there are only three present on the teeth of *Castoroides*, except on the lower premolar and on the hindermost upper molar, where there are four. The grinding surface of the latter molar is also larger than that of the other teeth; in *Castor*, on the contrary, the last molar is the smallest. Moreover, the auditory bullae are not inflated, as in *Castor*, and the infraorbital foramen is situated not on, but behind, the premaxillo-maxillary suture.

Miller and Gidley (1918), in their diagnosis of *Castoroides*, mention that the socket of the incisor runs below the infraorbital foramen, not above it, as it does in *Castor*.

The enamel of the incisors of *Castoroides* is rough, strongly convex in transversal direction and grooved longitudinally; in *Castor* it is flat and smooth. The tibia and fibula in *Castoroides* are completely anchylosed distally; in *Castor* these bones are always found separate in the fossil state; they are never coössified.

We shall see in the following chapter that the gap between *Castor* and *Castoroides* is remarkably well bridged over by *Conodontes* and *Trogontherium* on the one hand, while, on the other, several features of *Castoroides* are intermediate between *Castor* and *Conodontes*.

For a possible phylogenetic relation of *Eucastor* and *Castoroides* see p. 289.

Moore and Hay are agreed that *Castoroides* was most probably an aquatic animal. The tail was less broadened and flattened than in the beaver. The animal held its body low, as is indicated by the joints of the extremities, which, as a rule, were folded at sharp angles. The tail, which probably was more flexible than in *Castor*, may have been a better aid in swimming.

That *Castoroides*, too, built a "lodge" of trees which he felled himself, is rendered probable by Williamson's account (History of Ohio and Anglaize County, 1905) of the discovery of a skull and other portions of the skeleton of this animal "in a house which was 3 to 4 feet high and about 8 feet square. The willow poles of which it was constructed were about 3 inches in diameter and were laid after the manner of the houses of modern beavers." It is a matter for regret that this remarkable document, which was discovered near New Knoxville, in Ohio, has not been preserved.

Diagnosis of the Castoridae

From our knowledge of the Beavers at the present day, this family may be defined as follows:

Castoridae.

Fairly large to very large pentadactyle, plantigrade simplicidentate rodents, among which amphibiotic and burrowing or fossorial forms. Nearctic and palaearctic. Upper Oligocene up to Recent. Dentition: i $\frac{1}{1}$, p $\frac{1}{1}$, m $\frac{3}{3}$. Enamel of the incisors on the front or also on the outer side. Teeth with enamel folds or tubes, more or less hypsodont, with or without roots. Molars of equal size, or m^3 reduced, or m^3 larger than the others. Infraorbital foramen narrow. Tympanic bullae internally with low ridges or with lamellae. Postorbital process small or absent. Canalis transversus and alisphenoid canal present. Internal pterygoid plates of both sides may come in contact with each other, whereby very large pterygoid fossae are formed, besides a possibly pneumatic passage above the naso-pharyngeal passage. Large ventral cavity in the basioccipital or in the basisphenoid may occur. Angular process arises on the lower border of the mandibular ramus. Rami more or less firmly connected in the symphysis. Fusions of some cervicals common. Clavicle present. Entepicondylar foramen may occur. Trochanter tertius present. Fibula free or coössified distally with tibia. Articulation of fibula with calcaneum may occur.

CHAPTER VII

The Place of Trogontherium and Conodontes among the Castoridae

If we admit for the present that a separation of the Beavers into two families, *Castoridae* and *Castoroididae*, is necessary, the question as to which *Trogontherium* and *Conodontes* bear the closest affinity to, is difficult to answer.

For both have in common with *Castoroides* the strong development of the angular process with the broad shelf along the lower border (margo inferior). The ductus pneumaticus cranii and the ductus naso-pharyngeus with their posterior openings behind each other, and the basisphenoid hollowed out ventrally, are also to be seen in *Trogontherium cuvieri*. There, too, and in *Conodontes*, the deep fossa in the basioccipital is lacking and the tympanic bullae are not much inflated. Furthermore, in *Trogontherium cuvieri* the pterygoid fossae are extraordinarily wide and deep, and separated by the pterygoid plates being in contact in the median line.

The hindermost molar of the upper jaw in *Trogontherium* and *Conodontes* has, as in *Castoroides*, the largest grinding surface of all the teeth, with a few small additional enamel folds more on its hinder part. Likewise, the premolar is the largest in the row of the lower jaw, as a fourth inner enamel fold is seen on the anterior part, strongest developed in *Trogontherium*, weaker in *Conodontes*. As in *Castoroides*, the enamel of the incisivi in both is rough and convex and sometimes grooved longitudinally, and in *Conodontes* (these bones are not known of *Trog. cuv.*) tibia and fibula have completely ossified distally.

But also with *Castor*, *Conodontes* and *Trogontherium* have several features in common, as, for instance, a short blunt postorbital process on the frontale, and the place of the infraorbital foramen just at the premaxillo-maxillary suture and below the shaft of the incisor.

The most important and striking similarity, however, is seen between the cheek-teeth, although those of *Castor* are much more hypsodont.

A young grinder of *Conodontes* and of *Trogontherium*, on which the folds are still connected with the exterior is, when in the jaw, hardly distinguishable from one of the beaver. As in *Castor*, although at a younger stage, the anterior and posterior of the three folds become first isolated from the external enamel layer and form two islands on the grinding surface, between which the two open folds lie, one on each side.

If our knowledge of *Trogontherium* and *Conodontes* extended no further than the teeth only, both genera would most probably have been given a phylogenetical place between *Steneofiber* (*Chalicomys*) and *Castor*; systematically, they would have been referred without the slightest doubt to the family of *Castor*.

If we now consider what the rest of the skeleton can teach us regarding the affinities of *Conodontes*, we shall immediately be struck by the morphologically intermediate place of *Castoroides* between *Conodontes* on the one side and *Castor* on the other. This applies to the shape of the atlas, the position of the articular surfaces on the cervical vertebrae and to the structure of pelvis and caudals, as well as to the shape and place of the trochanter tertius on the femur and the proportional length of upper and fore-arm, upper and lower leg and foot, and of the metatarsals to each other (Tables on pp. 203 and 240).

In respect of the presence of an entepicondylar foramen in the humerus and of a joint between fibula and calcaneum, *Conodontes* differs from both, *Castor* and *Castoroides*. The distal humeral extremity of *Trog. cuv.* is not known, neither its calcaneum nor its fibula. Leaving the cheek-teeth out of consideration, there would be more grounds to retain a special family for *Trogontherium* and *Conodontes* (as MAX WEBER, 1928, has done) than for *Castoroides*. Both the former, however, are so closely related to *Castor* in respect of the teeth that it does not appear desirable to make a separate family for them. But then there is no reason either to do so for *Castoroides*, for its whole skeleton is more like the beaver's than either that of *Conodontes* or of *Trogontherium*, and the other typical features of the skull, the size of the grinding surfaces and the shape of the incisors are also seen in *Trogontherium* and partially in *Conodontes*. The only reason for separating *Castoroides* would then be the strong resemblance which its teeth bear to those of *Hydrochoerus*. With respect to this, however, TULLBERG has remarked, I believe rightly, that the pattern may be derived from a beaver-like tooth. The striking similarity of the teeth of *Castoroides* with those of *Eucastor* (*Dipoides*) *tortus* LEIDY is mentioned on p. 286 of this treatise.

The knowledge of the skeleton of *Conodontes* and of *Trogontherium* removes all grounds for the separation of the Castoroididae from the Beavers in a more limited sense, as they form the bridge over the gap. They do the same with respect to the distance between the Chalicomyidae and the Beavers. The Chalicomyidae are classed by MILLER and GIDLEY in a special family, which includes *Chalicomys* (= *Steneofiber*) with related genera, *Trogontherium*, *Palaeocastor* and *Eucastor* with related genera. This large family they consider equivalent to the family of the *Castoridae*, which then would contain *Castor* only, and to the family of the Castoroididae in which they place *Castoroides* alone. As diagnostic characters of the Chalicomyidae, these authors name the strong hypsodont teeth, the absence of a postorbital process and of the pit-like depression in the basioccipital. As characteristics of the Castoridae they mention the heavy muzzle and the narrow brain-case, the pit-like depression in the basioccipital region and the flattened caudals.

In the first place it should be remarked that the absence of a postorbital process in the Chalicomyidae does not apply to *Trogontherium* and *Conodontes*, where this prominence, although not large, is more distinct than in the beaver. The size of the premaxillary region and the narrowness of the brain-case are two features which occur in a still more pronounced degree in *Trogontherium* and *Conodontes* than in *Castor*. That the teeth are more hypsodont in the beaver is true, but among the Chalicomyidae of MILLER and GIDLEY, *Dipoides problematicus* SCHLOSSER is an instance where the teeth are but little less hypsodont than those of *Castor*. The only differences remaining are thus the depression in the basioccipital and the flattened caudals.

The distinction made between *Castor* and the other Beavers does not seem to me to be justified if these are the only points of difference, since they are very plainly features of adaptation.

For the depression in the basioccipital in the beaver is coated with the mucous epitheel of the nasal passage, and is regarded as a reservoir for the mucus which has to lubricate the very coarse food before it is swallowed.

The flattened caudal vertebrae in the scaled portion of the tail are equally clearly characteristics of adaptation to aquatic life.

Since there is, thus, in my opinion, but one family of the Beavers to be placed among the Sciuromorpha, I would draw attention to the feature in which *Conodontes* differs from both *Castor* and *Castoroides*, and to the one in which it differs from all other Castoridae. Both, so-called primitive characters, the epicondylar foramen in the humerus, and the fibulo-calcanear articulation, are of little importance from a systematic point of view. For this foramen was found by FILHOL (1879), among 34 humeri of *Steneofiber viciacensis*, to be present in 16 specimens and lacking in 18. It occurs in the geologically younger *Steneofiber depéreti*. GIEBEL (1890) mentions that in *Halmaturus* and *Dasyurus* the foramen may be lacking in the same individual on the one side, while it is present on the other.

The joint between fibula and calcaneum, not yet met with in other simplicidentate Rodents, has no preponderating systematic significance either. It happens that species of the same genus are seen with and without this joint. Of the seven recent species which the genus *Manis* numbers, three possess this joint and four do not (EUG. DUBOIS, 1926). The latter, two African and two Asiatic species, use the hind-feet mainly for locomotion, while with the fore-feet they hew in the termite hills. The three species which possess the said joint have, moreover, strong claws on the hind-feet, which are used for scraping and digging, and the two African species are excellent climbers.

Since more functions than those of locomotion, *e. g.* those of swimming and digging, will have been required of the hind-feet of *Conodontes*, the ancient joint has been preserved here, whereas in *Castor*, though the hind-feet were also used vigorously in swimming, it is absent and must have been lost early in the series of ancestors, as it was already absent in the earliest European *Steneofiber* species in the Aquitanian. It is remarkable in this connection that PETERSON (1905) found on the calcaneum of *Palaeocastor fossor*, a typical burrowing animal out of the lower Miocene of Nebraska and Wyoming, an indication "that the fibula may have touched the exterior face of the sustentacular facet". (PETERSON apparently does not mean the sustentacular facet but the outer facet of the calcaneum.) Unfortunately the distal epiphysis of the fibula of this animal has not been found. MATTHEW (1905) mentions something similar ("fibulo-calcanear contact slight or absent") with respect to *Eutypomys* from the Oligocene of South Dakota, which he regards as the first Castorid (see p. 277).

As regards the phylogenetic origin of *Trogontherium* and of *Conodontes*, it may be stated with a fair degree of certainty that they cannot be descended from the European *Steneofiber* (*Chalicomys*)-*Castor* line. It has just been remarked above, that the fibulo-calcanear joint is already lost in *Steneofiber* from the Upper Oligocene. Neither does the large hindermost molar in the upper jaw belong to the features of this stock. Indeed, this characteristic is met with in *Dipoides* from the Bohnerz Formation (SCHLOSSER, 1902) and in *Castoroides*. As practically nothing is known of the skeleton of the former, there can be no further indications of its phylogenetic relation; the much stronger hypsodont teeth of *Dipoides* clearly preclude a direct descent of *Trogontherium* and *Conodontes* from this Lower Pliocene castorid. Perhaps *Trogontherium minus*, as well as *Dipoides problematicus*, represents a side line developed in almost the same epoch, from a group of primitive Beavers from which *Conodontes* and the more specialized *Trogontherium cuvieri* F. may be descended also.

As has been established on p. 289 we might assume a phylogenetic relation between *Castoroides* and the European *Dipoides* and *Trogontherium-Conodontes* group; the development of *Trogontherium* in Europe and of *Castoroides* in North America would then be an example of parallelism or analogous adaptation.

LITERATURE CONSULTED

Abel, O.

1914. Palaeontologie und Palaeozoologie in Die Kultur der Gegenwart, Teil III, Abt. IV, Bd. IV, pp. 303—395, 8 Fig.

1926. Amerikafahrt. (Jena, Fischer).

1927. Das Daemonelix-Problem. Palaeont. Zeitschr., Bd. IX, pp. 179-180.

Allen, J. A.

1877. In Coues, E. and J. A. Allen "Monographs of North American Rodentia" in Report U. S. Geol. Surv. Territories 11, no. 6, pp. 415—454.

Alston, E. R.

1876. On the classification of the order Glires. Proc. Zool. Soc. London. 1876, pp. 61—98.

Ameghino, E.

1881. Le Quaternaire de Chelles. Bull. Soc. géol. de France, 3e série, IX, pp. 242—257, 6 fig.

Arldt, Th.

1907. Die Entwicklung der Continente und ihrer Lebewelt. (Leipzig, Wilhelm Engelman), 730 p., 17 Fig., 23 Karten.

Ault du Mesnil, G. d'

1896. Note sur le Terrain quaternaire des environs d'Abbeville. Revue mens. de l'École d'Anthropologie de Paris, sixième année, 1896, pp. 284—296, 3 pls.

Barbour, E. H.

1897. Nature, Structure and Phylogeny of Daemonelix. Bull. Geol. Soc. Amer., Vol. VIII, pp. 305—314.

Bardeleben, K. von

1894. Hand und Fusz. Verh. Anat. Ges. auf der achten Vers., pp. 257—337, 6 Abb.

Baur, G.

1884. Zur Morphologie des Tarsus der Säugethiere. Morph. Jahrb., Bd. X, pp. 458—461.

Bernsen, J. J. A.

1927. The Geology of the Teglian Clay and its fossil Remains of *Rhinoceros*. Diss., Amsterdam. 108 p., 12 Pls.

Blasius, J. H.

1857. Naturgeschichte der Säugethiere Deutschlands. (Braunschweig), 549 p., 290 Abb.

Bosco, C.

1899. I Roditori pliocenici del Valdarno superiore. Palaeontographia italica. Vol. V, pp. 85—104, tav. XI, XII.

BOULE, M.

1893. Réponse à M. DEPÉRET sur la classification des faunes de Mammifères pliocènes et sur l'age des éruptions volcaniques de Velay. Bull. Soc. géol. de France. Série III, t. XXI, pp. 540—550.

1902. La caverne à ossements de Montmaurin (Haute Garonne). L'Anthropologie. Paris, t. XIII, pp. 305—319, 9 fig.

BOURGEOIS, L.

1867. Découverte d'instruments en silex dans le dépôt à *Elephas meridionalis* de Saint-Prest aux environs de Chartres. C. R. Acad. des Sciences. Paris, t. IV, pp. 47—48.

BRANDES, G.

1908. Ueber Vorkommen, Lebensweise und anatomischen Bau des Bibers. Verh. Ges. deutscher Naturf. und Ärzte. 79e Vers., Tl. 2, 1ste Hälfte, p. 256.

BRANDT, J. F. und J. F. C. RATZEBURG,

1829. Monographie des Bibers. Medizinische Zoologie, Bd. I, pp. 12—30, 3 Tfln.

BRANDT, J. F.

1855. Beiträge zur näheren kenntnis der Gattung *Castor*. Mém. de PETERSBOURG, VI série, Sciences Nat., t. VII, pp. 43—66, 3 Tfln.

BRONN, H. G.

1853—1856. Lethaea geognostica, Bd. III, Stuttgart.

CALDERON, SALVADOR

1877. On the Fossil Vertebrata hitherto discovered in Spain. Quart. Journ. Geol. Soc. London. Vol. XXXIII, p. 124.

CARLSSON, ALBERTINA

1891. Untersuchungen über die weichen Teile der s.g. überzähligen Strahlen an Hand und Fusz. Stockholm, Bihang till K. Svenska Vet. Akad. Handlingar, Bd. 16, Afd. IV, No. 8, pp. 1—40, 4 Tfln.

COLLOT, M.

1904. Alluvions anciennes et *Castor* fossile de la vallée de l'Ouche. Mém. Acad. des Sciences de Dijon, 4e série, t. IX, pp. 203—212.

1908. Le Genre „*Trogontherium*" dans le bassin de la Saône. Revue Bourguignonne, Dijon, t. XVI, No. 3, pp. 1—14, 1 pl.

COPE, E. D.

1868. Synopsis of the Extinct Mammalia of the Cave formations in the United States, etc. Proc. Amer. Phil. Soc. Vol. XI, pp. 171-192, 3 Pls.

1883. The extinct Rodentia of North America. The American Naturalist, Vol. XVII, part. 1, pp. 370—379, 30 figs.

CUVIER, G.

1823. Recherches sur les Ossemens fossiles. Paris, t. V, Ie partie.

CUVIER et LAURILLARD,

1849. Anatomie comparée. Recueil de Planches de Myologie. Paris.

DELAFOND, F. et CH. DEPÉRET,

1893. Les terrains tertiaires de la Bresse et leurs gîtes de lignites et de minerais de fer. Études des gîtes minér. de la France, 332 p., 58 fig., 1 carte, atlas de 19 pl., Paris.

Depéret, Ch.

1887. Recherches sur la succession des faunes de vertébrés miocènes de la vallée du Rhône. Arch. Mus. Hist. Nat. Lyon, t. IV, pp. 45—313, 7 figs., pl. XII—XXV.

1890—1897. Les animaux pliocènes du Roussillon. Mém. Soc. géol. France. Pal., No. 3, 198 p., 18 pl.

1895. Sur la classification et le parallélisme du système miocène. Bull. Soc. géol. France, Série III, t. XXI, pp. 170—266.

Note sur la situation stratigraphique des faunes de Mammifères pliocènes d'Europe et du Plateau Central en particulier. Idem, pp. 524—540.

1906. L'Évolution des Mammifères tertiaires. C. R. Ac. Sc. Paris, Vol. CXLIII, p. 1120.

1918—1922. Essai de coordination chronologique des temps quaternaires. C. R. Ac. Sc., Paris, série de sept Notes.

Douglass, E.

1901. Fossil Mammalia of the White River Beds of Montana. Trans. Am. Phil. Soc. Philadelphia, n.s., Vol. XX, pp. 237—279, 1 Pl.

Dubois, Eug.

1904. Over een equivalent van het Cromer Forest Bed in Nederland. Versl. Kon. Ak. Wet. Amsterdam, Afd. Wis- en Nat., deel XIII, 1, pp. 243—251, 2 fig. en pp. 453—454.

1905. L'âge de l'argile de Tegelen et les espèces de cervidés qu'elle contient. Arch. du Musée Teyler, Haarlem, série II, vol. IX, pp. 605—615, 1 pl., 1 fig.

L'âge des différentes assises englobées dans la série du „Forest-Bed" ou le Cromérien. Idem vol. X, pp. 59—74.

1926. *Manis paleaejavanica*, het reuzenschubdier der Kendeng-fauna. Versl. Kon. Ak. Wet. Amsterdam, Afd. Wis- en Nat., deel XXXV, 8, pp. 949—958, 1 pl., 2 fig.

Dubois, G.

1924. Recherches sur les terrains quaternaires du Nord de la France. Mém. Soc. géol. du Nord, t. VIII, I, 355 p., 4 + 2 pl., 41 fig.

Classification du Quaternaire du Nord de la France et comparaison avec le Quaternaire danois. C. R. Ac. Sc., Paris, t. CLXXIX, pp. 475—477.

1925. Rongeurs caractéristiques des différents étages du Quaternaire de l'Europe occidentale. Soc. géol. du Nord, Ann. L, pp. 115—118.

1926. Révision des os de *Castor* conservés au Musée Gosselet. Soc. géol. du Nord, Ann. LI, p. 41.

Filhol, H.

1879. Étude des Mammifères fossiles de Saint-Gérand-le-Puy (Allier). Ann. des Sc. géol. Paris, t. X, 252 p., 30 pl.

1891. Études sur les Mammifères fossiles de Sansan. Idem, t. XXI, 319 p., 46 pl.

Fischer, G.

1809. Sur l'*Elasmotherium* et le *Trogontherium*, deux animaux fossiles

et inconnus de la Russie. Études palaeontologiques sur les environs de Moscou, Vol. II, pp. 250—268, 3 pls.

FREUDENBERG, W.

1909. Das Diluvialprofil von Jockgrim in der Pfalz. Ber. über die Vers. des Oberrhein. Geol. Vereins, 42e Vers. zu Heidelberg, April 1909, pp. 65—68.

1911. Beiträge zur Gliederung des Quartärs von Weinheim a. d. Bergstrasze, Mauer bis Heidelberg, Jockgrim in der Pfalz u. a. m. und seine Bedeutung für den Bau der oberrheinischen Tiefebene. Notizbl. des Ver. für Erdk. u. d. groszherz. geol. Landesanstalt zu Darmstadt, IV Folge, Heft 32, 1911.

1922. Funde von Mammut im jüngeren Lösz und von *Rhinoceros Merckii* im Lehm einer Spalte im Muschelkalk bei Bretten und ihre geologische Bedeutung. Verh. d. Naturw. Ver. in Karlsruhe, 29 Bd., Jahrg. 1922/1923, pp. 71—74.

GERVAIS, PAUL

1859. Zoologie et Palaeontologie françaises. 2e édit. avec atlas. Paris.

1867—1869. Zoologie et Palaeontologie générales. I série avec atlas. Paris.

GIEBEL, C. G. und W. LECHE,

1890. Säugetiere, in BRONNS Kl. und Ordn. des Tierreichs. Leipzig.

HARVEY HOLDEN, F.

1917. Osteological Relationships of three Species of Beavers. Univ. of Calif. Public. Zoology, Vol. 17, No. 8, pp. 75—114, Pls. 5—12, 18 text figures.

HAUG, ÉMILE

1908—1911. Traité de Géologie. II, 2. Paris, pp. 1599—1921.

HAY, O. P.

1902. Bibliography and Catalogue of the fossil Vertebrata of North America. Un. St. Geol. Survey, Bull. No. 179, 868 pp.

1914. The Pleistocene Mammals of Iowa. Iowa Geol. Survey, Vol. XXIII, Annual Report 1912, 499 pp., 75 Pls., 142 figs.

1923. The Pleistocene of North America and its vertebrated animals from the States east of the Mississippi river and from the Canadian provinces east of longitude 95°. Carnegie Institution of Washington, No. 322.

1924. The Pleistocene of the middle region of North America and its vertebrated animals. Idem, No. 322A.

HEINICK, PAUL

1908. Ueber die Entwicklung des Zahnsystems von *Castor fiber* L. Zool. Jahrb. Abt. Anat. und Ontogenie der Tiere, Bd. XXVI.

HILDRETH, S. R.

1837. Miscellaneous observations made during a tour in May, 1835, to the Falls of the Cuyahoga, near Lake Erie: extracted from the Diary of a Naturalist. Am. Journ. of Science, Vol. XXXI, pp. 1—85, 20 figs.

HINTON, MARTIN A. C.

1910. A preliminary account of the British fossil Voles and Lemmings;

with some remarks on the pleistocene climate and geography. Proc. Geologists' Assoc., Vol. XXI, part 10, pp. 489—507.

1914. On some Remains of Rodents from the Red Crag of Suffolk and from the Norfolk Forest-Bed. Ann. and Mag. of Nat. Hist., Series 8, Vol. XIII, pp. 186—195, 1 Pl.

JAGOR,

1873. Sammlung von Funden aus der Knochenhöhle Cueva de Dima in Biscaya. Verh. der Berl. Ges. für Anthrop., Ethnol. und Urgeschichte, Jahrg. 1873, p. 61.

KAMPEN, P. N. VAN

1905. Die Tympanalgegend des Säugetierschädels. Morph. Jahrb., Bd. 34, pp. 321—722, 96 Fig. i. T.

KELLOGG, LOUISE

1911. A fossil Beaver from the Kettleman Hills, California. Univ. of Calif. Bull., Dept. Geol., Vol. 6, No. 7, p. 401.

LANKESTER, E. RAY

1864. On New Mammalia from the Red Crag. The Annals and Mag. of Nat. Hist., 3rd. series, Vol. XIV, pp. 353—360, 1 Pl.

LARTET, E.

1864. Sur une portion de crâne fossile d'*Ovibos musqué*, etc. C. R. hebd. de l'Ac. des Sciences, Paris, t. 58, p. 1201.

LAUGEL, A.

1862. La faune de Saint-Prest près Chartres (Eure et Loir). Bull. Soc. Géol. de France, 2e série, t. XIX, pp. 709—718, 3 fig.

LEIDY, JOSEPH

1869. The extinct Mammalian Fauna of Dakota and Nebraska. Journ. Ac. Nat. Science of Philadelphia, Vol. VII, 2 nd. series, pp. 23—472, 30 Pls.

1887. Notice and description of fossils in caves and crevices of the limestone rocks of Pennsylvania. Ann. Rep. of the Geol. Survey of Pennsylvania for 1887, pp. 1—20, 2 Pls.

LINSTOW, O. VON

1908. Die Verbreitung des Bibers im Quartär. Abh. und Ber. v. Museum für Natur- und Heimatkunde zu Magdeburg, Bd. I, Heft IV, pp. 213—387, mit 2 Karten.

LÖNNBERG, E.

1909. A Study of the Variation of the European Beavers. Stockholm. Arkiv för Zool., Bd. 5, No. 6, pp. 1—16, 5 figs.

LYDEKKER, R.

1885. Catalogue of the fossil Mammalia in the British Museum, part I. London.

LYELL, C.

1840. On the Boulder Formation or Drift and associated Fresh Water Deposits composing the Mud-cliffs of Eastern Norfolk. Phil. Mag. series 3, Vol. XVI, pp. 345—380, 18 figs.

MAJOR, FORSYTH

1908. On species of *Castor*, fossil and recent. Proc. Zool. Soc. London, pp. 630—634, 6 figs.

Marsh, O. C.
1877. Introduction and Succession of Vertebrate Life in America. Am. Journ. of Science, 3 series, Vol. XIV, pp. 337—378.

Martin,
1913. On a comparison of three skulls: *Castoroides Ohioensis*, *Castoroides kansensis* sp. n. and *Castor*. Kansas Univ. Sci. Bull., Vol. VI, No. 6, pp. 389—396, 4 Pls.

Matschie, P.
1907. Zwei anscheinend noch nicht beschriebene Arten des Bibers. Sitzungsber. Ges. Naturf. Freunde, Berlin, No. 8, pp. 215—220, 2 Pls.

Matthew, W. D.
1902. List of the Pleistocene Fauna from Hay Springs Nebraska. Bull. Am. Mus. Nat. Hist., Vol. XVI, pp. 317—322.
1902. A Horned Rodent from the Colorado Miocene. With a Revision of the Mylagauli, Beavers and Hares of the American Tertiary. Idem, Vol. XVI, Art. XXII, pp. 291—310, 17 figs.
1903. The Fauna of the Titanotherium Beds at Pipestone Springs, Montana. Idem, Vol. XIX, pp. 197—227, 19 figs.
1905. Notice of two new genera of Mammals from the Oligocene of South Dakota. Idem, Vol. XXI, pp. 21—26, 6 figs.
1907. A lower Miocene Fauna from South Dakota. Idem, Vol. XXIII, pp. 169—219, 26 figs.
1909. The genus *Ancodon*. Idem, Vol. XXVI, pp. 1—7.
1910. On the osteology and relationships of *Paramys*, and the affinities of the Ischyromyidae. Idem, Vol. XXVIII, pp. 43—72, 19 figs.
1918. Contribution to the Snake Creek Fauna. Idem, Vol. XXXVIII, pp. 183—229, 7 Pls., 20 figs.
1924. Third contribution to the Snake Creek Fauna. Idem, Vol. L, pp. 59—210, 63 figs.

Matthew, W. D. and H. J. **Cook**,
1909. A Pliocene Fauna from Western Nebraska. Idem, Vol. XXVI, pp. 361—414, 27 figs.

Matthew, W. D. and **Walter Granger**,
1925. New Creodonts and Rodents from the Ardyn Obo formation of Mongolia. Amer. Mus. Novitates, 193.

Mayet, L.
1908. Étude des Mammifères miocènes des sables de l'Orléanais et des faluns de la Touraine. Ann. Univ. Lyon, Nouv. Série I, Sciences, fasc. 24, 336 p., 100 fig., 12 pl.

Mayet, L. et F. **Roman**
1923. Les éléphants pliocènes, 1e partie: *Elephas planifrons* **Falconer** des sables de Chagny et faunes de mammifères d'âge villafranchien-Saint-Prestien. Ann. Univ. Lyon, Nouv. série, fasc. 43, 87 p., 15 fig.

Merriam, **John** C.
1913. Vertebrate Fauna of the Orindan and Siestan Beds in Middle California. Univ. Calif. Bull. Dept. Geol., Vol. 7, p. 373.

MILLER, G. S.
1912. Catalogue of the Mammals of Western Europe. (Brit. Mus. Nat. Hist. London) 1019 p., 213 figs.

MILLER, GERRIT S. and JAMES GIDLEY,
1918. Synopsis of the Supergeneric Groups of Rodents. Journ. Wash. Ac. Sci., Vol. VIII, No. 13, pp. 431—448.

MONTAGU, IVOR
1924. On the Remains of Fen Beaver in the Sedgwick Museum. I. Skulls and Teeth. Proc. Zool. Soc. London, Part IV, pp. 1081—1086, 4 Pls.

MOORE, JOSEPH
1890. Concerning a skeleton of the Great Fossil Beaver, *Castoroides Ohioensis*. Journ. Cincinn. Soc. Nat. Hist., Vol. XIII, pp. 138—169, 25 figs.
1899. A Cranium of *Castoroides* found at Greenfield, Indiana. Proc. Ind. Ac. Science, pp. 171—173, 2 Pls.

NEHRING, A.
1875. Länge und Achse der Schneidezahnalveolen bei den Nagetieren. Zeitschr. f. d. ges. Naturw. in Halle, N. Folge, Bd. XI, pp. 217—239.

NEWBERRY,
1870. Die geologische Stellung der Überreste des Elephanten und Mastodon in Nordamerika. Proc. Lyc. Nat. Hist., New York, Vol. I, pp. 77—84.

NEWTON, E. T.
1881. Notes on Vertebrata of the pre-glacial Forest Bed Series of the East of England. Rodentia. Geol. Mag. Dec. II, Vol. VIII, p. 256.
1882. The Vertebrata of the Forest Bed Series of Norfolk and Suffolk. Mem. Geol. Survey, United Kingdom, 143 p., 19 Pls.
1890. On some new Mammals from the Red and Norwich Crags. Quart. Journ. Geol. Soc., Vol. XLVI, pp. 444—453, 1 Pl.
1891. The Vertebrata of the Pliocene Deposits of Britain. Mem. Geol. Survey, United Kingdom, 137 p., 10 Pls.
1892. On a Skull of *Trogontherium cuvieri* from the Forest Bed of East Runton, near Cromer. Trans. Zool. Soc. London, Vol. XIII, Part 4, pp. 165—175, 1 Pl.
1902. *Trogontherium* from a Pleistocene Deposit in the Thames Valley. Geol. Mag. IV, Vol. IX, p. 385.
1916. *Trogontherium* from the Pleistocene of Copford, Essex. Geol. Mag. VI, Vol. III, p. 322.

NORDMANN, ALEXANDER VON
1847. Ueber die an fossilen Knochen überaus reichen Ablagerungen in der Nähe von Odessa. Haidinger Berichte III, Wien. pp. 369—373.

OSBORN, H. F.
1900. Correlation between Tertiary Mammal horizons of Europe and America during the Tertiary Period, etc. Ann. New York Acad. Sci., Vol. XIII, No. 1, pp. 1—72, 3 figs.
1909. Cenozoic mammal horizons of western North America (with faunal

lists of the Tertiary Mammalia of the West, by W. D. MATTHEW). Unit. St. Geol. Surv., Bull. 361, 138 p., 3 Pls., 15 figs.
1910. The Age of Mammals in Europe, Asia and North America. (New York, Macmillan), XVII ± 625 p., 220 figs.
1922. Pliocene (Tertiary) and Early Pleistocene (Quaternary) Mammalia of East Anglia, Great Britain, in Relation to the Appearance of Man. Geol. Mag. Vol. LIX, No. X, pp. 433—441.

OWEN, R.
1846. A History of British fossil Mammals and Birds. (London, van Voorst), XLVI, ± 560 p., 237 figs.
1869. On the Distinction between *Castor* and *Trogontherium*. Geol. Mag., Vol. VI, p. 49.

PAVLOW, MARIE
1906. Sélénodontes post-tertiaires de la Russie. Mém. Acad. Sc. Petersb., 8e série, XX, pp. 1—95, 8 pl.
1922. Les données historiques sur le développement des connaissances palaeontologiques des Mammifères trouvés en Russie. Bull. Soc. Nat. Moscou, sect. géol. Nouv. Série, t. XXXI, pp. 117—148.

PETERSON, O. A.
1905. Description of New Rodents and Discussion of the origin of *Daemonelix*. Carnegie Mus. Pittsburgh, Mem., Vol. 2, pp. 139—200, 11 figs., 4 Pls.

POCOCK, R. I.
1922. On the external characters of the Beaver (Castoridae) and of some Squirrels (Sciuridae). Proc. Zool. Soc. London. Part XIV, pp. 1171—1212, 23 figs.

POHLIG, H.
1890. Die groszen Säugetiere der Diluvialzeit. Leipzig.

POMEL, A.
1848. Description de la tête du *Castoroides Ohioensis* FOSTER par WYMAN. Arch. Bibl. Univ. Genève, Sc. phys. et nat., t. IX, pp. 165—167.
1853. Catalogue methodique et descriptif des vertébrés fossiles découverts dans le bassin hydrographique supérieur de la Loire et surtout dans la vallée de son affluent principal, l'Allier. (Paris, J. B. Baillière).

REICHENAU, W. VON
1906. Beiträge zur näheren Kenntnis der Carnivoren von Mauer und Mosbach. Abh. Groszh. hess. geol. Landesanst. Darmstadt, Heft 2.
1912. Einiges über Schädel und Gebisz der Biber (Castorinae). Jahrb. Nass. Verh. f. Naturk., Wiesbaden, Jahrg. 65, pp. 208—226, 2 Tfln.

REID, CL.
1890. The Pliocene Deposits of Britain. Mem. Geol. Surv., United Kingdom, 326 p., 48 figs., 5 pls.

REID, CL. and EL.
1915. The Pliocene Floras of the Dutch-Prussian Border. Meded. Rijksopsp. Delfst. 's-Gravenhage, No. 6, 177 p., 20 Pls.

ROGER, O.

1885. Säugethierreste aus der Reischenau. 28er Ber. Naturh. Ver. Augsburg, pp. 99—118, 3 Tfln.

1898. Wirbeltierreste aus dem Dinosauriensande der bayerisch-schwäbischen Hochebene. 33er Ber. Naturw. Ver. Schwaben und Neuburg (a. V.), Augsburg, pp. 1—46, 3 Tfln.

ROMER, A. S. and J. T. McCORMACK,

1928. A large *Palaeocastor* from the Lower Miocene. Amer. Journ. of Science, series 5, Vol. XV, pp. 58—60, 1 fig.

ROUILLIER, C.

1847. Études palaeontologiques sur les environs de Moscou. VIII Note supplementaire à l'histoire de *Trogontherium Cuvieri* FISCH. Jubilaeum semisaecularem Doctoris GOTTHELF FISCHER DE WALDHEIM, celebrant Sodales Soc. caes. nat. scrut. mosquensis, etc., Moscou, pp. 33—35, Tab. V, fig. 1—5.

RUGE, GEORG

1878. Untersuchungen über die Extensorengruppe am Unterschenkel und Fusse der Säugethiere. Morph. Jahrb. Bd. IV, pp. 592—643, 4 Tfln.

RÜGER, L.

1927. Ergebnisse einer Neubearbeitung eines Teiles der Fauna von Mauer a. d. Elsenz. Jahresber. u. Mitt. d. Oberrhein. geol. Vereins, Jahrg. 1927, pp. 134—135.

1928. Beiträge zur Kenntnis der altdiluvialen Fauna von Mauer an der Elsenz und Eberbach a. Neckar. Geol. und Pal. Abh. (E. KOKEN), N. F., Bd. 16, Heft 2, pp. 197—232, 8 Abb., 3 Tfln.

RUTOT, A.

1900. Note sur la position stratigraphique de la *Corbicula fluminalis* dans les couches quaternaires du bassin anglo-franco-belge. Bull. Soc. Belge de Géol., pal. et hydr., t. XIV, Mém., pp. 1—24.

RUTTEN, L. M.

1909. Die diliviale Säugetiere der Niederlande. Diss., Utrecht, 116 p., 2 Tfln., 2 Krtn.

SCHAUINSLAND, H.

1906. Die Entwicklung der Wirbelsäule nebst Rippen und Brustbein. Handb. vergl. und exper. Entwick. der Wirbeltiere. O. HERTWIG, Bd. III, Teil 2, pp. 514—562.

SCHLOSSER, M.

1884. Die Nager des europaischen Tertiärs nebst Betrachtungen über die Organisation und die geschichtliche Entwicklung der Nager überhaupt. Palaeontographica, 3e Folge, 7er Bd., pp. 119—162, Tfln. V—XII.

1902. Beiträge zur Kenntnis der Säugethierreste aus den Süddeutschen Bohnerzen. Geol. und Pal. Abh. (E. KOKEN), IX, 3, 144 p., 3 Fig., 5 Tfln.

1902. Ueber TULLBERG's System der Nagetiere nebst Bemerkungen über die fossilen Nager und die während des Tertiärs existirende Landverbindungen. Centralbl. f. Miner. Geol. und Pal., pp. 737—748.

1906. Referat der Arbeit von Eug. Dubois: Over een equivalent van het Cromer Forestbed in Nederland. Neues Jahrb. f. Miner. Geol. und Pal. Bd. I, Heft 2, S. 141.

Schmerling, P. C.

1846. Recherches sur les ossements fossiles découverts dans les Cavernes de la province de Liége. Liége, t. II, p. 115; pl. XXI de l'atlas.

Schreuder, A.

1928. *Castor praefiber* Depéret in der Fauna von Roussillon. Pal. Zeitschr., Bd. IX, pp. 374—378, 2 Abb.

1928. Humerus von *Steneofiber depéreti* Mayet. Idem, Bd. X, pp. 125—129, 9 Abb.

1928. Bijdrage tot de kennis van *Conodontes* en *Trogontherium*. Diss., Amsterdam, 49 p., 5 fig.

1928. Bemerkungen zu *Trogontherium soergeli* Rüger. Pal. Zeitschr., Bd. X, p. 297.

Schröder, H.

1898. Revision der Mosbacher Säugethierfauna. Jahrb. Nass. Ver. f. Naturkunde, Jahrg. 51, pp. 213—230.

1903. Die Wirbelthierfauna des Mosbacher Sandes, I. Abh. Kön. Preuss. Geol. Landesanst. N. F. 18, 143 p., 14 Tfln.

Schulze, F. E.

1867. Myologische Untersuchungen, I. Die Sehnenverbindungen in der Planta des Menschen und der Säugethiere. Zeitschr. wiss. Zool. Leipzig, Bd. XVII, pp. 1—22, 4 Tfln.

Scott, W. B.

1913. A History of Land Mammals in the Western Hemisphere. (Macmillan, New York) XIV + 693 p., front., 304 figs.

Smith, Burnett A.

1914. A new Locality of *Castoroides*. Am. Journ. Sc., 4th series, Vol. XXXVIII, pp. 463—466, 1 fig.

Soergel, W.

1925. Die Säugetierfauna des altdiluvialen Tonlagers von Jockgrim in der Pfalz. Zeitschr. Geol. Ges. Bd. 77, Abh. No. 3, pp. 405—438, 1 Tfl.

Stehlin, H. G.

1925. Catalogue des Ossements de Mammifères Tertiaires de la collection Bourgeois. Bull. No. 18, Soc. Hist. nat. et Anthr. Loir et Cher, pp. 77—277, 31 figs.

Stromer, Ernst

1902. Ueber die Bedeutung des Foramen entepicondyleum und des Trochanter tertius der Säugetiere. Morph. Jahrb. Bd. 29, pp. 553—562, 2 Fig.

1928. Wirbeltiere im obermiocänen Flinz Münchens. Abh. Bayr. Ak. Wiss., math. nat. Abt., Bd. XXXII, pp. 1—71, 3 Tfln.

Taylor, W. P.

1916. The status of the beavers of western North America, with a consideration of the factors in their speciation. Univ. Calif. Publ. Zool., Vol. 12, pp. 413—495, 17 figs.

TESCH, P.

1928. De stratigrafische grens Plioceen-Plistoceen in Europa. Versl. Geol. Sectie v. h. Geol. Mijnbouwk. Gen. v. Ned. en Kol., deel III, 10 p., 1 pl.

TOMES, J.

1850. On the Structure of the Dental Tissues of the Order Rodentia. Phil. Trans. R. Soc. London, pp. 529—567, 4 Pls.

TULLBERG, T.

1899. Ueber das System der Nagethiere. Eine phylogenetische Studie. Nova Acta Reg. Soc. scient. Upsala, Vol. 18, 514 p., 57 Tfln.

VIRET,

1925. Sur la faune de Rongeurs de Saint-Gérand-le-Puy (Allier). C. R. Acad. Paris, t. CLXXXI, pp. 337—339.

WARREN, E. R.

1927. The Beaver, its work and its ways. (Baltimore, Williams and Wilkins), 177 p., 78 figs.

WEBER, E. H.

1848. Beiträge zur Anatomie und Physiologie des Bibers, *Castor fiber*. Ber. Verhandl. K. Sächs. Ges. Wissensch., Leipzig. Bd. 2, pp. 185—200.

WEBER, MAX

1904. Die Säugetiere. (Jena, Fischer). XI + 866 p., 567 Abb.

1927. Idem Bd. I, XV + 444 p., 316 Abb.

1928. Idem Bd. II, XXIV + 898 pp., 573 Abb.

WIEDEMANN,

1804. WIEDEMANN's Archif für Zoologie und Zootomie. Bd. 4, p. 77.

WOOD, NORMAN A.

1914. Two undescribed specimens of *Castoroides Ohioensis* FOSTER from Michigan. Science, New York, N. Series, Vol. XXXIX, p. 759.

WYMAN, J.

1847. *In* HALL and WYMAN: The geological Position and an anatomical Description of the Cranium of the *Castoroides Ohioensis*. Boston Journ. Nat. Hist., Vol. V, pp. 385—401, 3 Pls.

TABLE OF CONTENTS

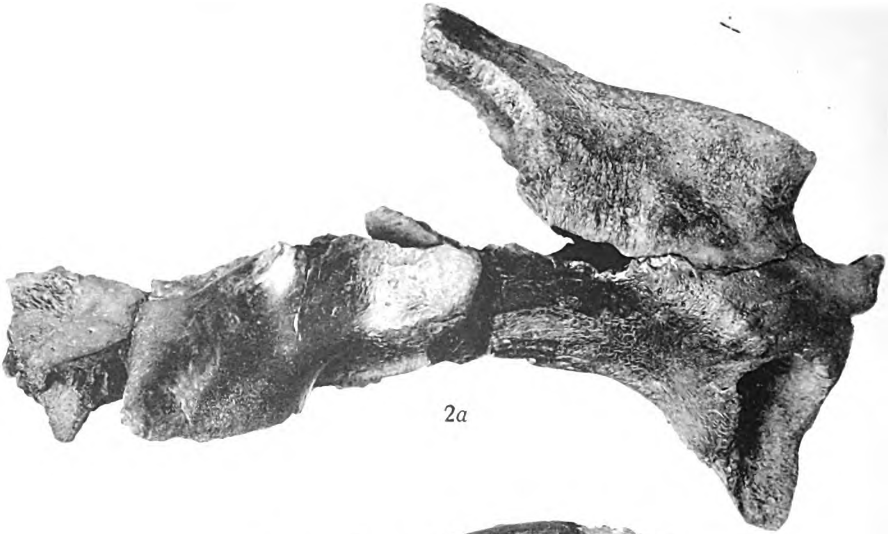
Introduction 99
CHAPTER I. Localities where *Trogontherium* remains have been found and particulars regarding the specimens 102
CHAPTER II. Vertical distribution 117
CHAPTER III. Osteology and comparison of the skeleton with that of the other Castoridae 119
  Skull 119
  Lower jaw 142
  Incisors 150
  Grinding teeth 156
  Vertebral column 175
  Fore-limb 194
  Hind-limb 202
 Summary of the comparison between *Trogontherium* and *Castor* 257
CHAPTER IV. The genera *Trogontherium* and *Conodontes*. 263
CHAPTER V. Restoration and probable habits 269
CHAPTER VI. Survey of the Castoridae 271
  Doubtful Castorids (*Cylindrodon, Eutypomys, Anchitheriomys*) 276
  Palaeocastor 279
  Steneofiber, Chalicomys 282
  Euhapsis 284
  Eucastor, Dipoides, Sigmogomphius, Castoromys 285
  Hystricops 289
  Amblycastor 290
  Castor species 290
  Castoroides. 299
  Diagnosis of the Castoridae 302
CHAPTER VII. The place of *Trogontherium* and *Conodontes* among the Castoridae 303
List of Literature consulted 308
Explanation of the Plates 321
Plates . . . . I—XVI

EXPLANATION OF THE PLATES

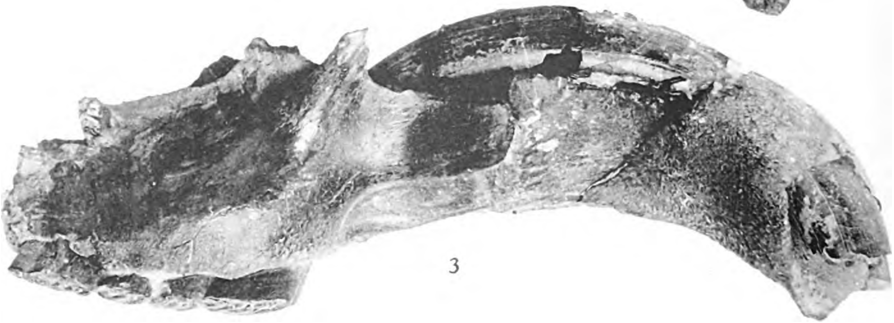
Where no other indication is given the specimens figured on the Plates are all photographed natural size and belong to *Conodontes boisvillettii* LAUGEL (*Trogontherium*) from the Teglian Clay.

The following abbreviations are used:

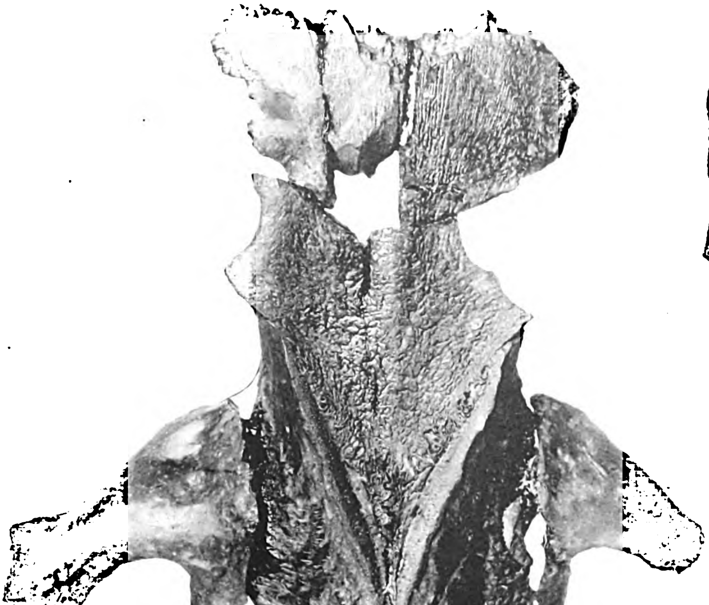
Tr. c. = *Trogontherium cuvieri* FISCHER from German localities.
C. f. = *Castor fiber* L. Unless otherwise stated the bones are of an adult Elbe beaver (N°. 416) in the Museum of the Zoological Gardens at Amsterdam.
T. M. = TEYLER Museum at Haarlem. Collection gathered by Professor EUGÈNE DUBOIS.
B. M. = Museum of the Preuss. geol. Landesanstalt at Berlin. Collection gathered by Professor P. G. KRAUSE.
J. C. M. = Museum of St. Joseph's College of the Dominicans at Vechta (Oldenburg). Collection gathered by the Rev. REG. WEINGÄRTNER.
M. M. = Natural History Museum at Maestricht.
S. M. = Natural History Museum of the Mission House at Steyl (Netherlands).
U. M. = Museum of the Geol. Institute of the University of Utrecht.
Munich M. = Museum of the Bayerische Staatssammlung für Palaeontologie, etc. at Munich.
Mainz M. = Natural History Museum of the City of Mainz.
Stuttgart M. = Württemberg Natural History Museum at Stuttgart.



2a



3

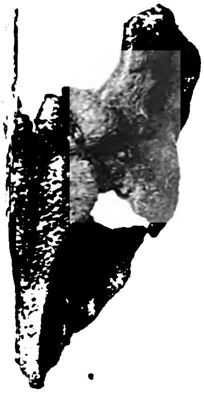


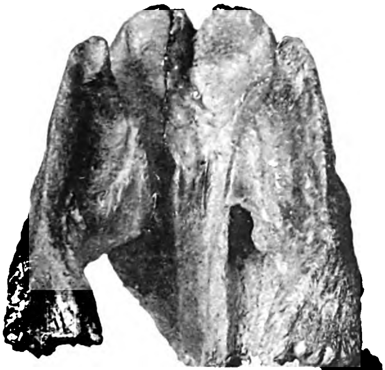
4

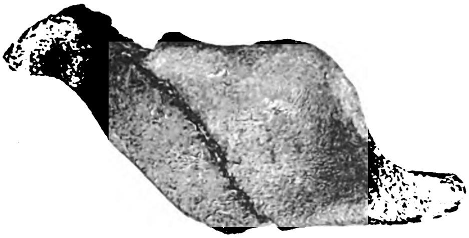
1

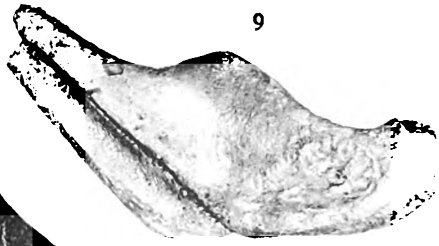
5a

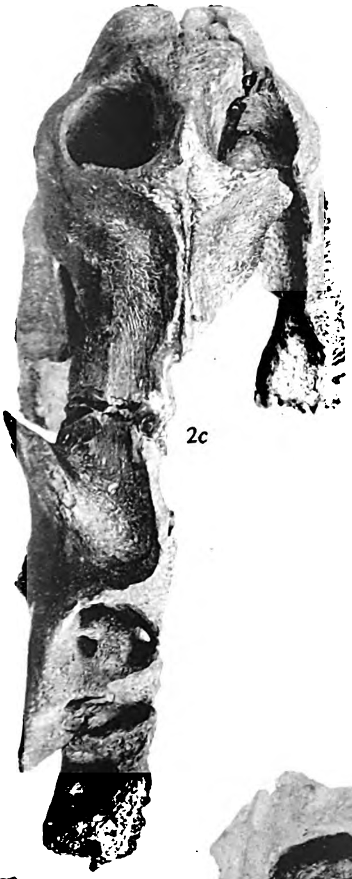
Plate I

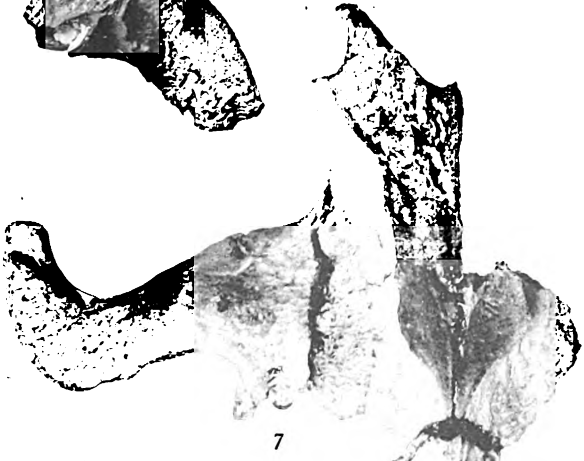

2b

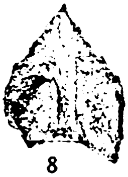

2d

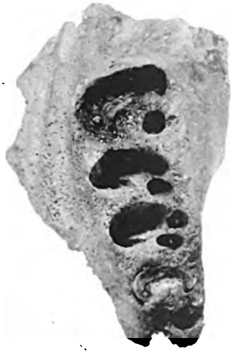

9


10


2c


7


8


6

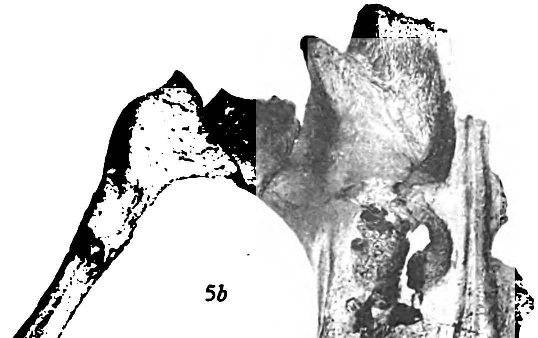

5b

PLATE I

Fig. 1. — Anterior part of left nasal; coll. T. M.

2. — Premaxillae and parts of right maxilla; coll. B. M.; *a* side, *b* anterior, *c* ventral, *d* dorsal view.

3. — Part of premaxillae and maxillae, side view; coll. B. M. (same specimen on Pl. II, fig. 5).

4. — Parts of frontals, parietals and squamosals, dorsal view; coll. J. C. M.

5. — Parts of maxillae and right malar bone; coll. T. M.; *a* anterior, *b* ventral view.

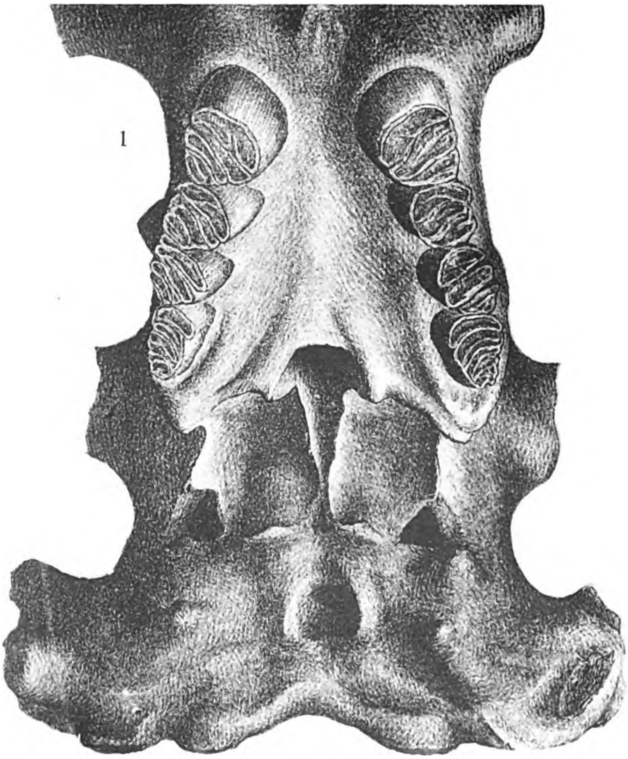
6. — Part of left maxilla, ventral view; coll. S. M. (same specimen with teeth on Pl. VIII, fig. 10).

7. — Parts of frontals, parietals, interparietal, left sqamosal and malar bone of juvenal, dorsal view; coll. B. M.

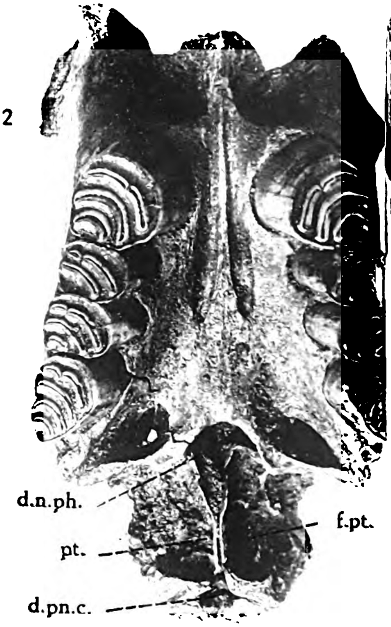
8. — Interparietal, dorsal view; coll. S. M.

9. — Part of left jugal arch (maxillary and malar portion), side view; coll. B. M.

10. — Same parts of bone of *C. f.* from Tegelen; coll. U. M.



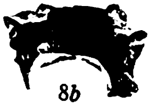
1



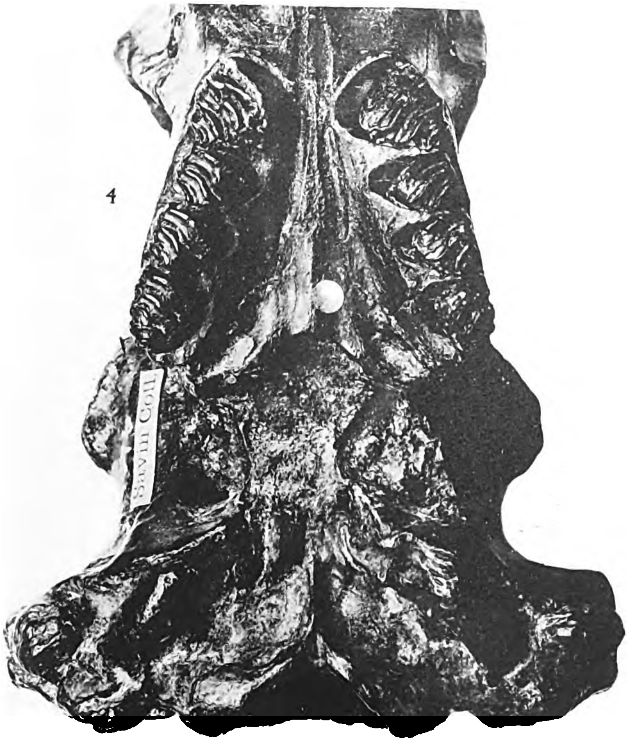
2

d.n.ph.
f.pt.
pt.
d.pn.c.

7*b*



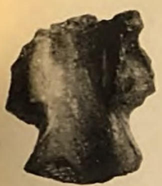
8*b*



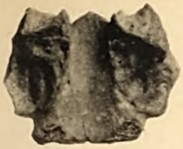
4

9

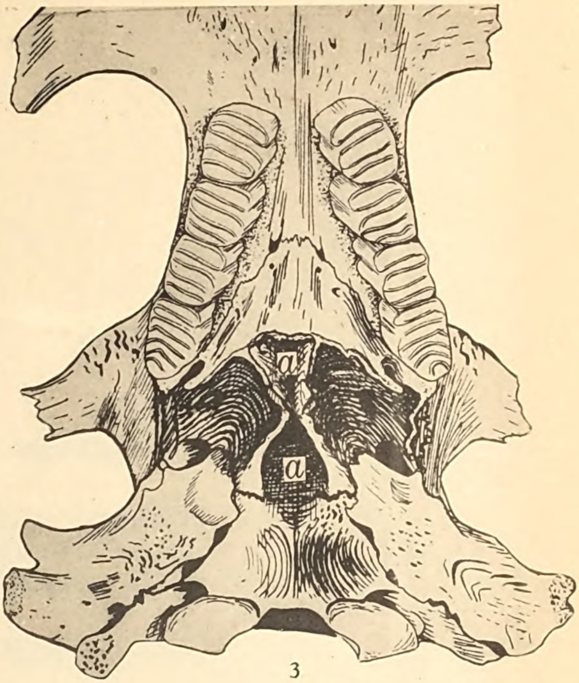
10



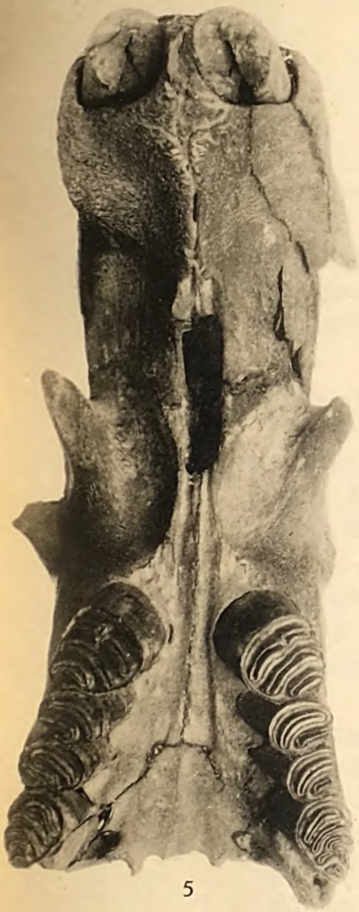
8*a*



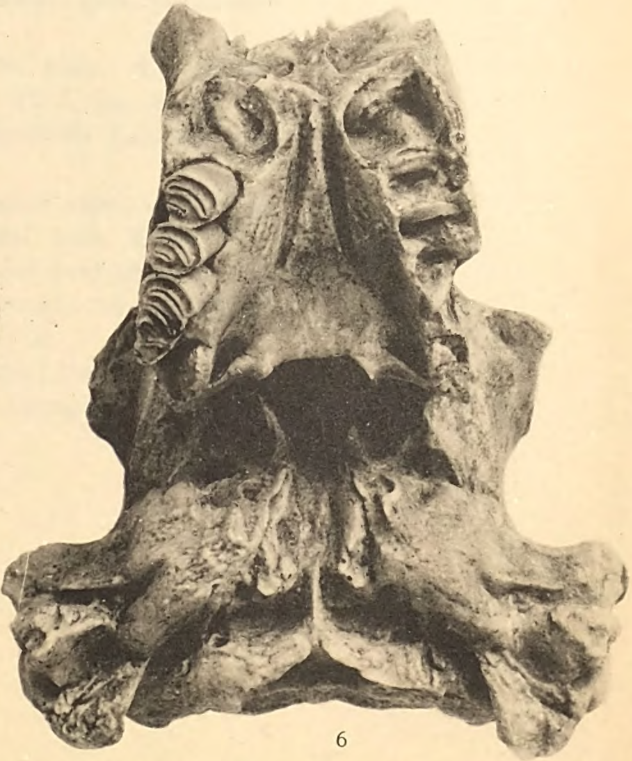
7*a*



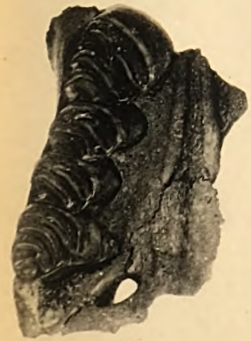
3



5



6



11

PLATE II

Fig. 1. — Part of skull, ventral view, of *Trog. cuv.* from Taganrok; after Rouillier (1847).

2. — Part of skull of *Tr. c.* from Mosbach, ventral view; coll. Mainz M. (Same specimen is figured on Pl. III; for the meaning of the lettering see Explanation of that Plate.)

3. — Part of skull of *Castoroides*, after Martin (1912); ½ nat. size.

4. — Part of skull of *Trog. cuv.* from East-Runton; photograph made of this species (M. 6127) in the British Museum, the authorities of which gave permission for its reproduction.

5. — Anterior part of skull, palatine view; coll. B. M.; (same specimen is figured on Pl. I, fig. 3.)

6. — Cast of skull of *Conodontes boisvillettii* Laugel from Saint-Prest.

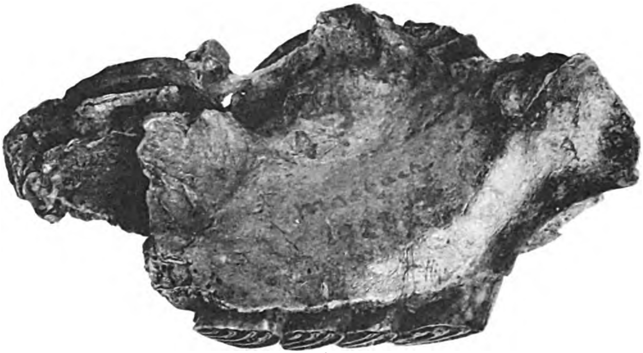
7. — Basisphenoid; *a* ventral, *b* anterior view; coll. B. M.

8. — Same bone of *C. f.* from Tegelen; coll. H. M.

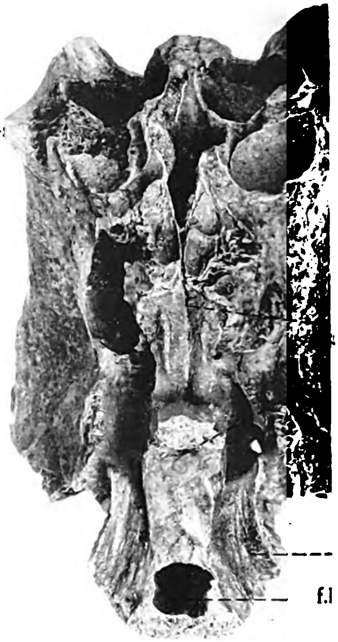
9. — Right portion of basisphenoid and part of right alisphenoid (a pin is brought through the alisphenoid canal), ventral view, coll. J. C. M.

10. — Right half of basioccipital, ventral view; coll. M. M.

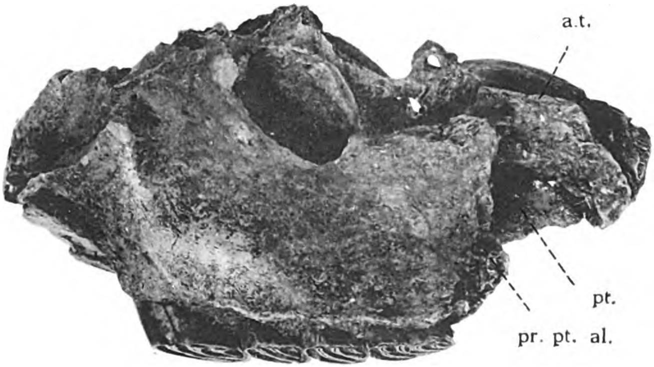
11. — Parts of maxilla and palatinum, ventral view; coll. S. M.



1*a*

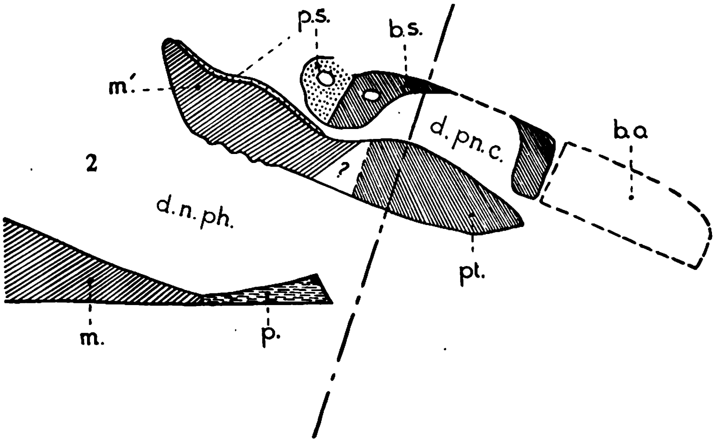


1*c*

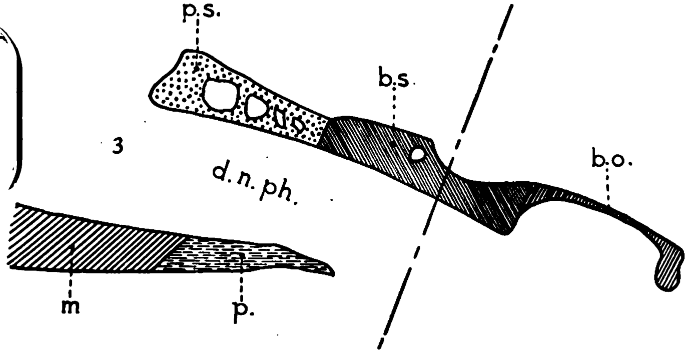

a.t.
pt.
pr. pt. al.

1*b*

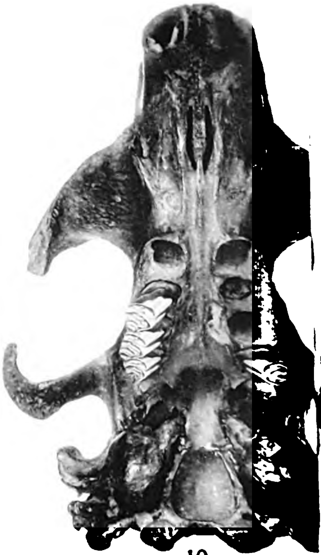
4


p.s.
b.s.
m'.
d. pn. c.
b.a
?
d. n. ph.
pt.
m.
p.

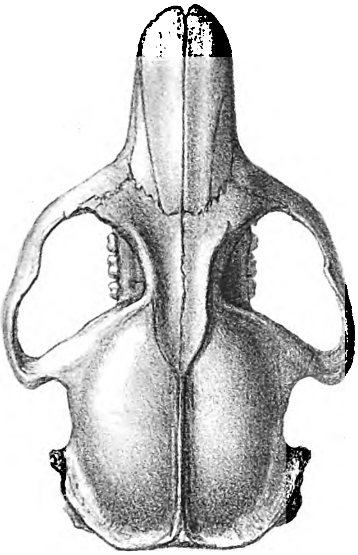
2


p.s.
b.s.
d. n. ph.
b.o.
m
p.

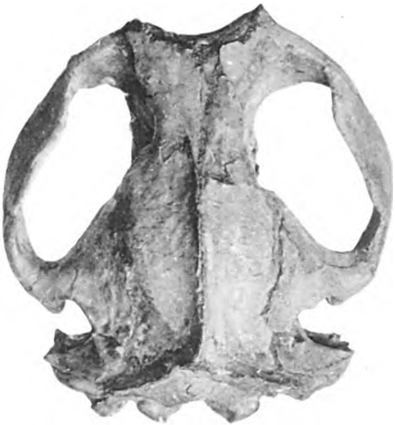
3



10



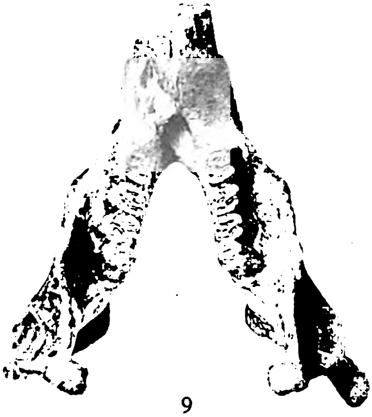
7a



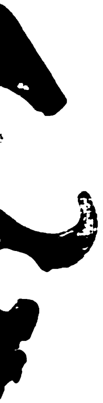
8a

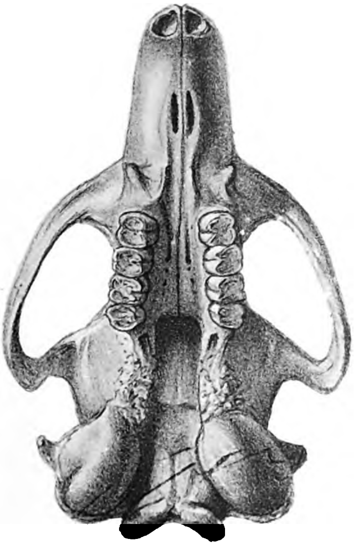
5

6

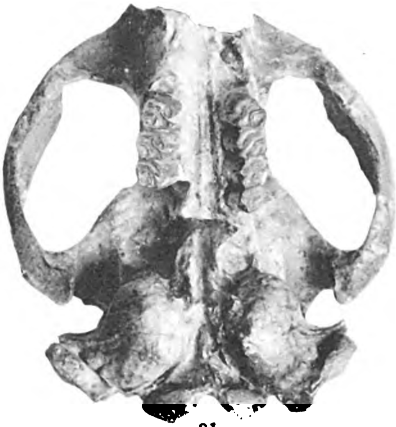


9





7b



8b

PLATE III

Fig. 1. — Same specimen as on Pl. II, fig. 2 and on Pl. IV, fig. 1; *a* seen from the right, *b* seen from the left side, *c* from above.

2. — Median section (Cf. fig. 1*b*).

3. — Same section through part of skull of *Castor*.

4. — Basisphenoid, dorsal view (same specimen on Pl. II, fig. 7).

5. — Basisphenoid, dorsal view; coll. B. M.

6. — Basisphenoid of *C. f.* from Tegelen, dorsal view (same specimen on Pl. II, fig. 8).

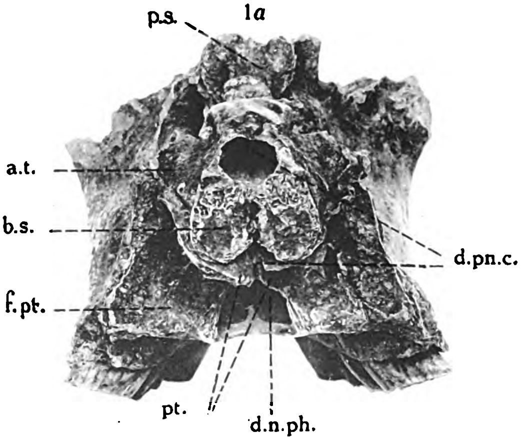
7. — Skull of *Steneofiber viciacensis*, *a* dorsal, *b* ventral view; after Filhol (1879).

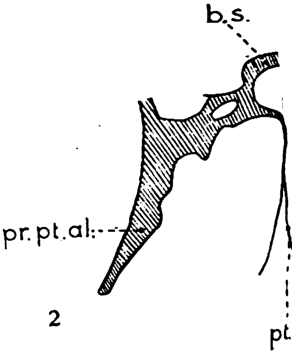
8. — Skull (without nasal region) of *Palaeocastor* spec. indet. from White River Group, So. Dakota; *a* dorsal, *b* ventral view; coll. Zool. Mus. Amsterdam.

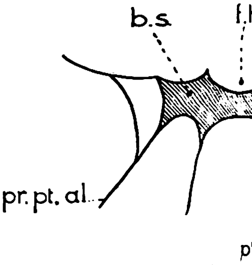
9. — Lower jaw of same individual, crown view.

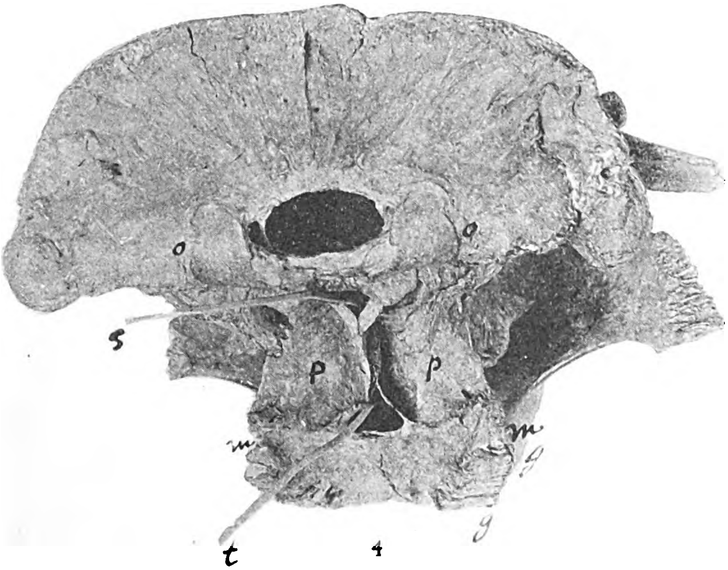
10. — Skull of *Castor fiber* from a peat deposit near Haarlem, ventral view; coll. T. M.; $\frac{1}{2}$ nat. size.

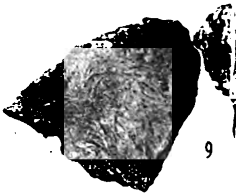
Explanation of the lettering in figs. 1—3: *b. o.* = basioccipital; *b. s.* = basisphenoid; *f. b. s.* = foramen (artificial ?) in basisphenoid; *p. s.* = praesphenoid; *pt.* = pterygoids; *a. t.* = ala temporalis; *pr. pt. al.* = processus pterygoideus alisphenoidei; *m.* = maxilla; m^1. upper portion of maxillae; *p.* = palate; *d. pn. c.* = ductus pneumaticus cranii; *d. n. ph.* = ductus nasopharyngeus.


1a
p.s.
a.t.
b.s.
f.pt.
pt.
d.n.ph.
d.pn.c.

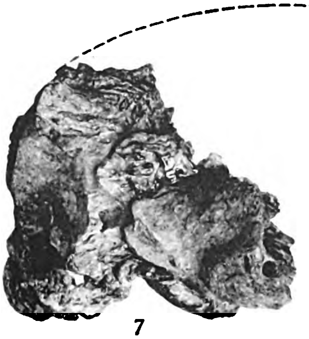

2
b.s.
pr.pt.al.
pt.


3

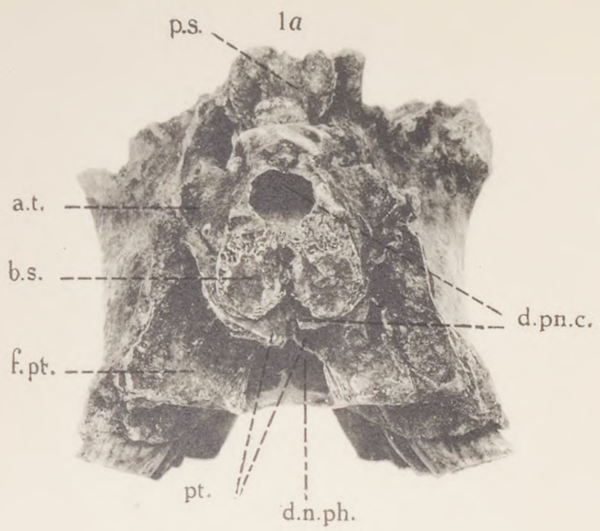

4
o
o
s
p
p
m
m
g
g
t


9

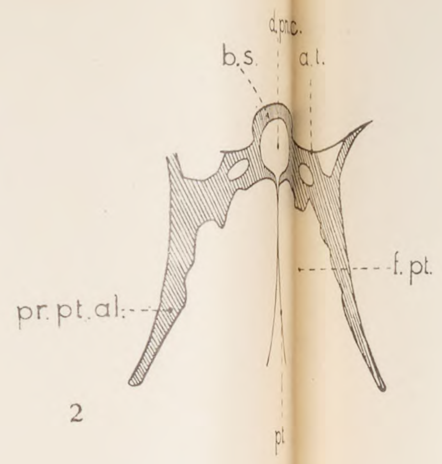
6


7

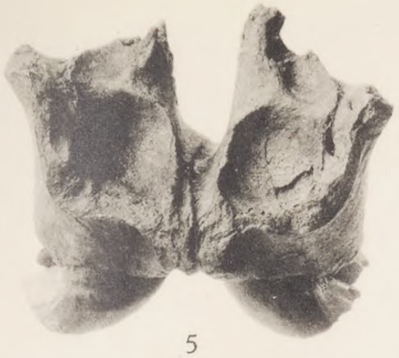
8


p.s.
a.t.
b.s.
d.pn.c.
f.pt.
pt.
d.n.ph.

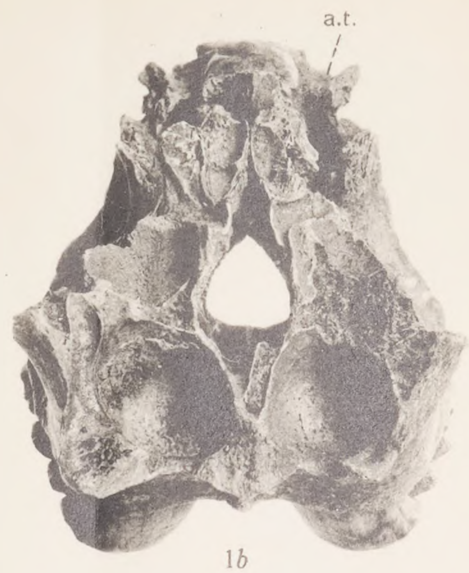
1*a*


d.pn.c.
b.s.
a.t.
f.pt.
pr.pt.al.
pt.

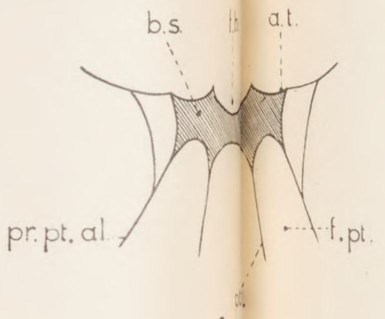
2



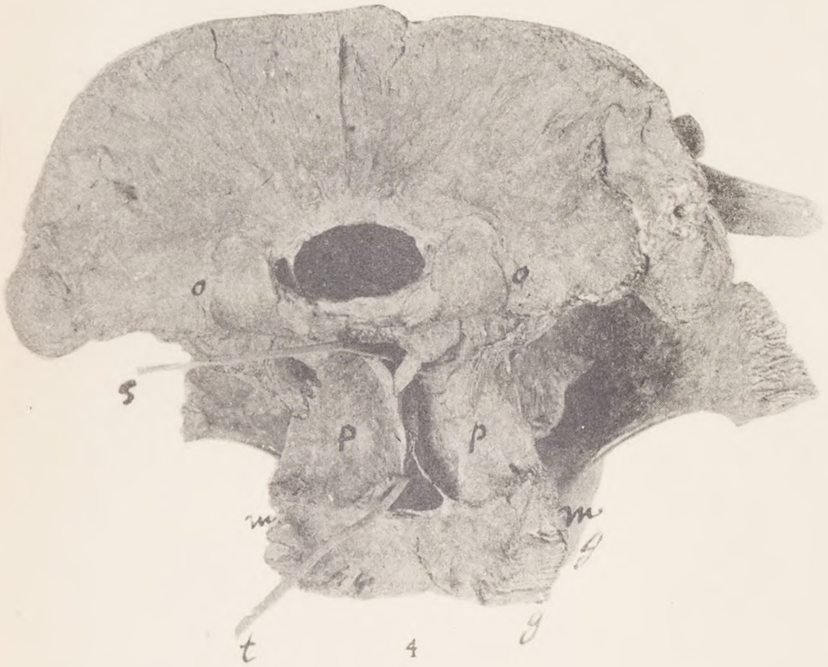
5



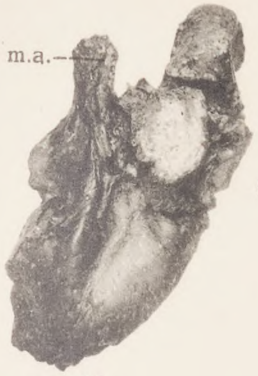
1*b*


b.s.
a.t.
pr.pt.al.
f.pt.

3

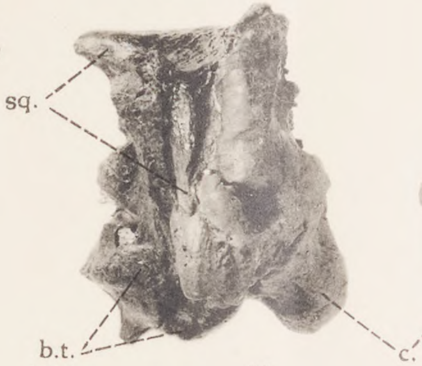

o
o
s
p
p
m
m
g
g
t

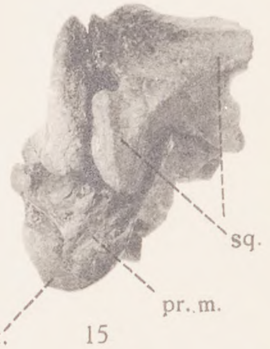
4



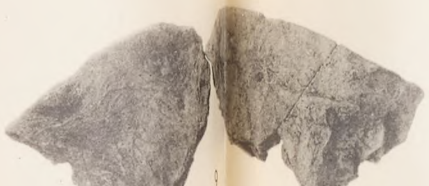
13

14



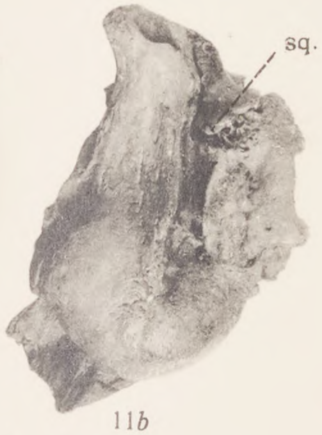


15

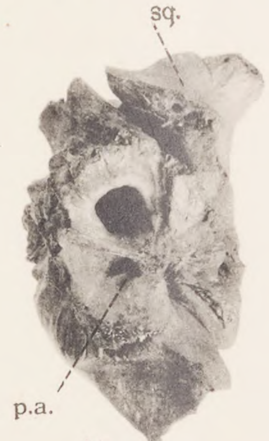


9

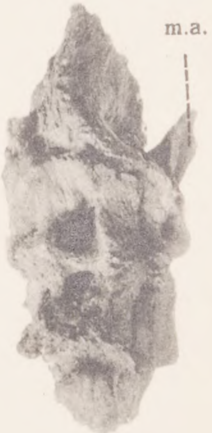
10



11*b*



11*c*

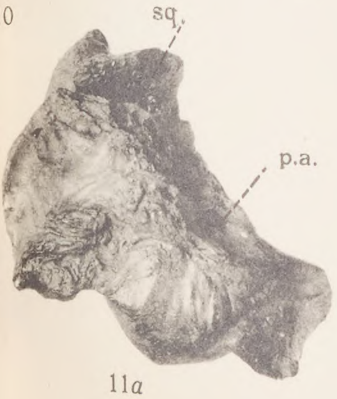


16

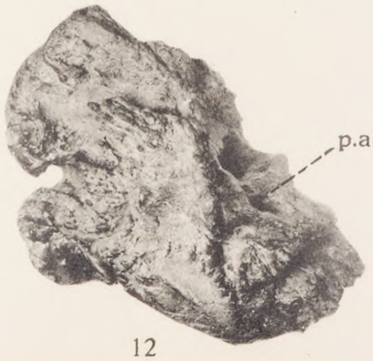
6

7

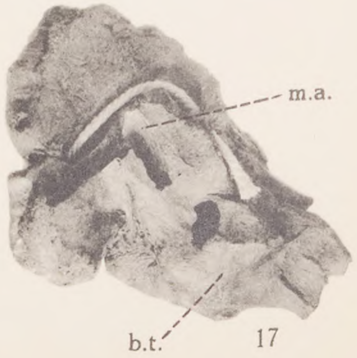
8



11*a*



12



17

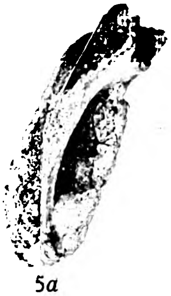
PLATE IV

FIG. 1. — Same specimen as on Pl. II, fig. 2 and on Pl. III, fig. 1; *a* seen from behind, *b* from the front.
2. — Cross section (Cf. fig. 1*a*) along the line on Pl. III, fig. 2.
3. — Same section along the —·— line on Pl. III, fig. 3.
4. — Skull of *Castoroides ohioensis*, posterio-ventral view; after MOORE (1899). (p = fossa pterygoidea; s = a straw entering the "upper posterior nares"; t = a straw entering the "lower posterior nares").
5. — Front part of maxillae, anterior view; coll. S. M.
6. — Left half of occiput of *Tr. c.* from Mosbach; coll. Mainz M.
7. — Left part of occiput; coll. J. C. M. (A thread has been brought through the venous canal.)
8. — Right part of occiput; coll. T. M. (same specimen on fig. 15).
9. — Dorsal parts of occiput; coll. B. M.
10. — Left fragment of above seen from the front to show the height of the occipital crest.
11. — Left petrotympanic (mastoid, petrosal, tympanic) of *C. f.* from Tegelen; coll. U. M.; *a* posterior, *b* side, *c* inner view (a processus of the squamosal is to be seen between the mastoid and the auditory meatus).
12. — Left petrotympanic of *Con.* from Tegelen, posterior view; coll. B. M. (the squamosal process is lacking).
13. — Left petrotympanic, side view; coll. B. M.
14. — Left petrotympanic with squamosal process and occipital condyle; side view; coll. B. M.
15. — Right petrotympanic, same view. (The squamosal process shows two foramina on the same level.) Same specimen on fig. 8.
16. — Left petrotympanic, inner view; coll. J. C. M.
17. — Right petrotympanic, anterior view; coll. J. C. M. (A thread has been brought through the venous canal.)

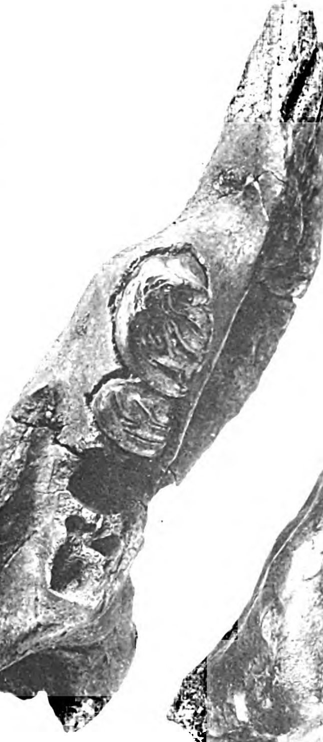
Explanation of the lettering in figs. 1, 2 and 3: *f. pt.* = fossa pterygoidea; *f. h.* = fossa hypophyseos; for the other letters, see the explanation of Pl. III.

Explanation of the lettering in figs. 11—17: *sq.* = squamosal; *p. a.* = porus acusticus; *m. a.* = meatus auditivus; *b. t.* = tympanic bulla; *c.* = condyle; *pr. m.* = processus mastoideus.

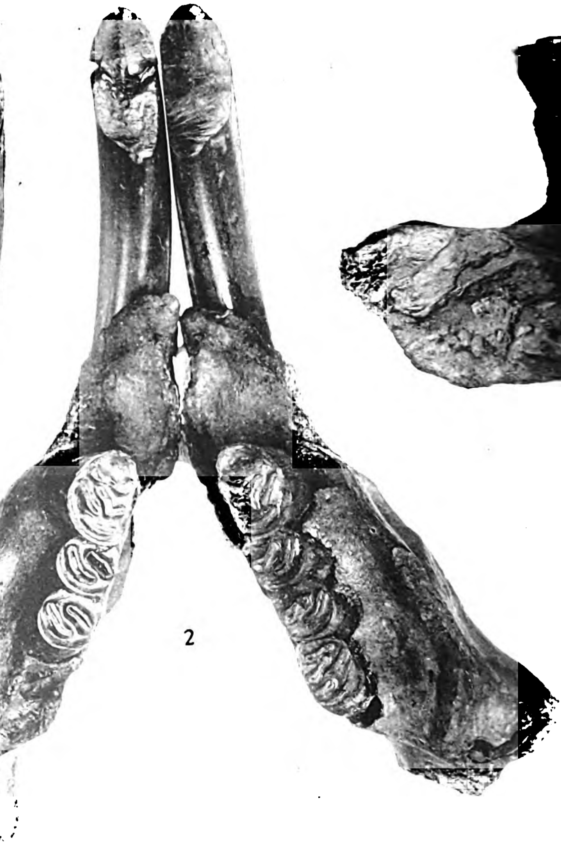
SCHREU



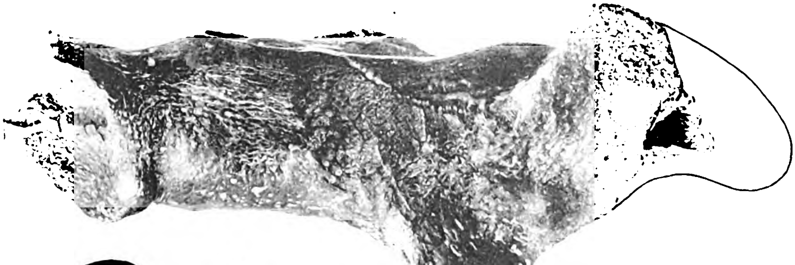
5*a*



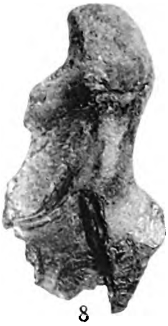
1



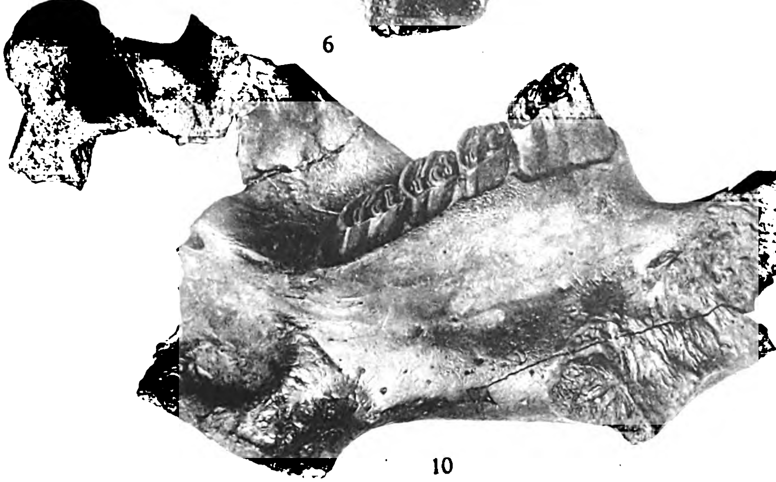
2



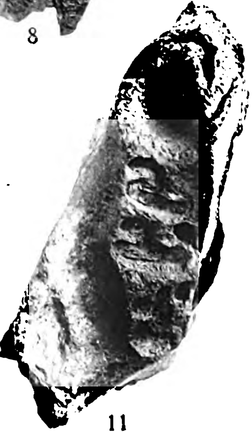
6



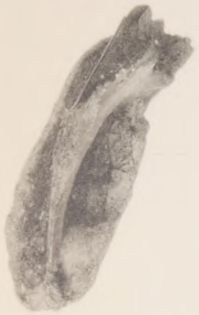
8



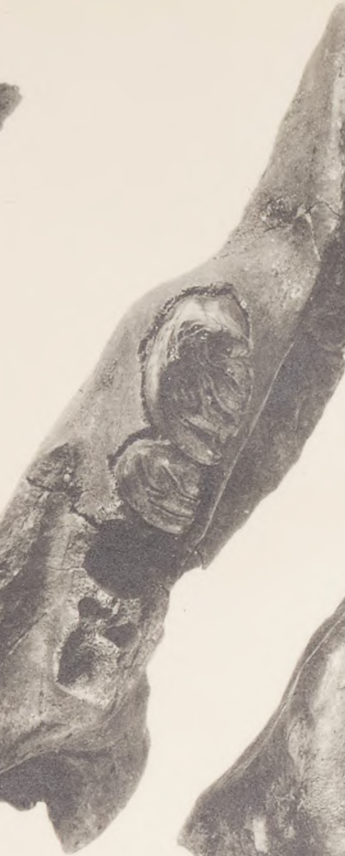
10



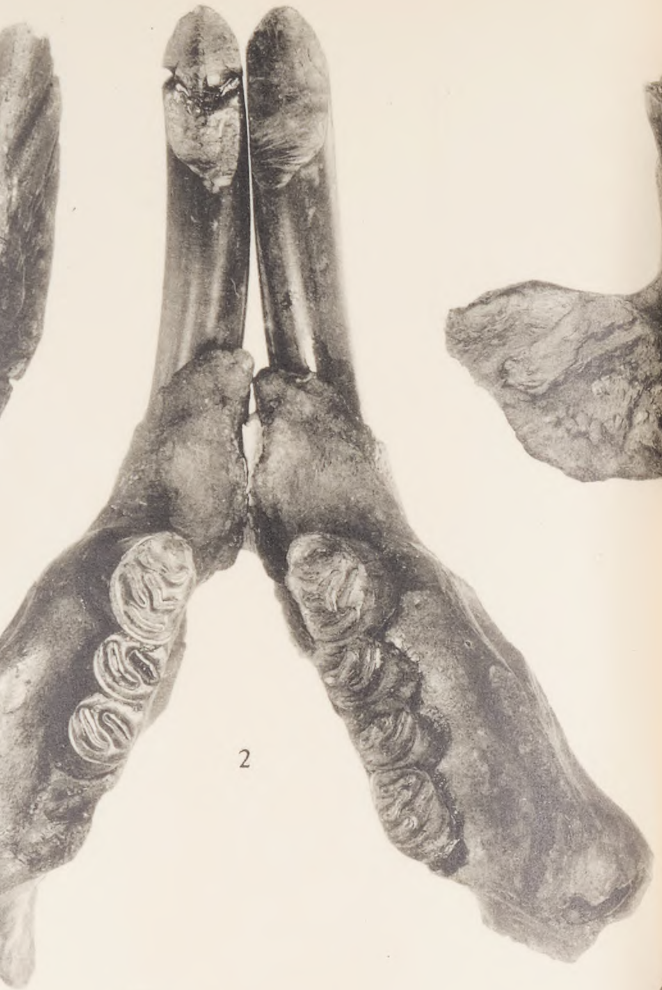
11



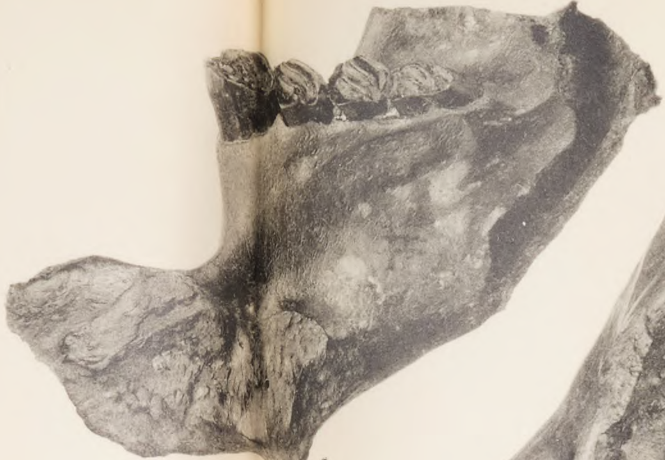
5*a*



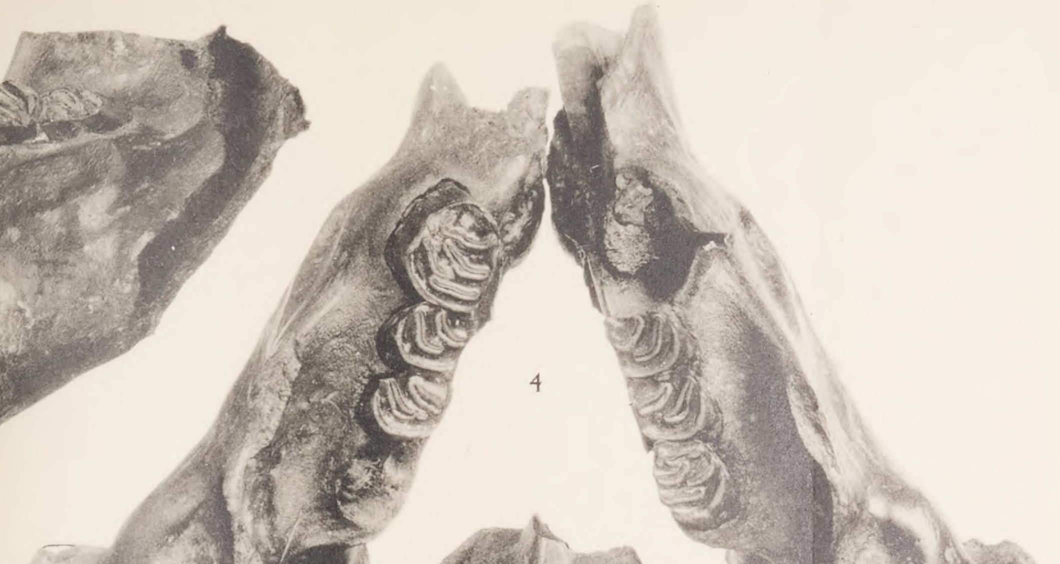
1



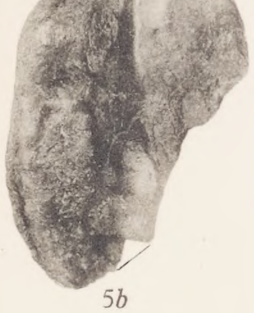
2



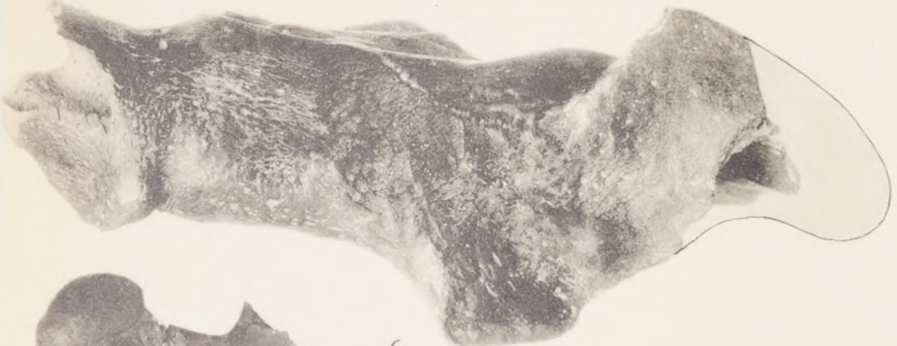
3



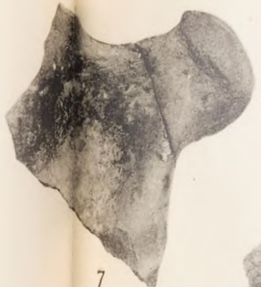
4



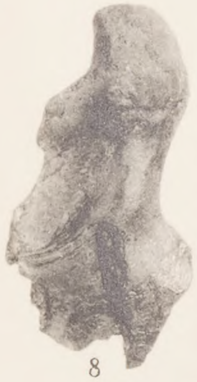
5*b*



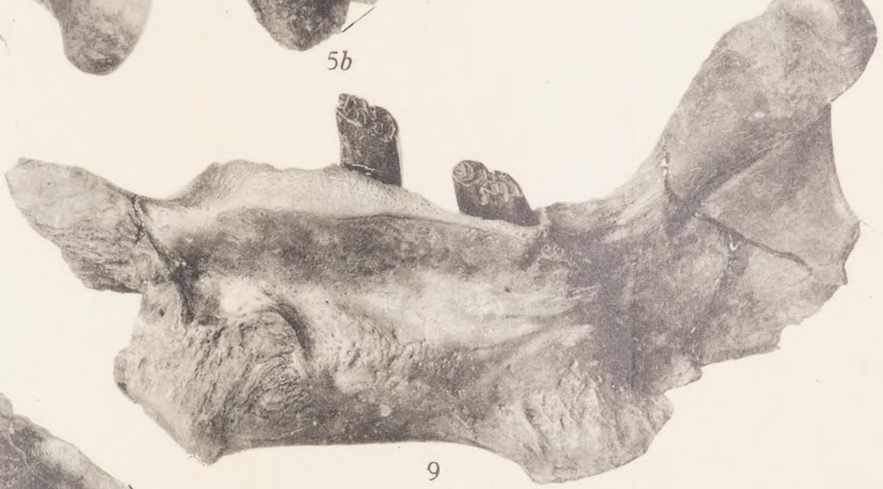
6



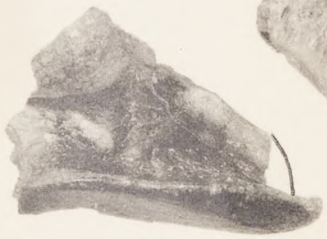
7



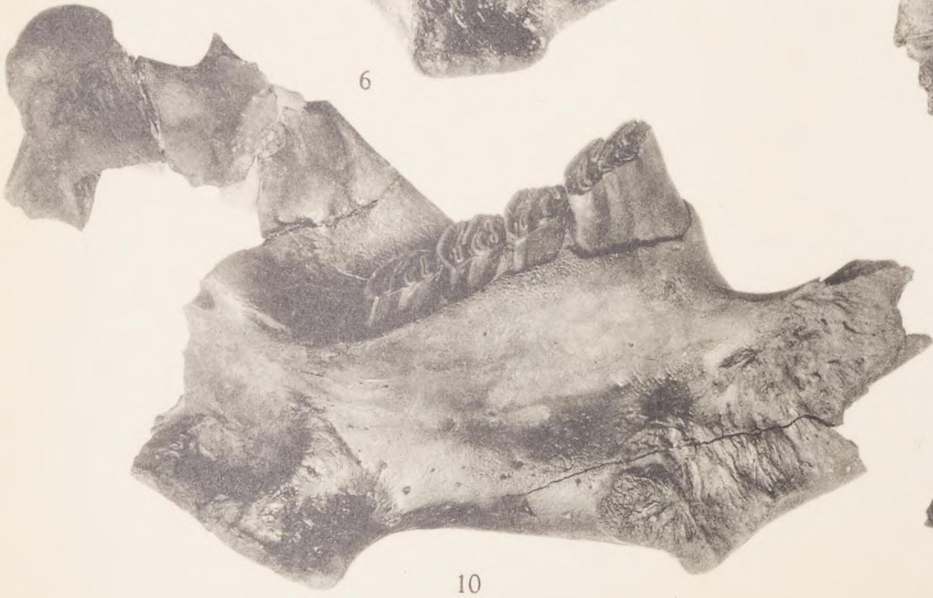
8



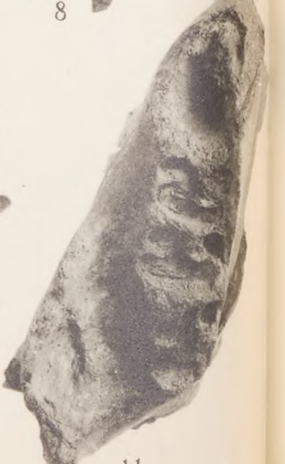
9



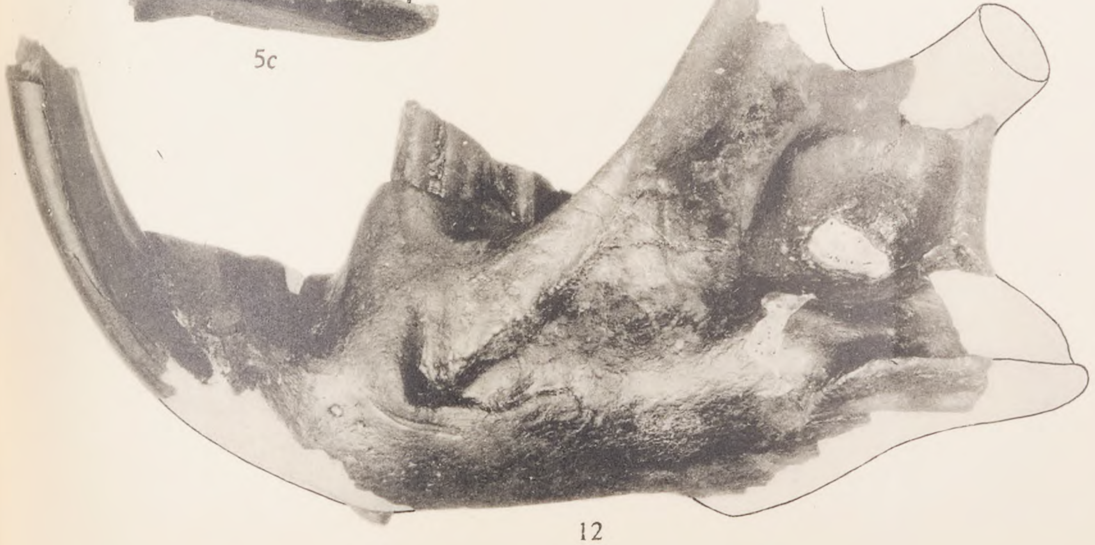
5*c*



10



11



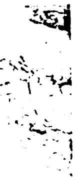
12

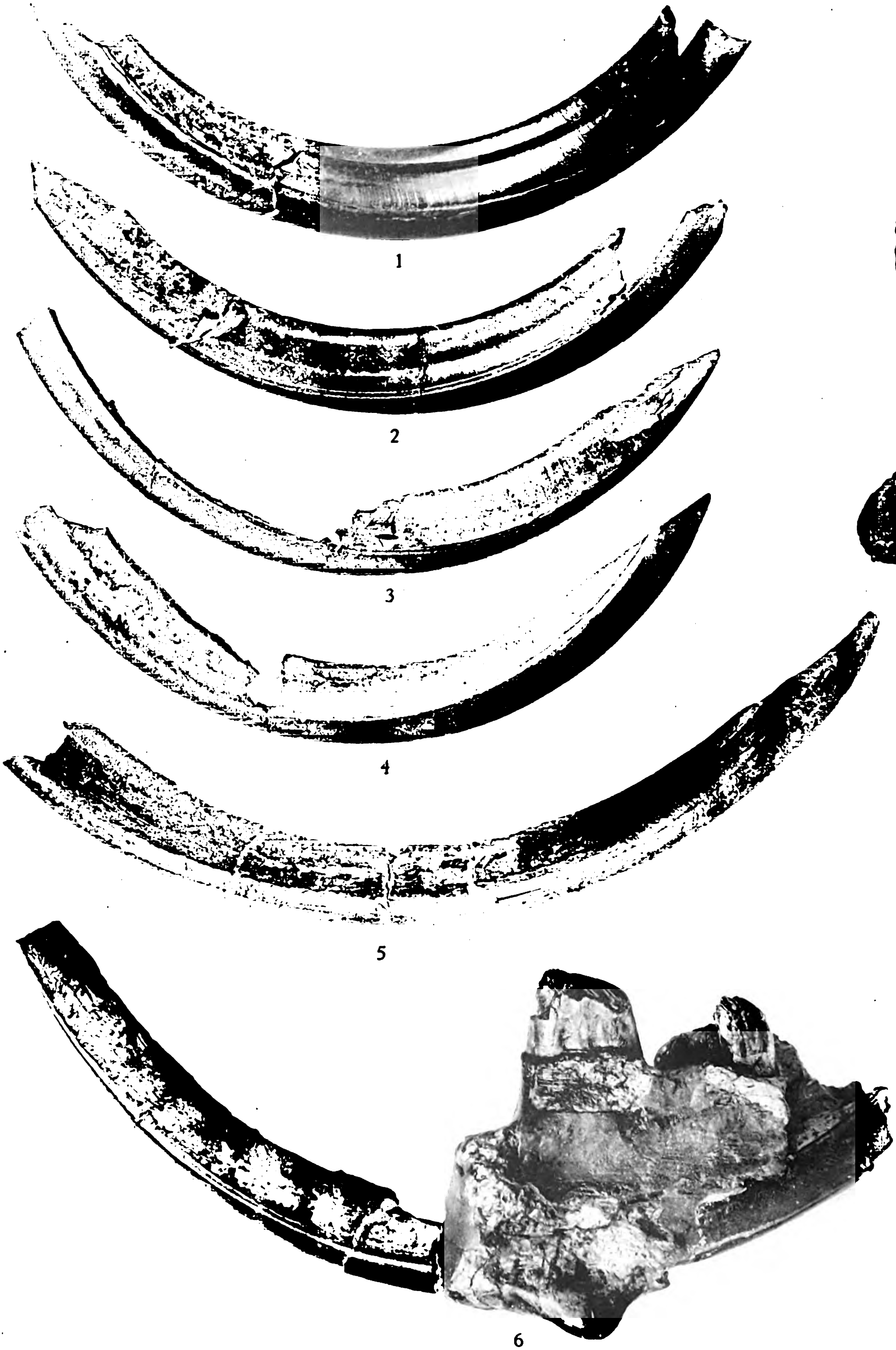
PLATE V

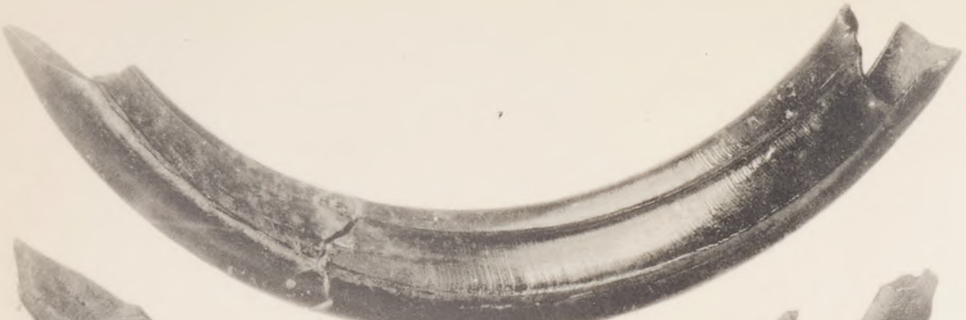
Fig. 1. — Left mandible of *Tr. c.* from Mosbach, crown view; coll. Mainz M.
2. — Lower jaw, crown view; coll. T. M.
3. — Right mandible, internal view; coll. T. M.
4. — Lower jaw, crown view; coll. T. M.
5. — Angle of left mandible; coll. B. M.; *a* seen from above and from the inner side, *b* same position as in fig. 4, *c* external view, same as in fig. 12.
6. — Left mandible of fig. 4, ventral view.
7. — Condyle of left mandible, external view; coll. S. M.
8. — Same part of *C. f.* from Tegelen; coll. U. M.
9. — Right mandible, inner view; coll. J. C. M.
10. — Left mandible, inner view; coll. J. C. M.
11. — Old left mandible, as seen from above; coll. U. M.
12. — Left mandible, external view; coll. T. M.

SCHI

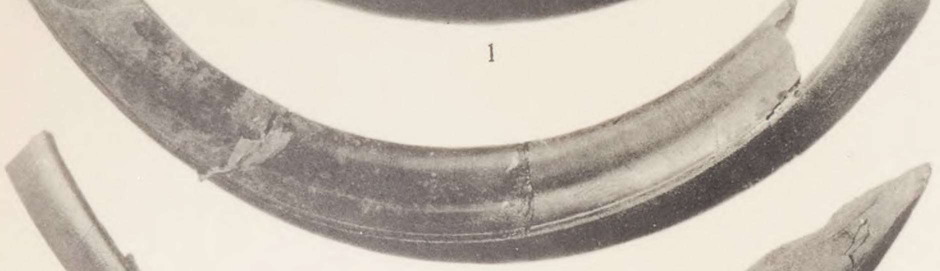
5a



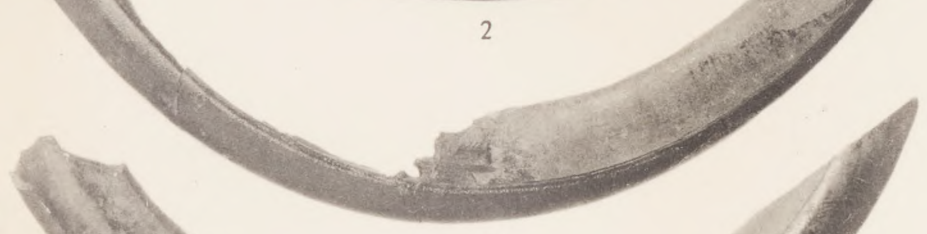

1
2
3
4
5
6



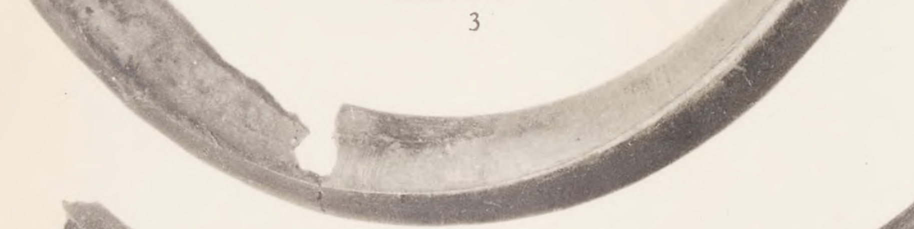
1



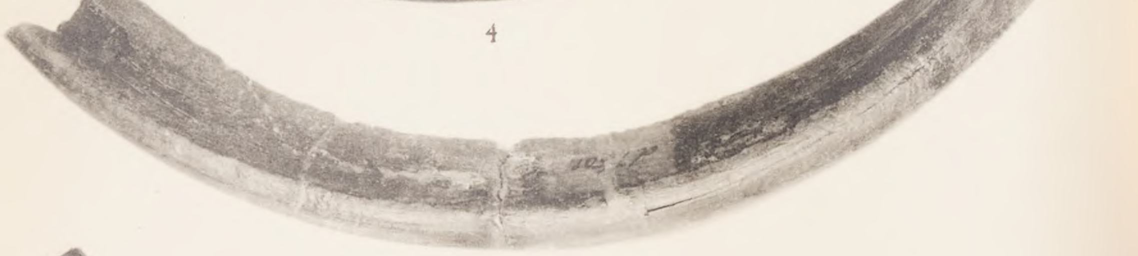
2



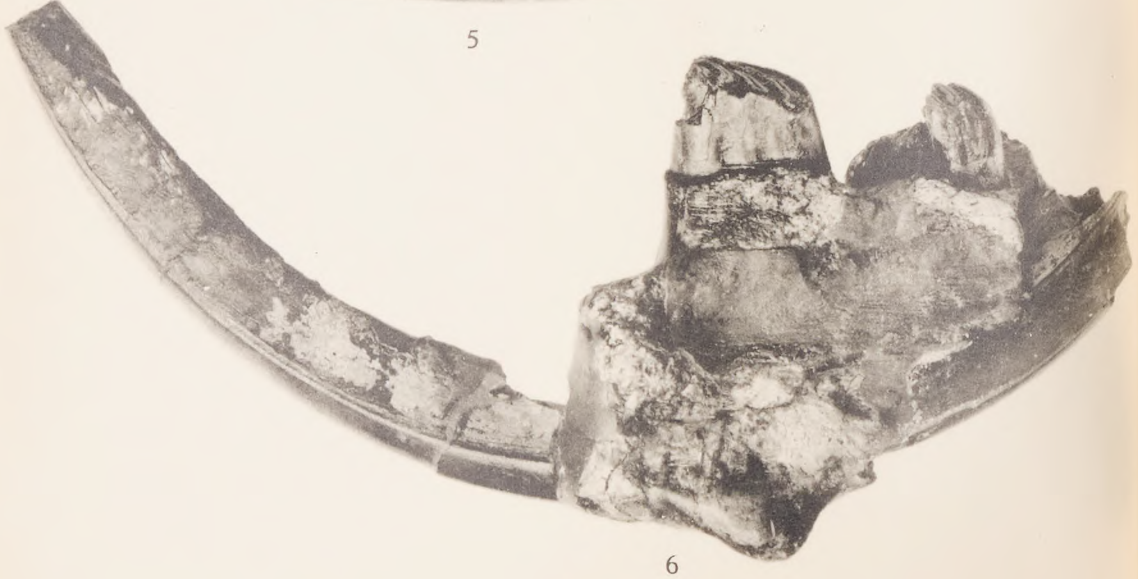
3



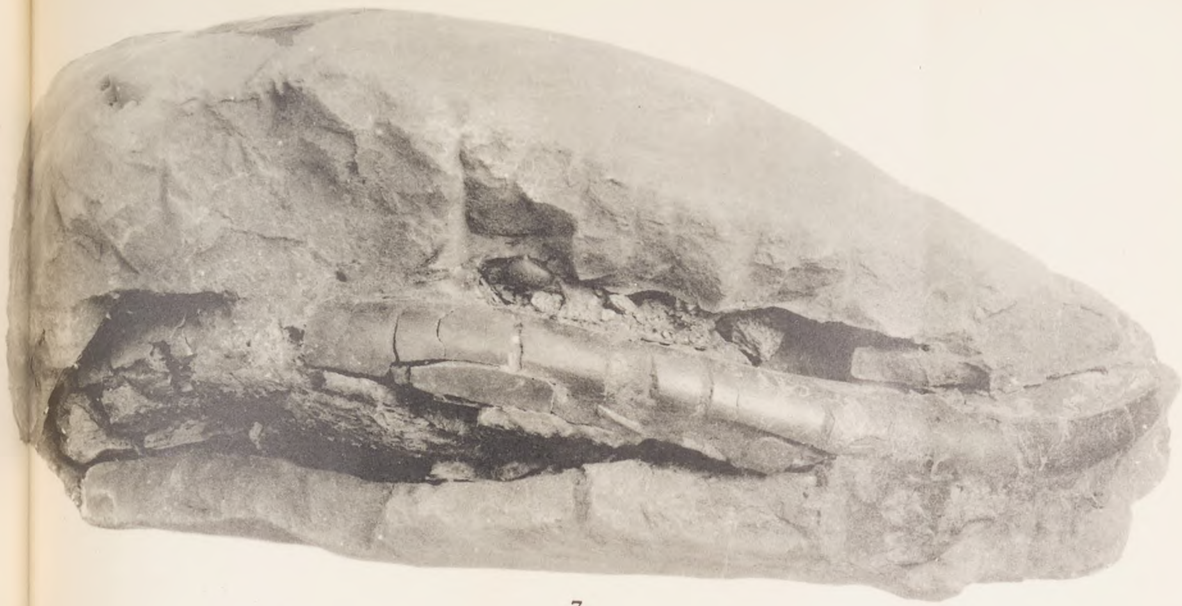
4



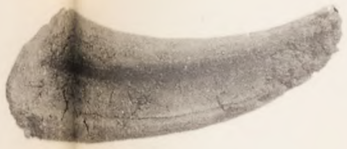
5



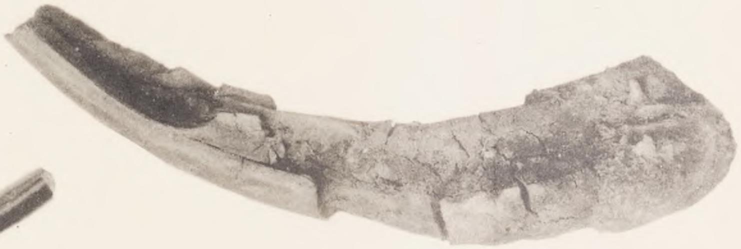
6



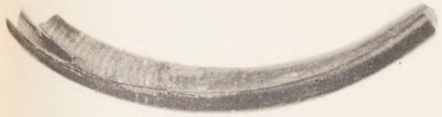
7



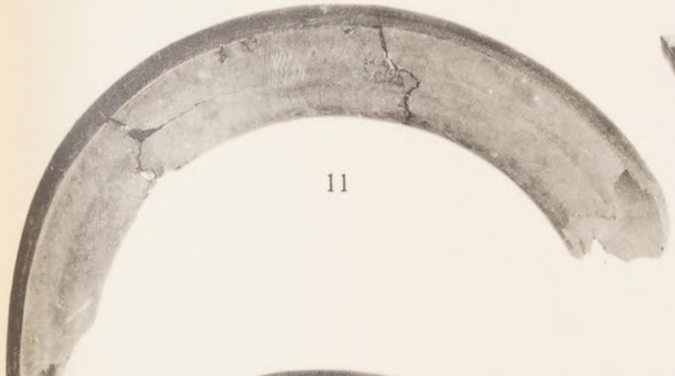
8



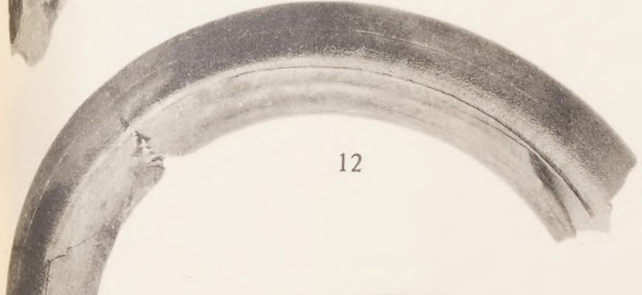
9



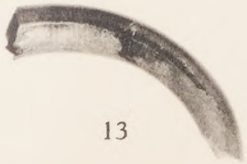
10



11

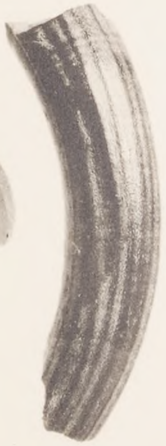


12

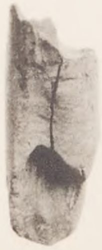


13

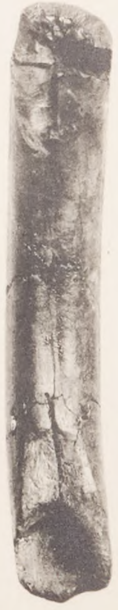
14



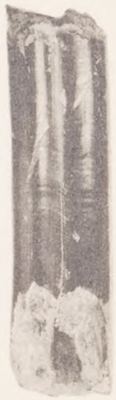
15



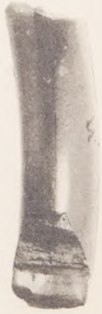
16



17



18



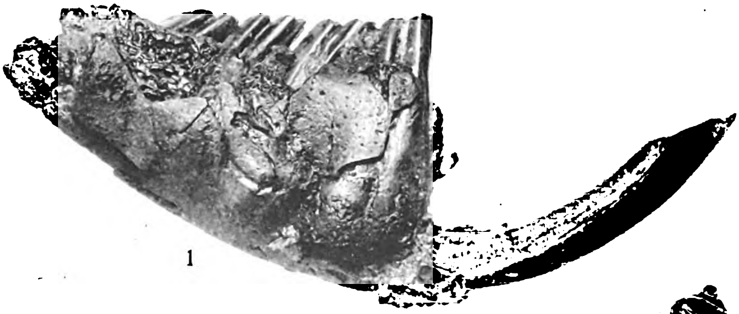
19

PLATE VI

Fig. 1. — Left lower incisor, external view; coll. S. M.
2. — Right lower incisor, internal view; coll. S. M.
(Above incisors belong to same jaw.)
3. — Left lower incisor, internal view; coll. J. C. M.
4. — Right lower incisor, external view; coll. J. C. M.
(Above incisors belong to same jaw.
5. — Right lower incisor of *Tr. c.* from Mosbach; coll. B. M.
6. — Part of right mandible of same species, internal view; coll. B. M.
7. — Left lower incisor (seen from below) in concretion of clay ironstone; coll. B. M.
8. — Cast of pulp cavity of left lower incisor, internal view; coll. B. M.
9. — The same of right lower incisor; coll. B. M. (Part of the tooth has been preserved round the anterior end.)
10. — Right lower incisor of very young juvenal, external view; coll. J. C. M.
11. — Right upper incisor, internal view; coll. J. C. M.
12. — Left upper incisor, external view; coll. J. C. M.
(Above incisors belong to same jaw.)
13. — Right upper incisor of very young individual, external view; coll. J. C. M.
14. — Point of left dito; coll. J. C. M.
15. — Anterior part of right upper incisor, dorso-external view; coll. B. M.
16. — Point of right dito; ventral view; coll. B. M.
17. — Right upper incisor, ventral view; coll. T. M.
18. — Part of upper incisor of *Tr. c.* from Jockgrim, ventral view; coll. Stuttgart M.
19. — Anterior part of left upper incisor of *C. f.* from Tegelen, ventral view; coll. U. M.

SCHREUDER · Con

Archives



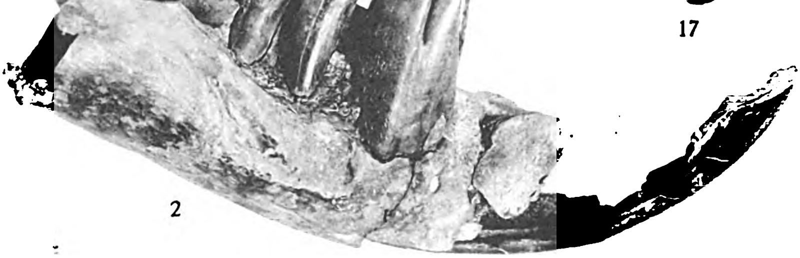
1

a

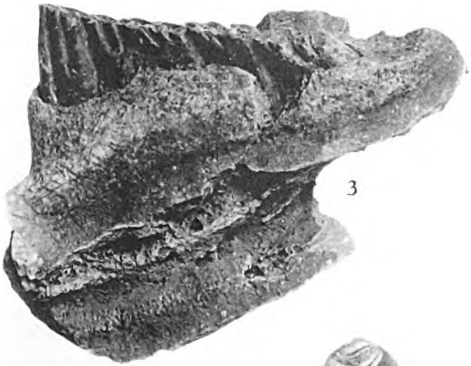
b.

17

18



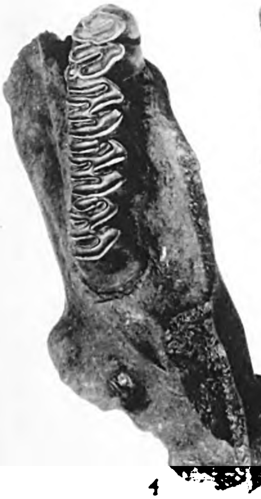
2



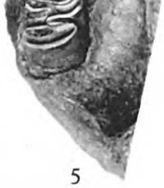
3

29

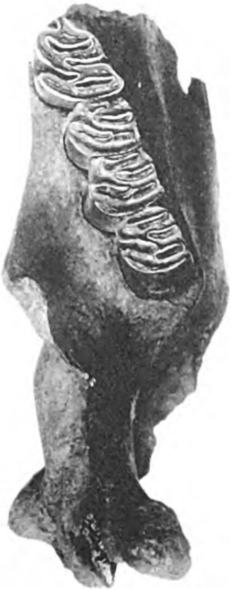
30



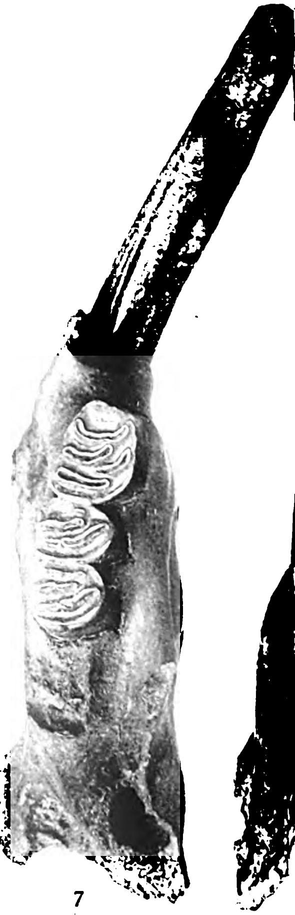
4



5

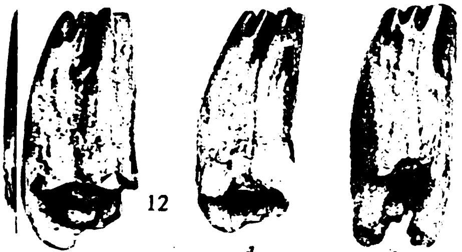


6

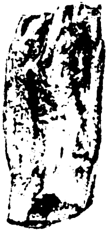


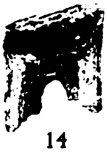
7

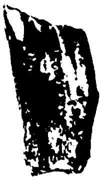
Plate VI

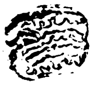

12

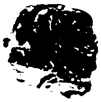
c d e

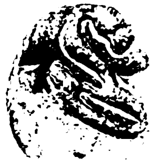

13

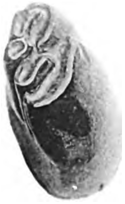

14

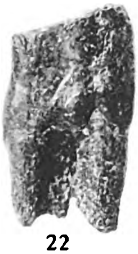

15

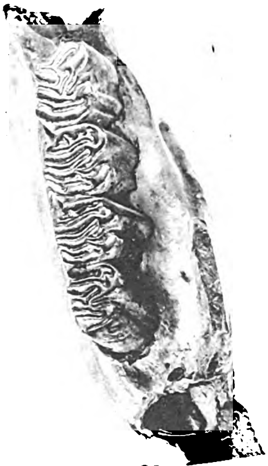

16

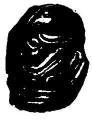

19

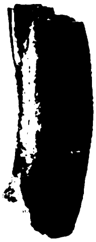

20

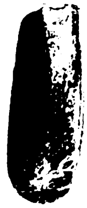

21

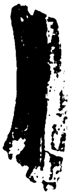

22

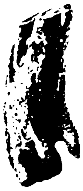

23

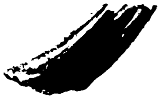

24

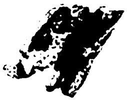

25

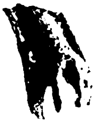

26

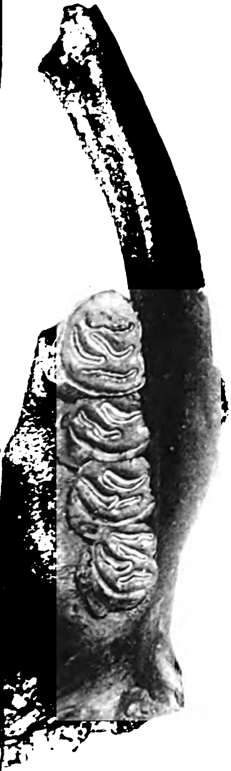

27

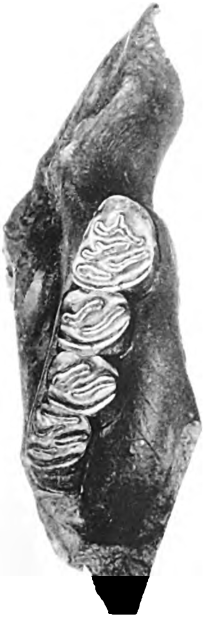

28

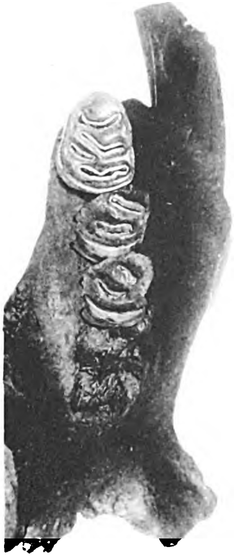

31


32


33


8


9


10

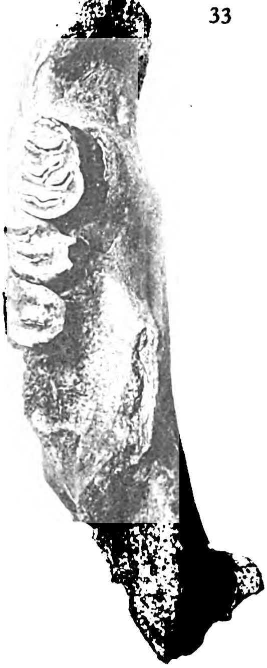
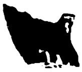
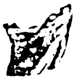

11

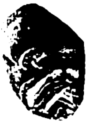
PLATE VII

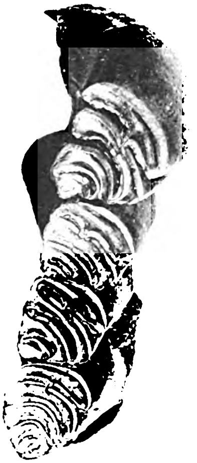
Fig. 1. — Right mandible of juvenal, external view; coll. T. M.
2. — Same bone, somewhat older; external view; coll. M. M.
3. — Right mandible of juvenile *Tr. c.* from Mosbach, internal view; coll. Senck. M.
4. — Right mandible of juvenal, crown view; coll. T. M.
5. — Same bone, somewhat older; coll. J. C. M.
6. — Left mandible, still older; crown view; coll. J. C. M.
7. — Right mandible, still older; coll. T. M.
8. — Left mandible, still older; coll. S. M.
9. — Right mandible, still older; coll. T. M. (Same specimen is figured on Pl. V, fig. 3.)
10. — Left mandible of an old animal; coll. S. M.
11. — Right mandible of very old animal; coll. S. M.
12. — Left lower premolars in 5 successive stages of growth, internal view; *a*, *c*, *d* in coll. B. M., *b*, *e* in coll. J. C. M.
13. — Young left p_4, internal view; coll. J. C. M.
14. — Old left dito, internal view; coll. J. C. M.
15. — Right p_4 of *C. f.* from Taubach, internal view; coll. B. M.
16. — Right lower molar (m_1 or m_2) of *C. f.* from Tegelen; crown view; coll. J. C. M.
17. — Left p_4, crown view; coll. M. M.
18. — Anterior portion of left p_4 of *Tr. c.* from Jockgrim, crown view; coll. München M.
19. — Posterior portion of dito.
20. — Left p_4 of juvenile *Tr. c.* from Mosbach, crown view, 1½ × nat. size; coll. B. M.
21. — Right p_4 of juvenal, crown view, 1½ × nat. size; coll. M. M.
22. — Right p_4 of *Tr. c.* from Mosbach, internal view; coll. B. M.
23. — Right mandible of *C. f.* from Tegelen, crown view; coll. U. M.
24. — Right p_4, crown view; coll. M. M.
25. — Left m_1 of juvenal, posterio-external view, coll. B. M.
26. — Right m_2, anterior view; coll. M. M.
27. — Dito, internal view; coll. M. M.
28. — Dito, antero-external view; coll. B. M.
29. — Left m_1, posterior view; coll. M. M.
20. — Left m_2, same view; coll. M. M.
31. — Left m_3 of juvenal, internal view; coll. B. M.
32. — Right m_3, external view; coll. B. M.
33. — Left m_2, same view; coll. M. M.

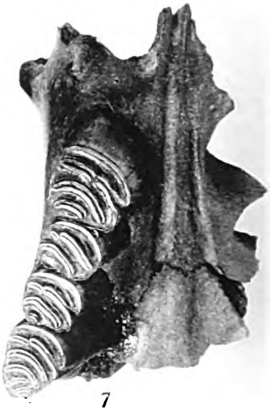
SCHREUDER: *Conodontes and Castor from the Teglian Clay*

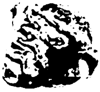

1*a*

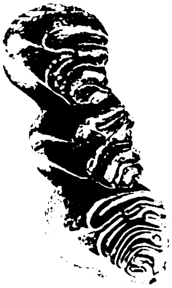

1*b*

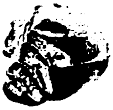

1*c*

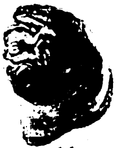

6

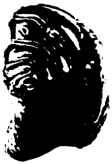

7

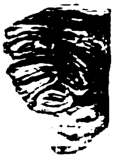

2

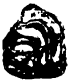

5

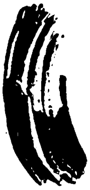

3

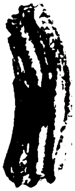

11

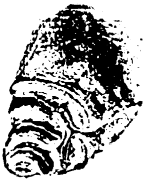

12

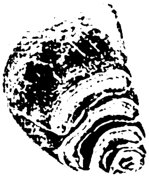

13

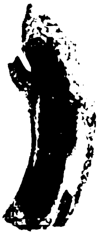

4

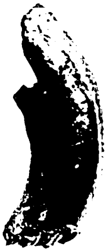

23*a*

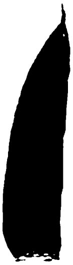

23*b*

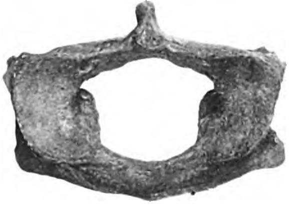

24

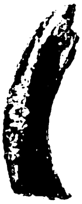

25

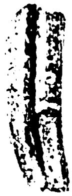

26

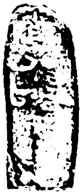

27

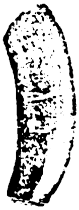

28

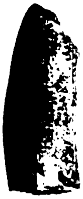

44*a*

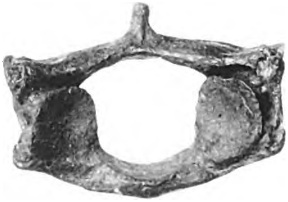

35

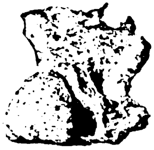

36

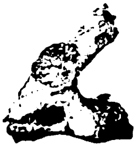

37

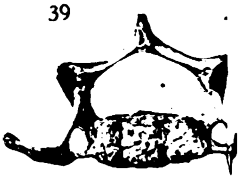

38

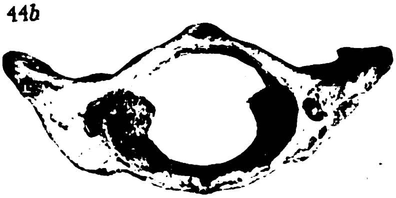

39

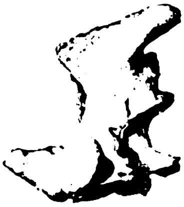

44*b*

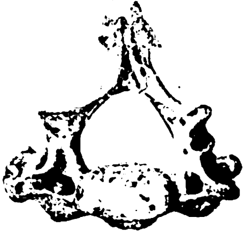

46*a*


46*b*


49*a*


45


47*a*


47*b*

48*a*

Plate VIII

1*a*

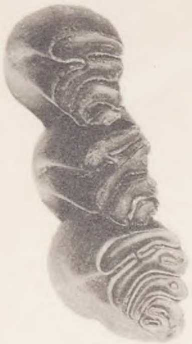
1*b*

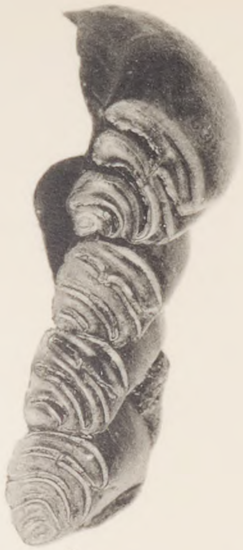
1*c*

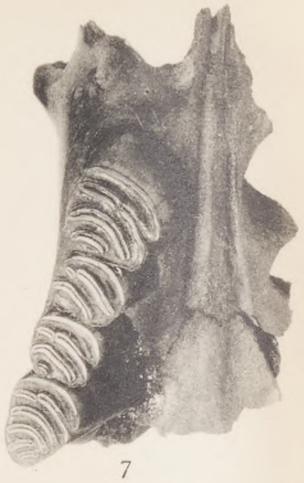
2

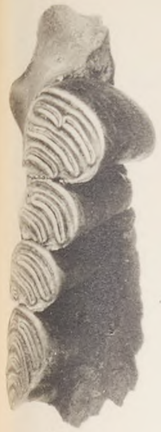
3

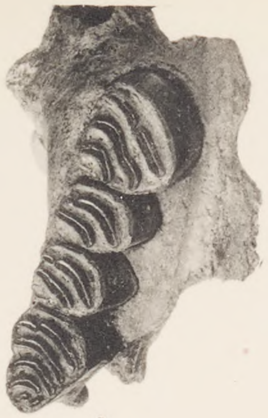
4

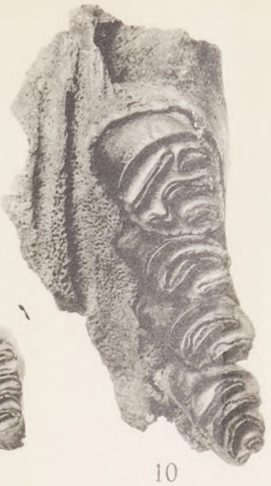

5


6


7


8


9


10

18

22

21

11

12

13

14

15

16

17

19

20

23*a*

23*b*

24

25

26

27

28

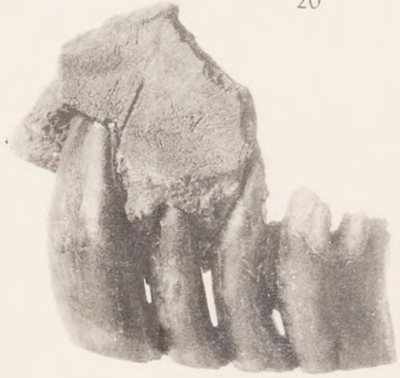
29

30

31

32

33


34

44*a*

35

36

37

38

39

40

41

42

43

53

44*b*

46*a*

46*b*

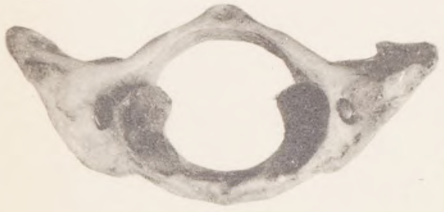
49*a*

49*b*

50

52

55


45

47*a*

47*b*

48*a*

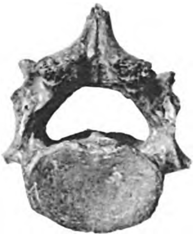
48*b*

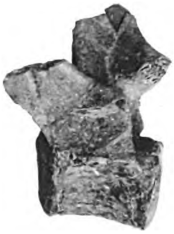
51

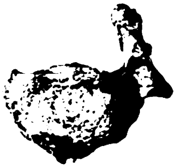
54*a*

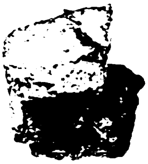
54*b*

Heliotype L. van Leer & Co.

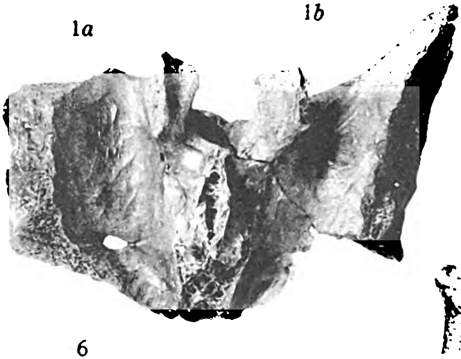

1*a*

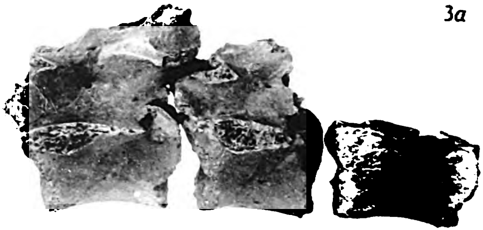

1*b*

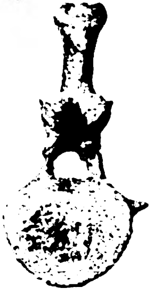

2*a*

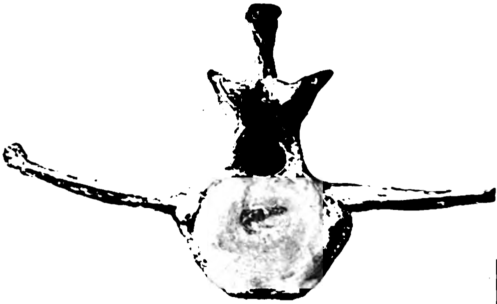

2*b*

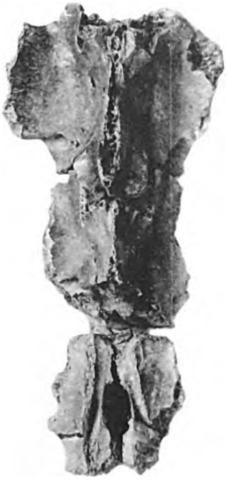
3*a*

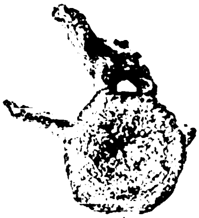

6

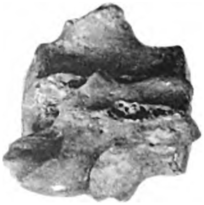

7

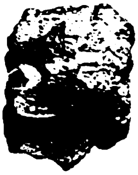

10*a*

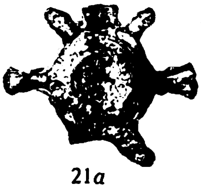

11

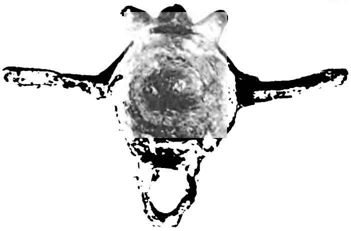


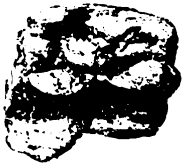

13


14*b*

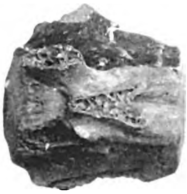

16*a*

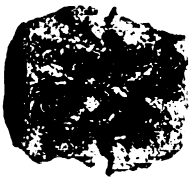

21*a*

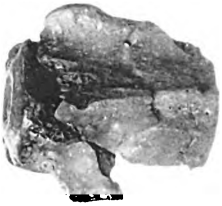

22

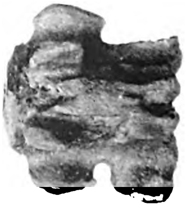

21*b*

23

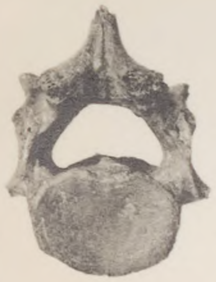

18*b*

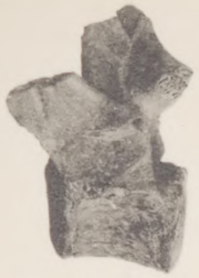

19

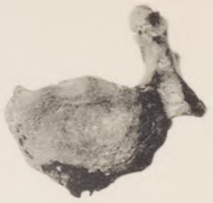

20*b*

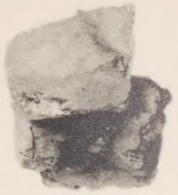

21*c*

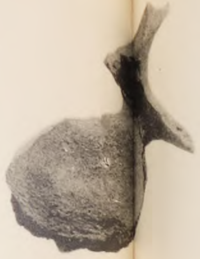
2

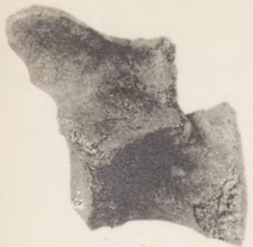

1*a*

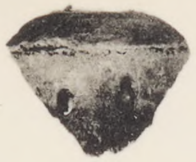

1*b*

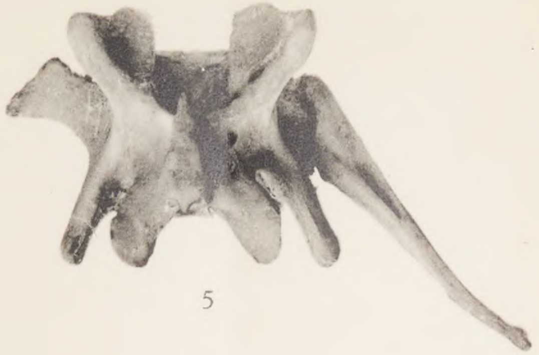

2*a*

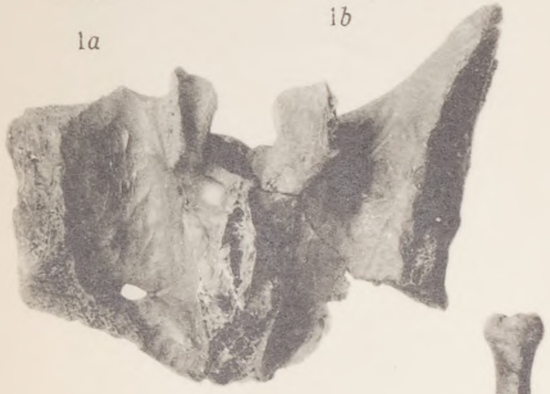

2*b*

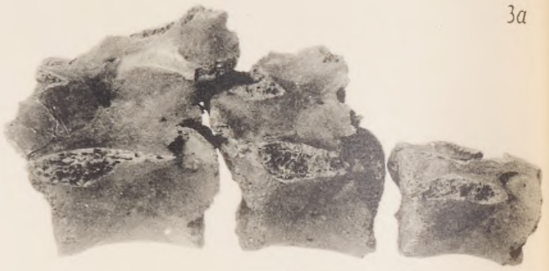

3*a*

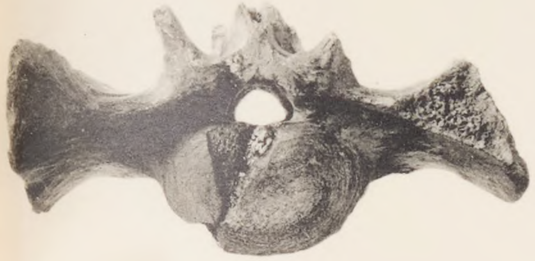

3*b*

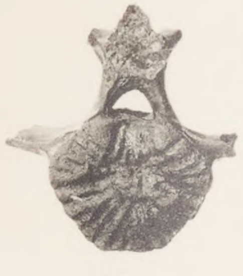

4

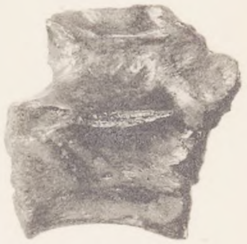

5

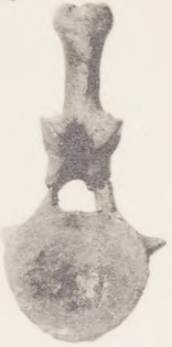

6

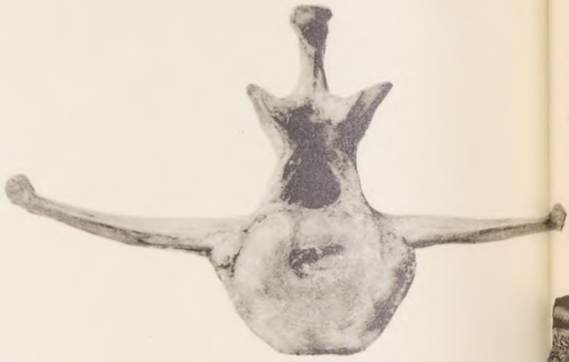

7

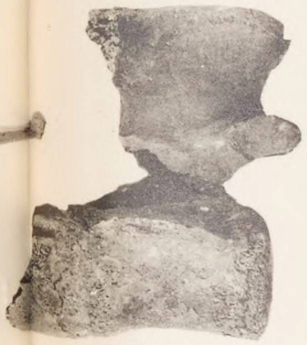

8

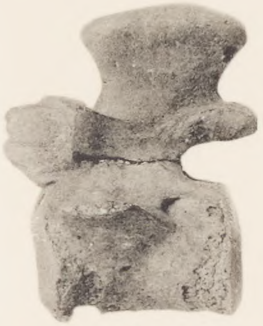

9*a*

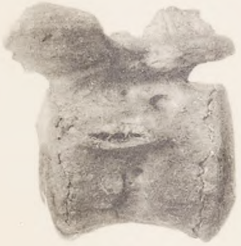

9*b*

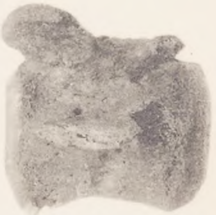

10*a*

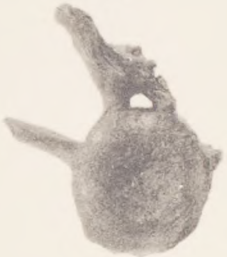

11

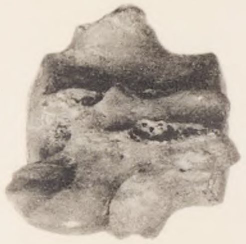

10*b*

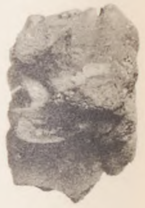

12

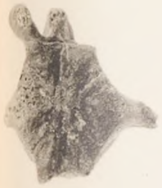

14*a*

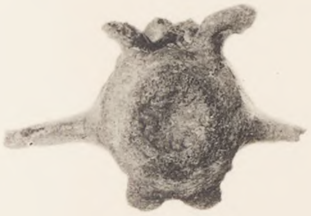

15

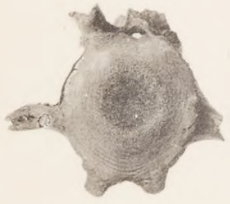

13

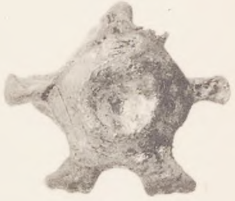

14*b*

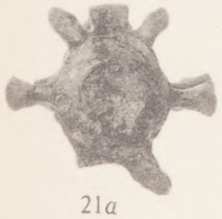

16*a*

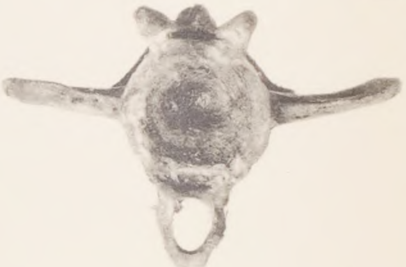

16*b*

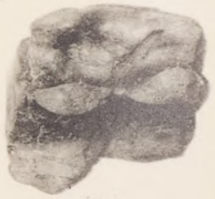

17

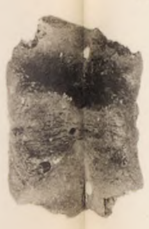

18*a*

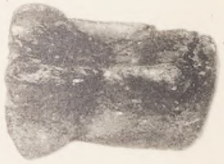

20*a*

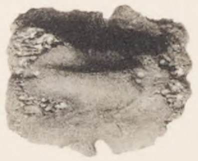

21*a*

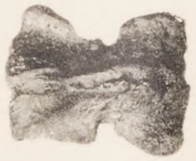

22

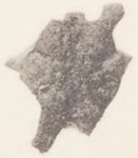

21*b*

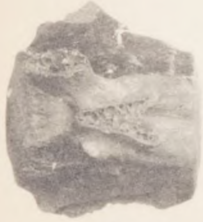

23*a*

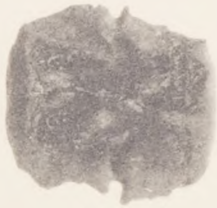

24*a*

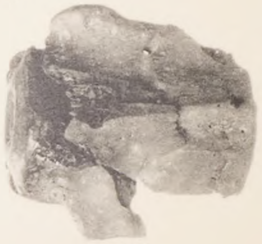

28

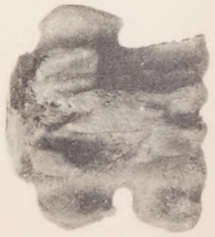

29

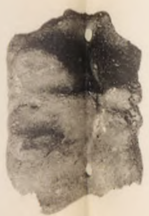

27*a*

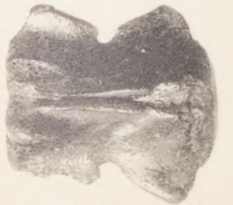

18*b*

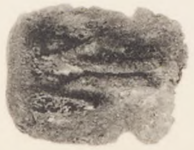

19

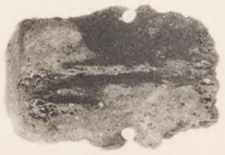

20*b*


21*c*


23*b*


24*b*


25


26

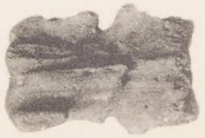
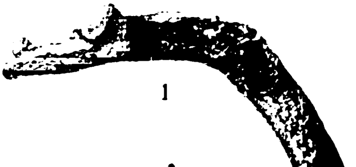

27*b*

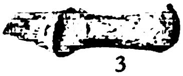
PLATE IX

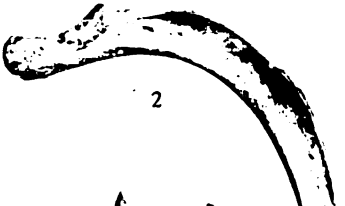
FIG. 1. — First(?) lumbar; coll. T. M.; *a* posterior, *b* left side view.
2. — Third(?) lumbar; coll. B. M.; *a* anterior, *b* left side view.
3. — Last(?) lumbar; coll. B. M.; *a* anterior, *b* left side view.
4. — Last(?) lumbar; ventral view; coll. J. C. M.
5. — First lumbar of *C. f.*; dorsal view.
6. — Incomplete sacrum, dorsal view; coll. M. M.
7. — Three posterior sacrals of fig. 6, left side.
8. — First sacral of fig. 6, anterior view.
9. — Last sacral; coll. J. C. M.; *a* posterior, *b* right side view.
10. — Last sacral; coll. B. M.; *a* posterior, *b* left side view. (Part of coalesced centrum can be seen of the last but one.)
11. — Last sacral of *C. f.*, posterior view.
12. — First caudal, left side; coll. B. M.
13. — Second(?) caudal, anterior view; coll. T. M.
14. — Third(?) caudal; coll. B. M.; *a* left side, *b* dorsal view.
15. — Fourth(?) caudal, left side; coll. T. M.
16. — Fifth(?) caudal; coll. B. M.; *a* dorsal, *b* anterior view.
17. — Fifth(?) caudal, anterior view; coll. T. M.
18. — Sixth(?), caudal; coll. B. M.; *a* anterior, *b* dorsal view.
19. — Seventh(?) caudal, dorsal view; coll. T. M.
20. — Eighth(?) caudal; coll. B. M.; *a* anterior, *b* dorsal view.
21. — Ninth(?) caudal; coll. B. M.; a anterior, *b* left side, *c* dorsal view.
22. — Ninth caudal of *C. f.*, anterior view.
23. — Thirteenth(?) caudal; coll. T. M.; *a* ventral, *b* dorsal view.
24. — Fourteenth(?) caudal; *a* left side, *b* dorsal view; coll. J. C. M.
25. — Tenth(?) caudal, dorsal view; coll. T. M.
26. — Anterior part of eleventh(?) caudal, dorsal view; coll. T. M.
27. — Twelfth(?) caudal; *a* anterior, *b* dorsal view; coll. B. M.
28. — Thirteenth(?) caudal, dorsal view; coll. B. M.
29. — Fifteenth(?) caudal, dorsal view; coll. T. M.

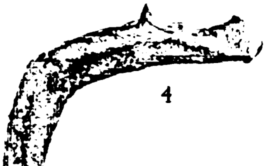
SC

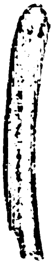
SCHREUDER: *Conodontes and Castor from the Teglian Clay*

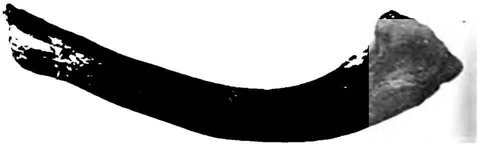

1


3

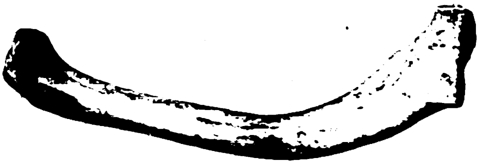

2

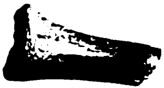

4

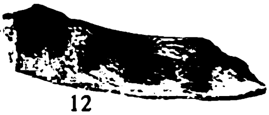

5

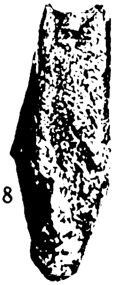

9

1

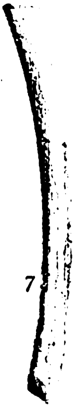

10

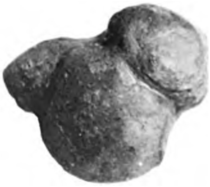

11

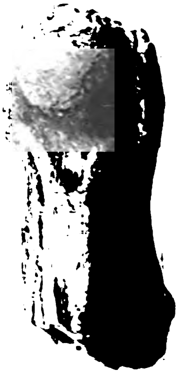

12

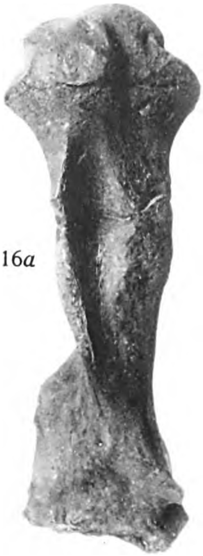

8

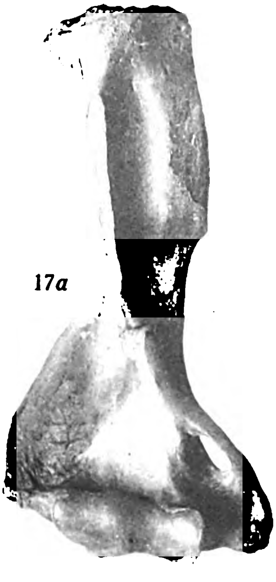
6

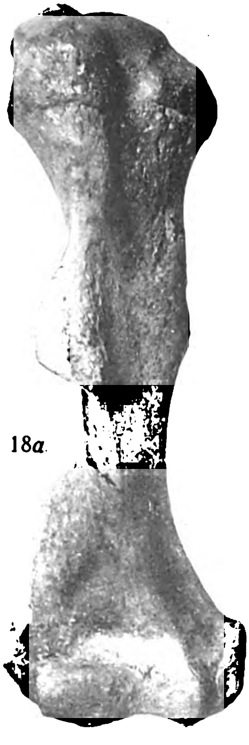

7

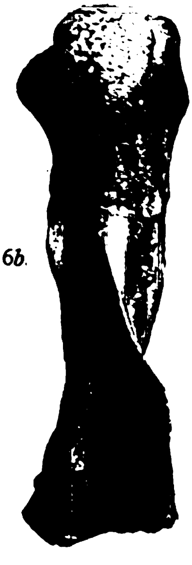

18*c*

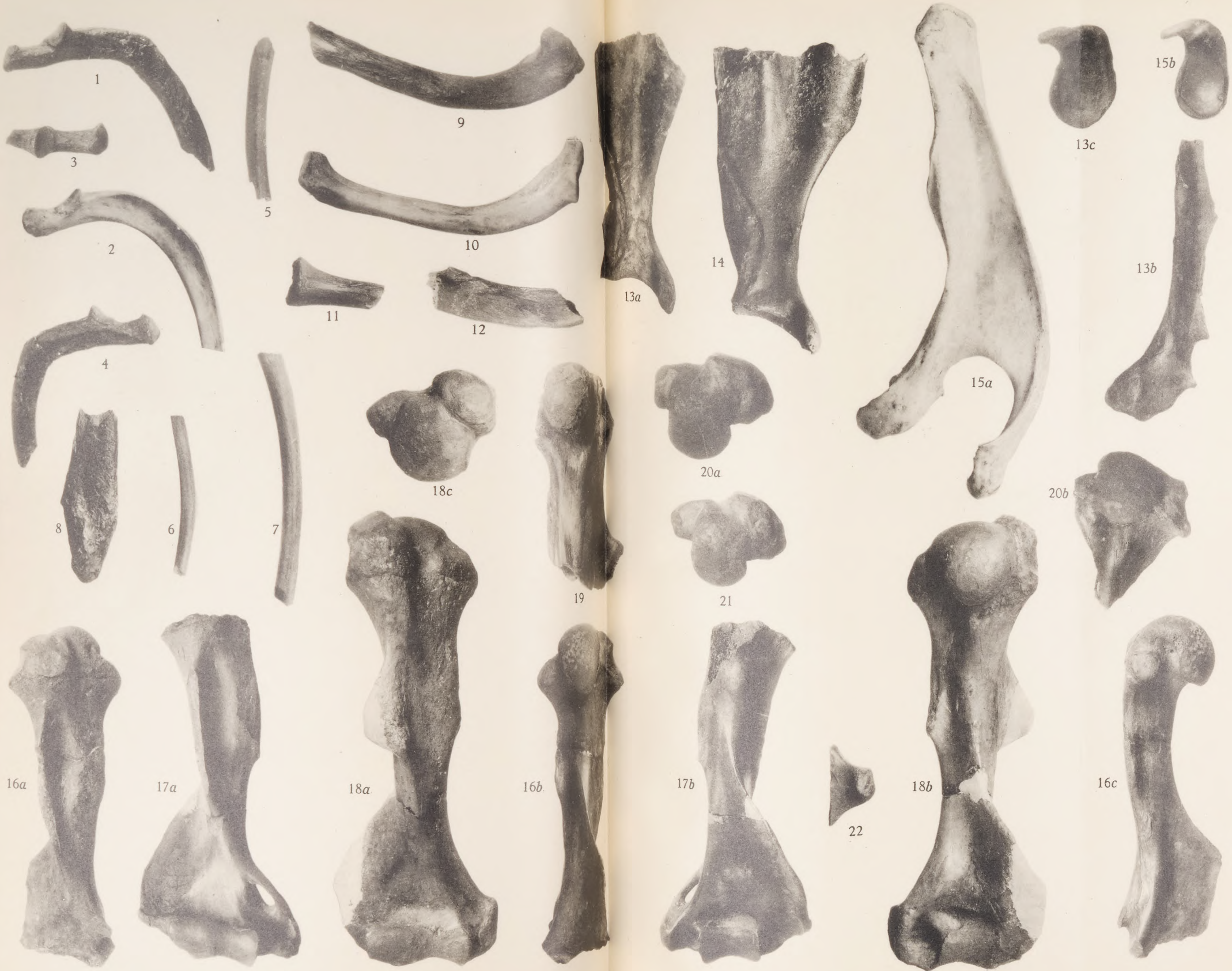

19


16*a*


17*a*


18*a*


16*b*


1
3
2
4
5
9
10
11
12
8
6
7
18c
19
13a
14
15a
13c
15b
13b
20a
20b
21
16a
17a
18a
16b
17b
22
18b
16c

Heliotype L. van Leer & Co.

PLATE X

FIG. 1. — Dorsal part of right fourth(?) rib, posterior view; coll. T. M.

2. — Same part of right fourth rib of *C. f.*

3. — Dorsal extremity of fifth(?) rib, dorsal view, coll. B. M.

4. — Dorsal part of right fourth(?) rib, anterior view; same specimen is figured on fig. 1.

5. — Part of rib; coll. B. M.

6, 7. — Parts of ribs; coll. M. M.

8. — Part of sternum(?); coll. B. M.

9. — Part of right clavicle, posterior view; coll. T. M.

10. — Right clavicle of *C. f.*, same view.

11. — Sternal extremity of right clavicle of *Tr. c.* from Jockgrim, same view; coll. Munich M.

12. — Part of left clavicle, same view; coll. B. M.

13. — Part of left scapula; *a* internal, *b* dorsal view, *c* glenoid cavity; coll. T. M.

14. — Same part of left scapula of *C. f.* from Mosbach, internal view; coll. Mainz M.

15. — Left scapula of *C. f.*; *a* dorsal view, *b* glenoid cavity.

16. — Right humerus; *a* anterior, *b* posterior, *c* medio-posterior view; coll. T. M.

17. — Right humerus; *a* anterior, *b* posterior view; coll. M. M.

18. — Left humerus (reversed) of *C. f.* from Tegelen; *a* anterior, *b* posterior, *c* proximal view; coll. U. M.

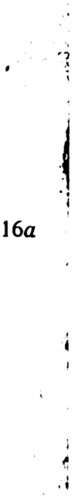
19. — Proximal half of right humerus of *Tr. c.* from Jockgrim, posterior view; coll. Prof. Freudenberg.

20. — Proximal extremity of right humerus; *a* proximal, *b* posterior view; coll. T. M.

21. — Proximal end of right humerus, proximal view; coll. J. C. M.

22. — Tuberositas deltoidea of a right humerus, posterior view; coll. B. M.

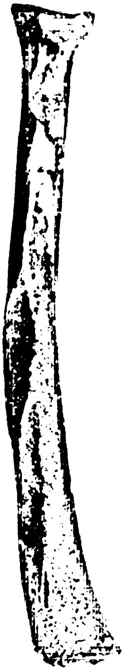
SCHREU

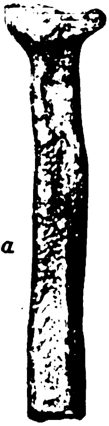


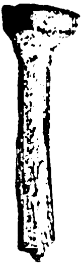
16*a*

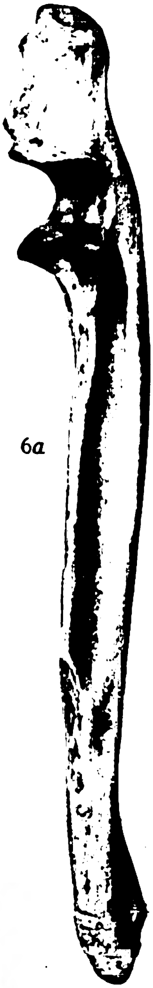
Archives

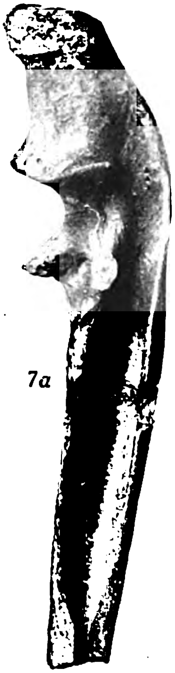
1

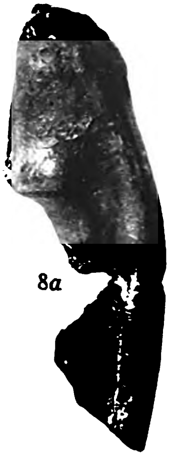

2

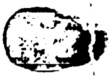

3a


4

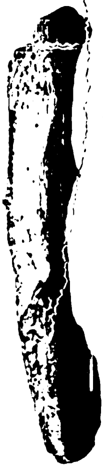

6a

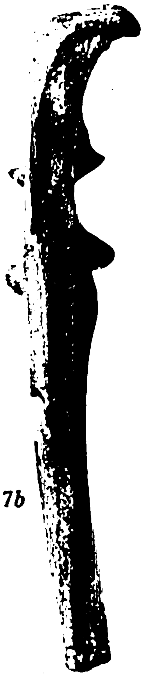

7a

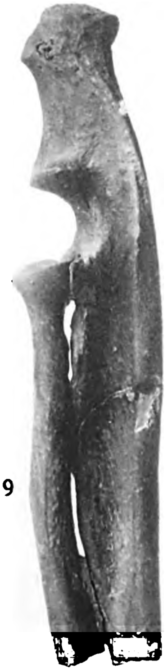

8a

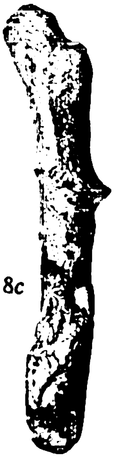

3b

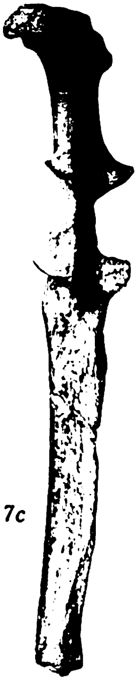
5

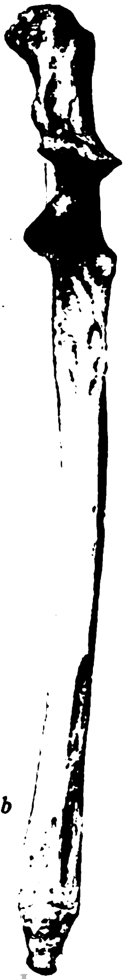

8b


7b


9


8c


7c


6b

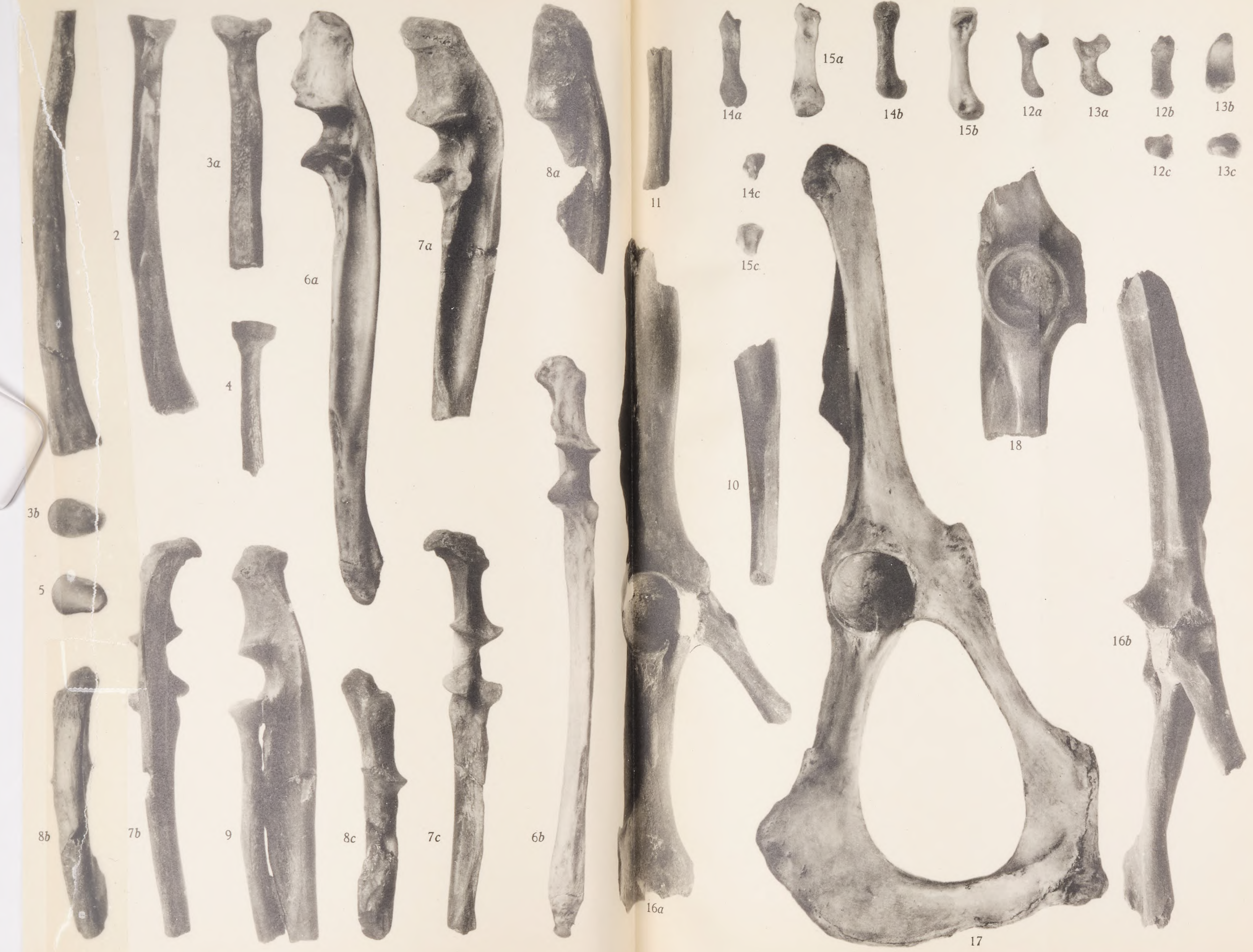

1
2
3a
3b
4
5
6a
7a
8a
8b
7b
9
8c
7c
6b
11
14a
15a
14b
15b
12a
13a
12b
13b
12c
13c
14c
15c
10
18
16a
17
16b

PLATE XI

Fig. 1. — Left radius (epiphyses wanting), externo-posterior view; coll. B. M.
2. — Left radius (distal epiphysis wanting) of *C. f.* from Stritberg; same view; coll. B. M.
3. — Proximal half of left radius; *a* posterior, *b* proximal view; coll. B. M.
4. — Proximal end of right radius, external view; coll. T. M.
5. — Left radius of *C. f.*, proximal view.
6. — Left ulna of *C. f.*; *a* external, *b* anterior view.
7. — Proximal half of left ulna; *a* external, *b* posterior, *c* anterior view; coll. B. M.
8. — Proximal end (injured in the middle) of left ulna of *C. f.* from Tegelen; coll. U. M.; lettering same as 7.
9. — Radius and ulna of figures 3 and 7; external view.
10. — Part of right ulna; external view; coll. M. M.
11. — Part of right ulna; external view; coll. T. M.
12. — Right pisiform; *a* anterior, *b* internal, *c* dorsal view; coll. T. M.
13. — Same bone of *C. f.*; lettering same as 12.
14. — Right metacarpal III; *a* dorsal, *b* internal, *c* proximal view; coll. T. M.
15. — Same bone of *C. f.*; lettering same as 14.
16. — Part of right innominate bone; *a* external, *b* ventral view; coll. B. M.
17. — Right innominate bone of *C. f.*; external view.
18. — Part of right innominate bone; external view; coll. J. C. M.

SCHREUDER.

3b

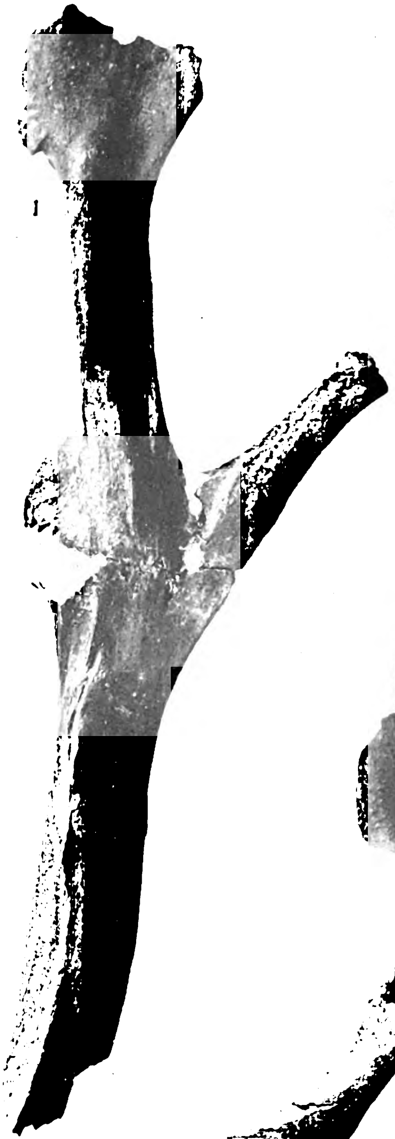
5

8b

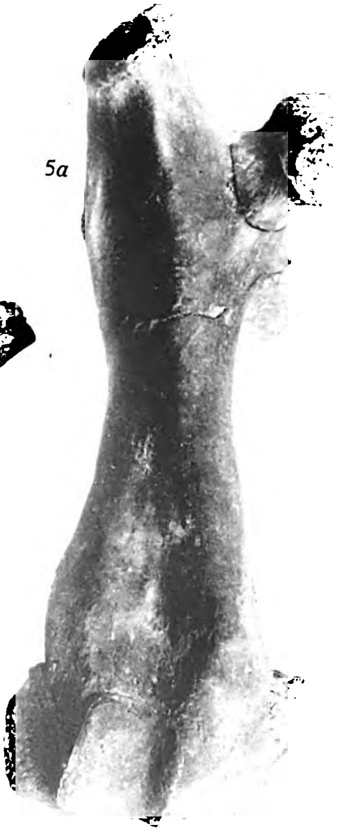
Archiv

Archiv

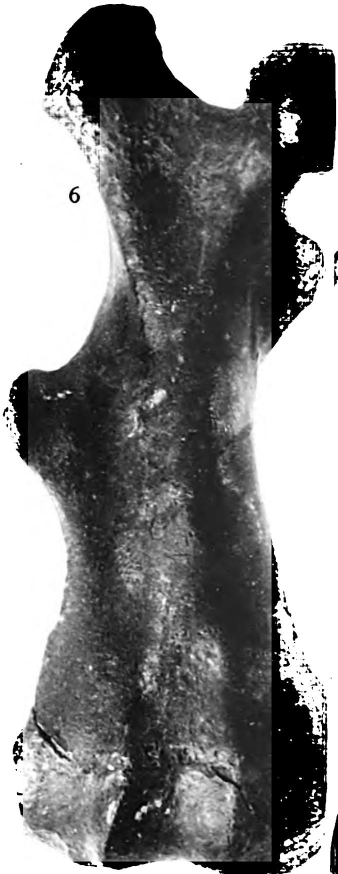
Archives



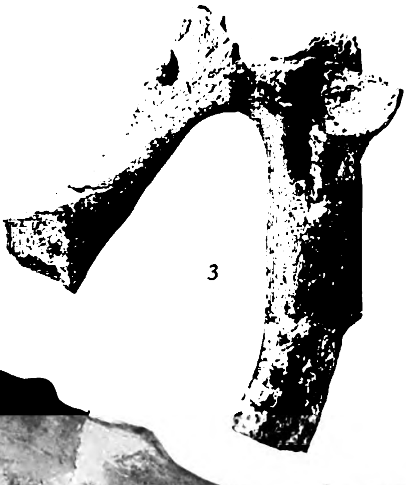
1



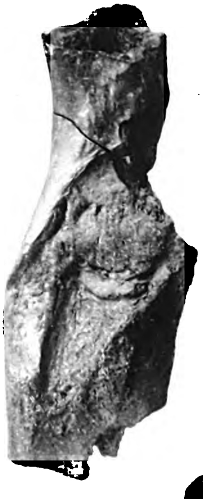
5*a*



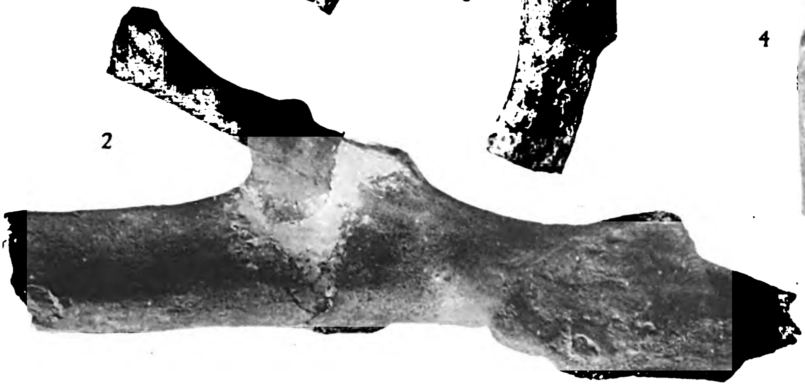
6



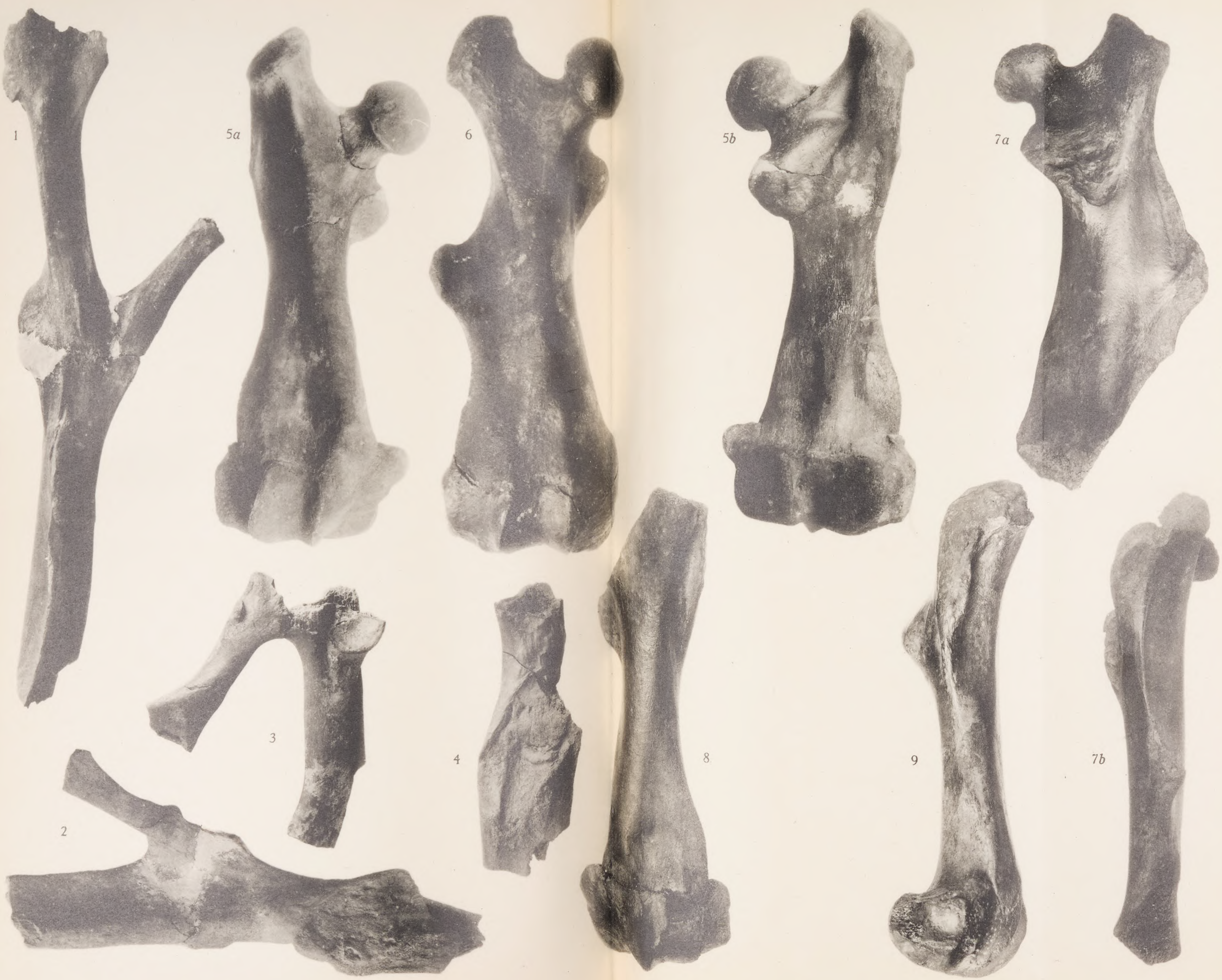
3



4



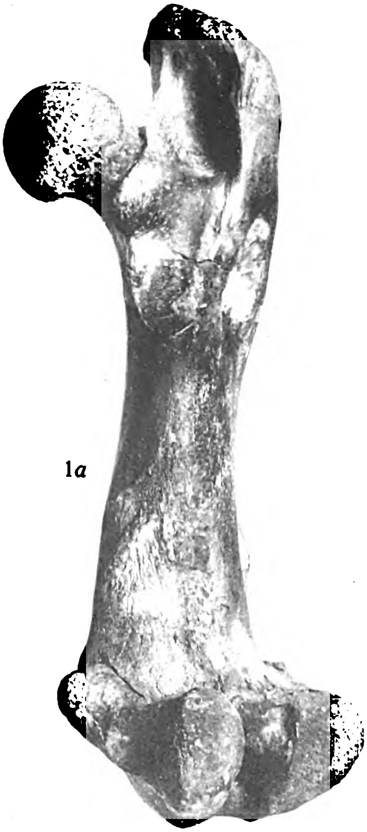
2

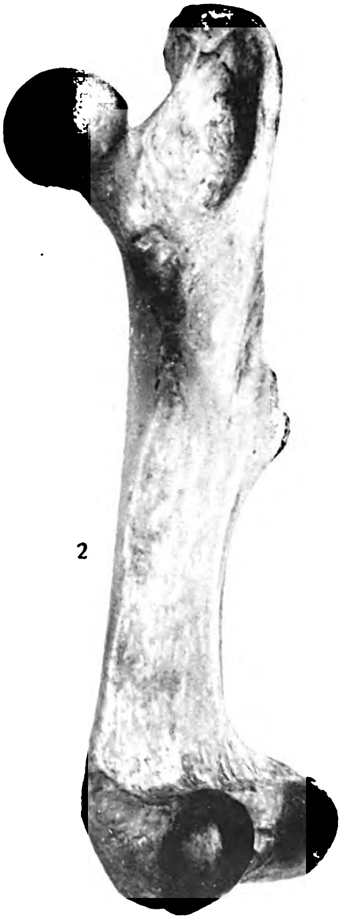

1
5*a*
6
5*b*
7*a*
3
4
8
9
7*b*
2

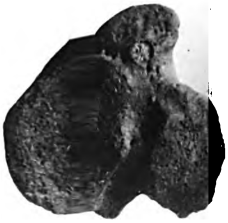
Heliotype L. van Leer & Co

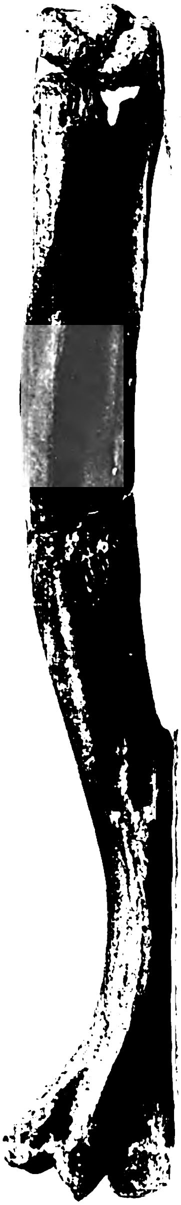
SCHR

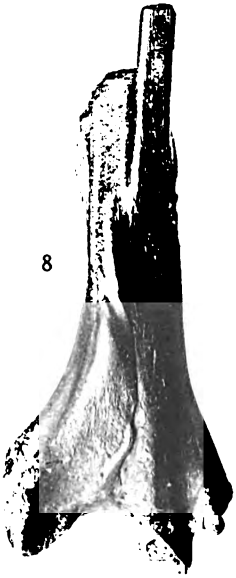
Archi

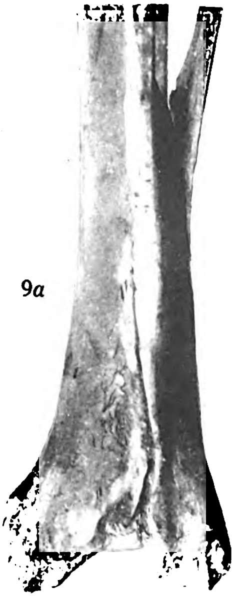

1*a*

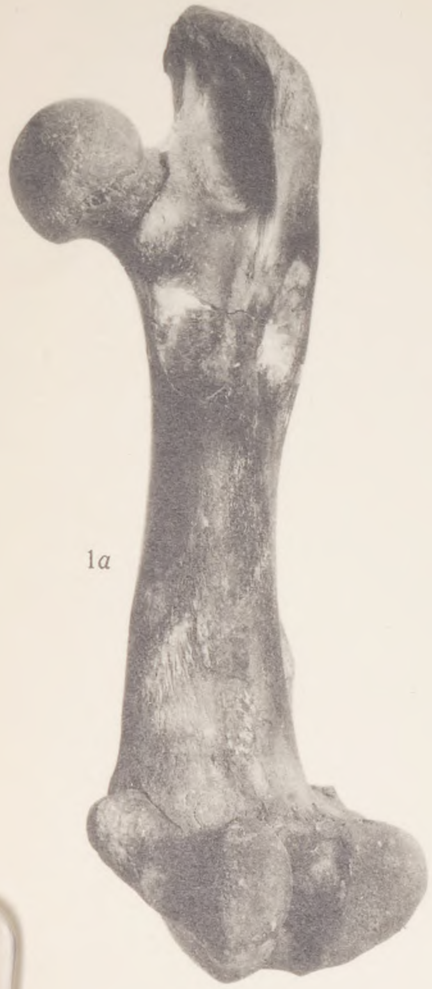

2


5*c*.

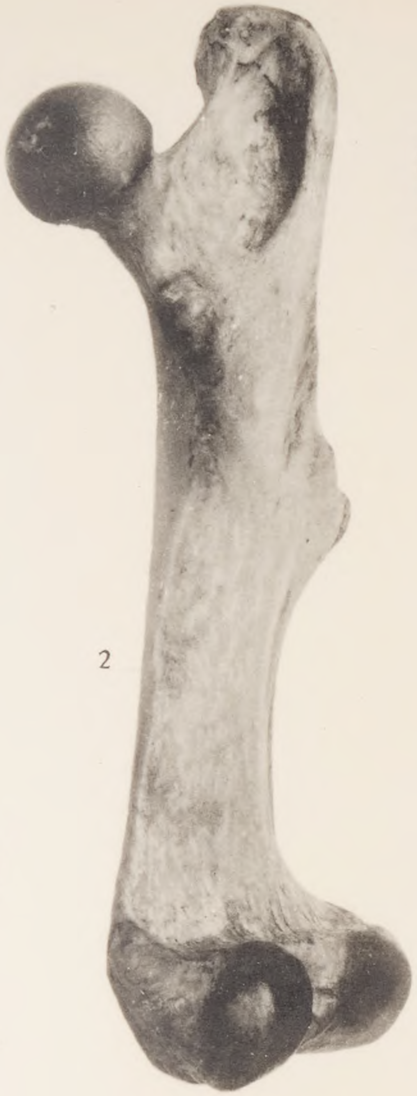

5*a*


8

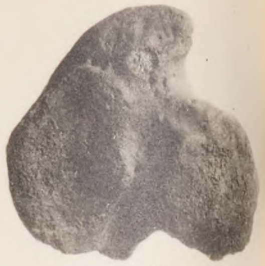

9*a*



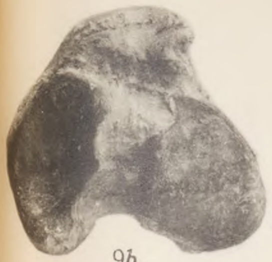
1*a*



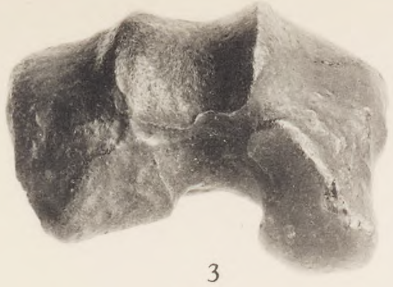
2



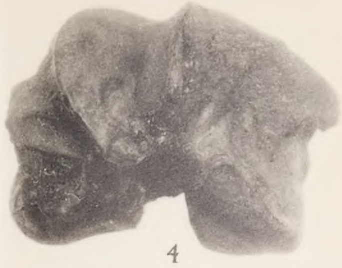
5*c*



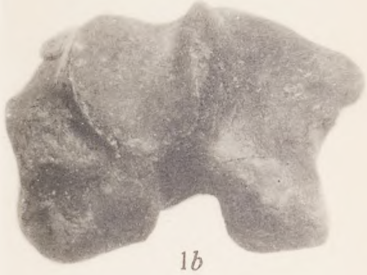
9*b*



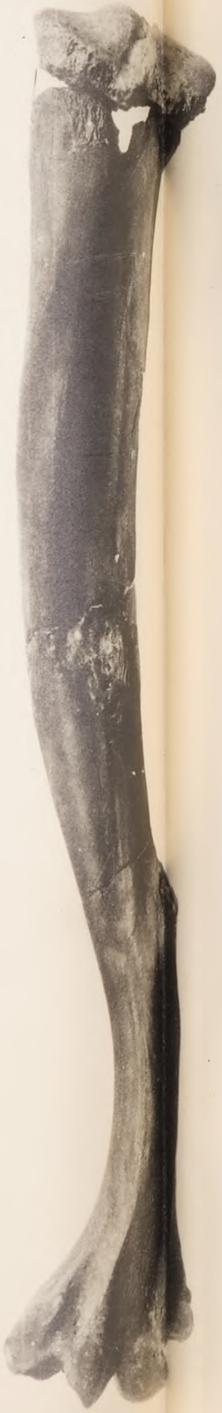
3



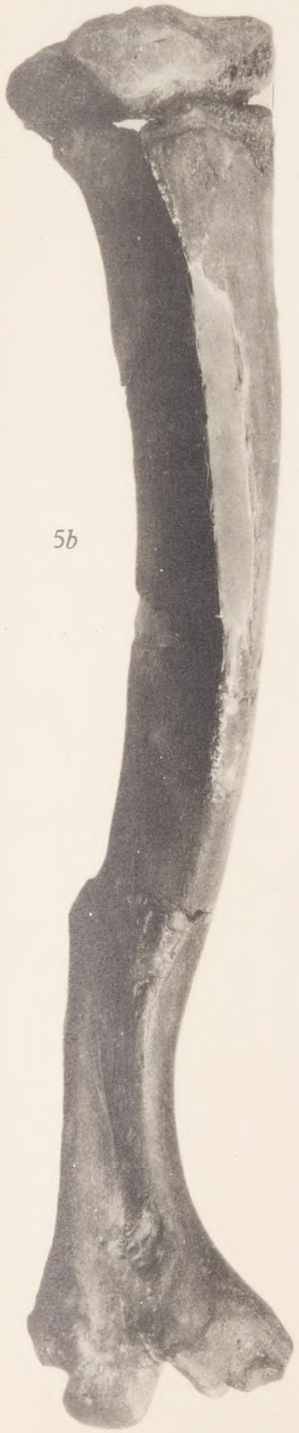
4



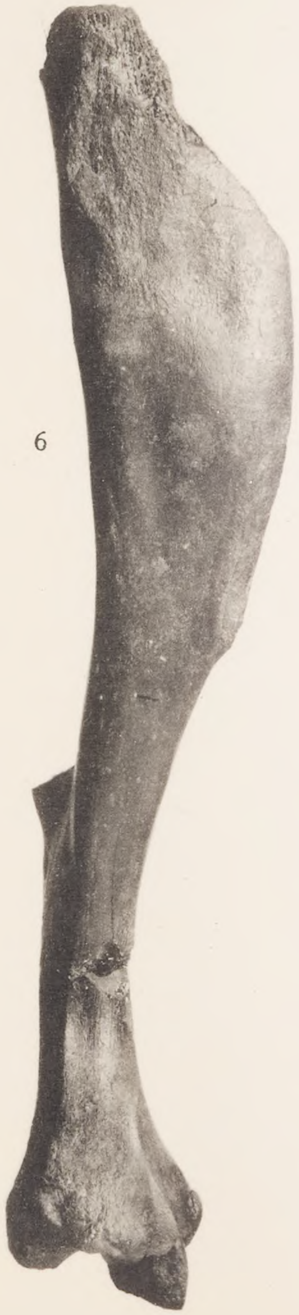
1*b*



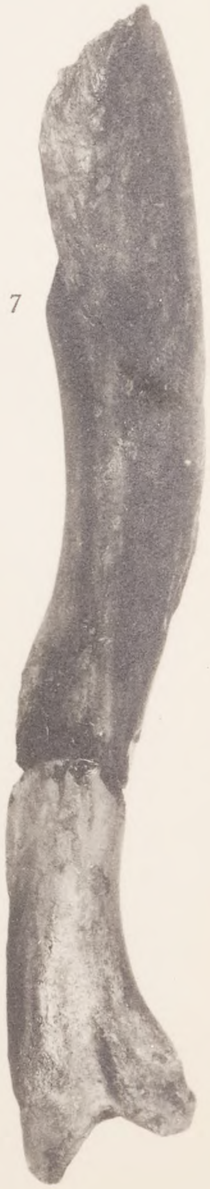
5*a*



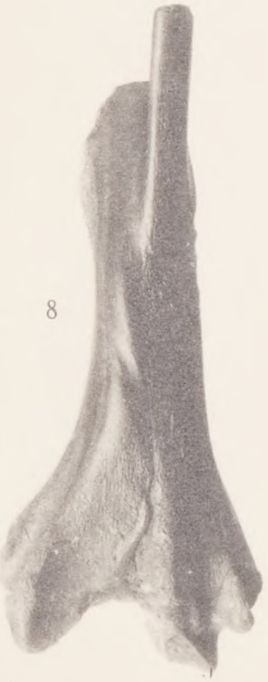
5*b*



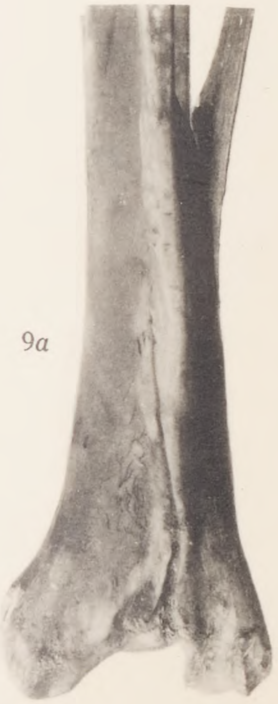
6



7



8



9*a*

Héliotypie L. van Leer & Co.

PLATE XIII

FIG. 1. — Same specimen as on Plate XII, fig. 5; *a* interno-posterior, *b* distal view.

2. — Right femur of *C. f.*; same views.

3. — Same specimen as on Plate XII, fig. 6; distal view.

4. — Right femur, distal view; coll. B. M.

5. — Right tibia-fibula; coll. T. M. (proximal epiphysis in coll. B. M.); *a* interno-posterior, *b* anterior, *c* proximal view.

6. — Left tibia-fibula, interno-anterior view; coll. J. C. M.

7. — Left tibia of *C. f.* from Tegelen, internal view; coll. U. M.

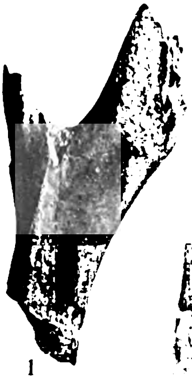
8. — Distal end of right tibia-fibula, posterior view; coll. B. M.

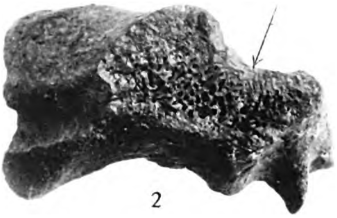
9. — Right tibia-fibula of *C. f.*; *a* posterior view of distal end, *b* view of proximal surface.

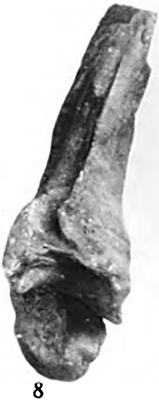
SCHREUDE

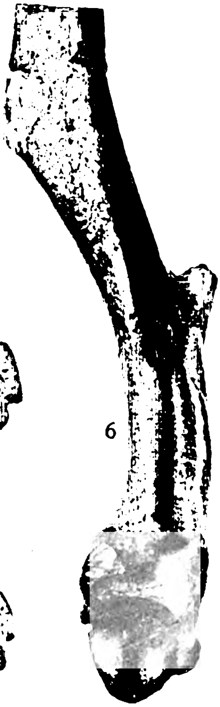
1

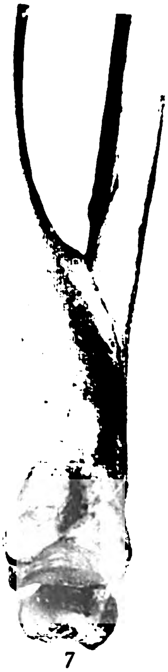
Archives du


1

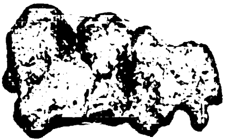

2

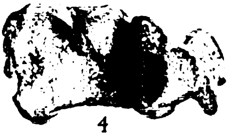

8

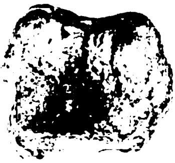

6

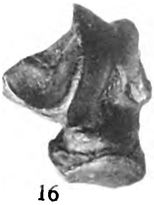

7

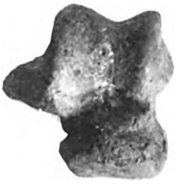
1

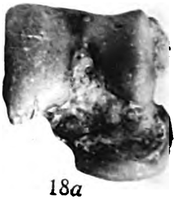

3

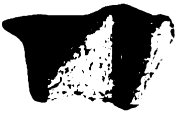

4

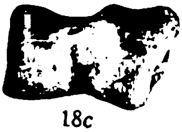

5

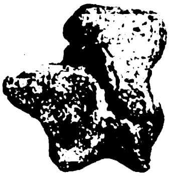

16

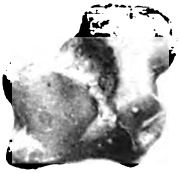

17*a*

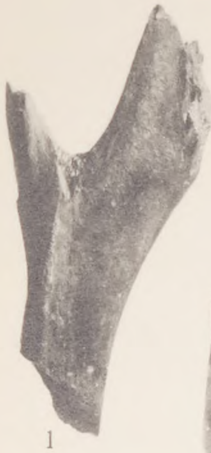

18*a*

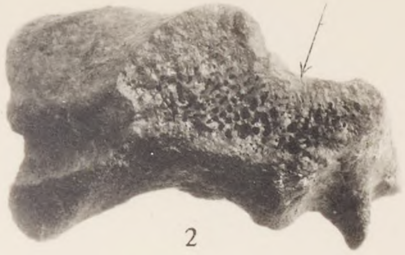

17*c*

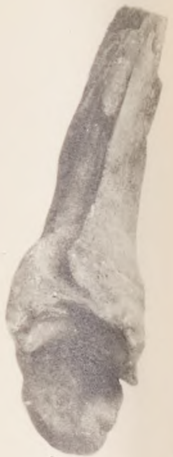

18*c*

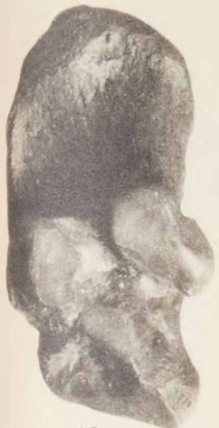

17*b*

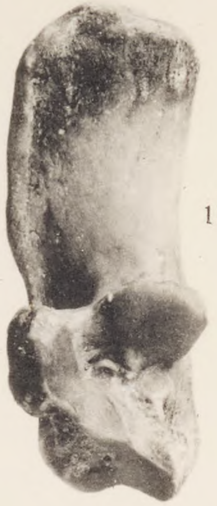

18*b*

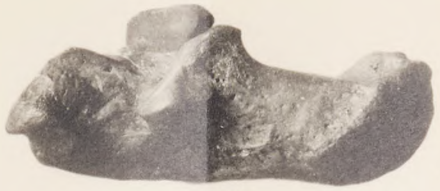

1

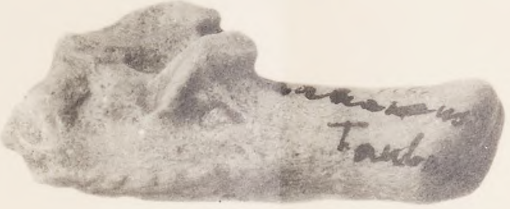

2

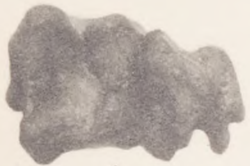

8

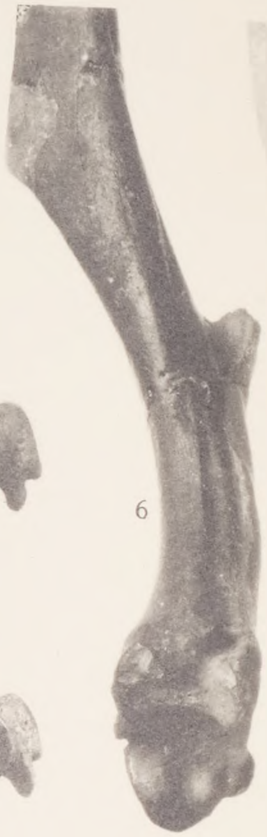

10*a*

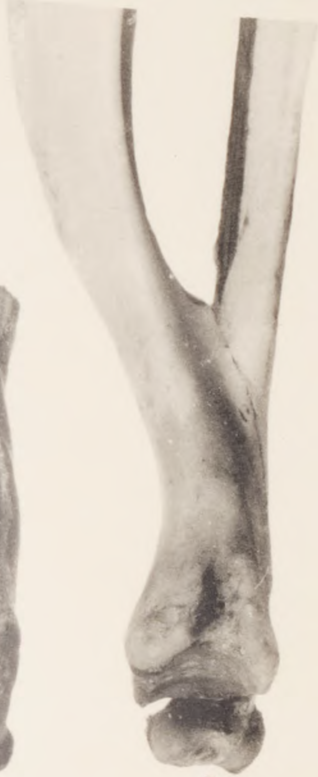

11*a*

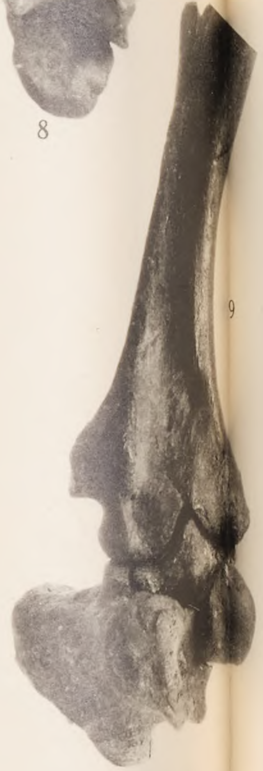

10*b*

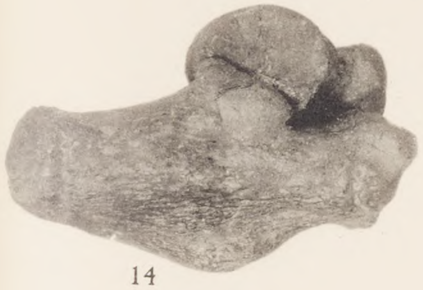

12

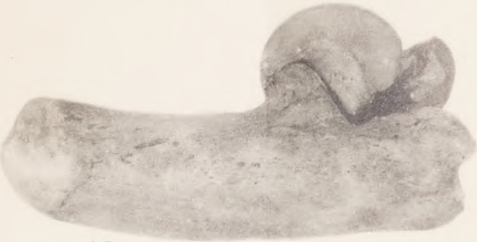

3

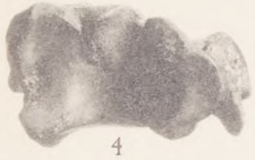

6

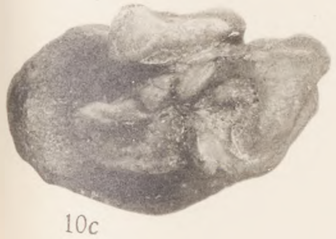

7

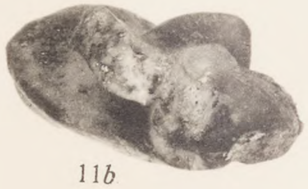

9

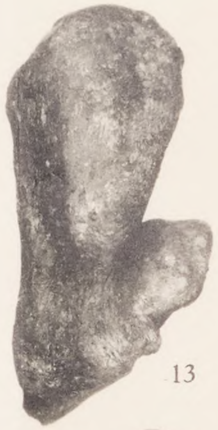

14

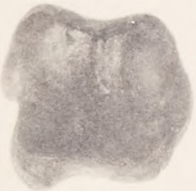

15

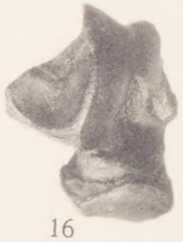

4

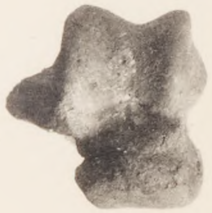

10c

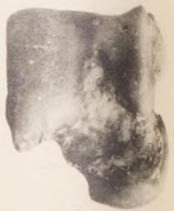

11*b*

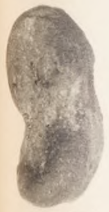

13

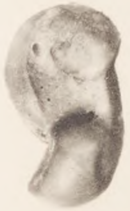

5

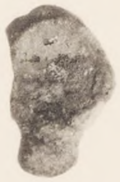

16

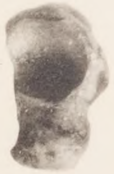

17*a*

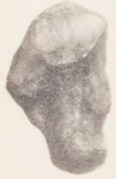

18*a*

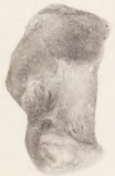

17*d*

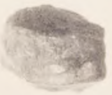

18*d*

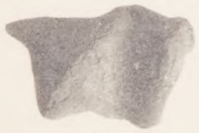

19*a*

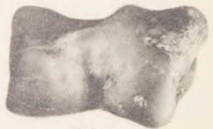

20*a*

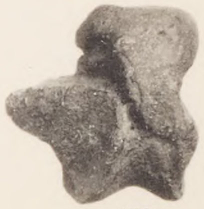

19*b*

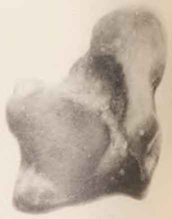

20*b*

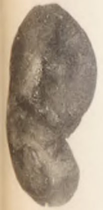

19*e*

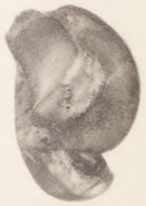

17*c*

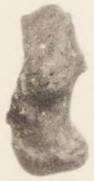

18*c*

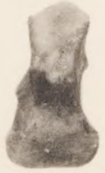

17*b*

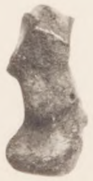

18*b*

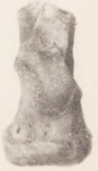

17*e*

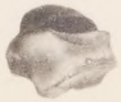

18*e*


19*c*


20*c*


19*d*


20*d*


20*e*

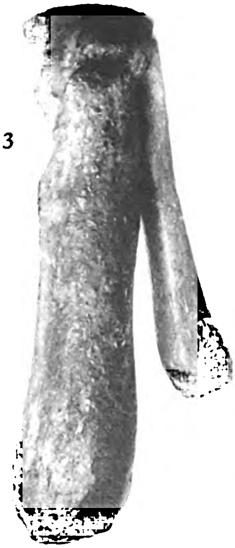
Heliotype L. van Leer & Co.

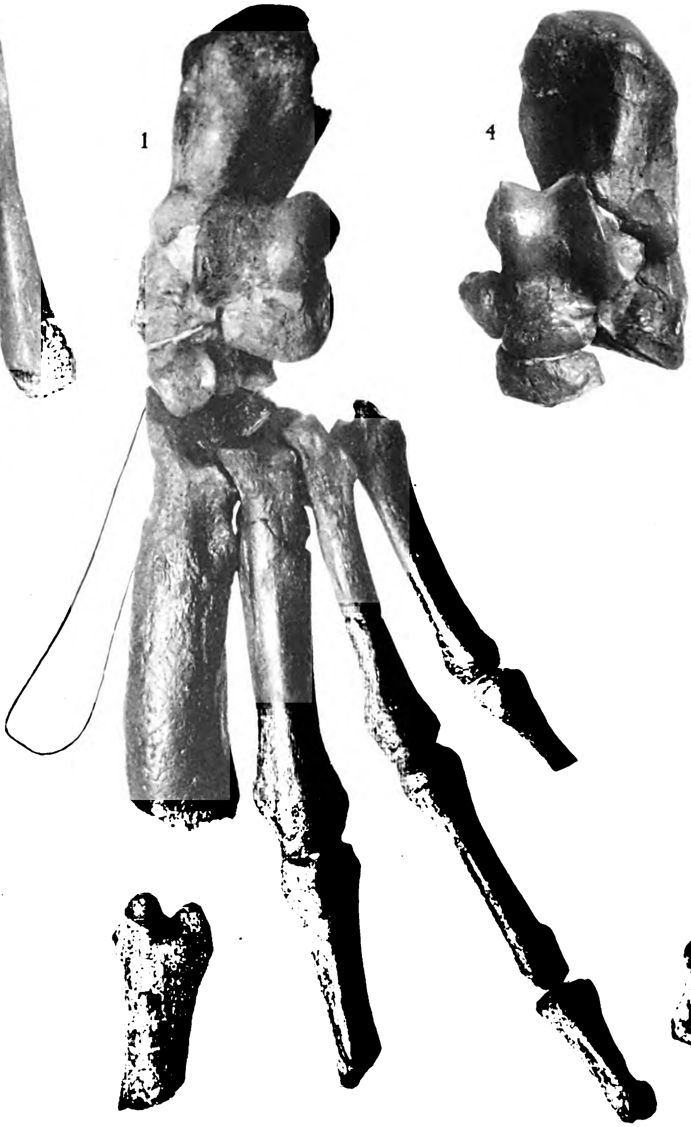
PLATE XIV

Fig. 1. — Part of right tibia-fibula, external view; coll. S. M.
2. — Distal extremity of right tibia-fibula, seen from above, 1½ × nat. size; (↓ points to place of fusion); coll. S. M.
3. — Distal extremity of left tibia-fibula, seen from below; coll. B. M.
4. — The same; coll. T. M.
5. — Distal extremity of left tibia (Pl. XIII, fig. 7) of *C. f.* from Tegelen, seen from below; coll. U. M.
6. — Distal half of right tibia-fibula, internal view (seen somewhat from below); coll. T. M.
7. — The same of *C. f.*
8. — Distal end of left tibia-fibula, same view; coll. B. M.
9. — Right ankle-joint, anterio-external view; coll. T. M.
10. — Left calcaneum; *a* dorso-internal, *b* dorso-external, *c* distal view; coll. T. M.
11. — Same bone of *C. f.*; *a* dorso-internal, *b* distal view.
12. — Same bone of *C. f.* from Taubach, externo-dorsal view; coll. Munich M.
13. — Left calcaneum, ventral view; coll. T. M.
14. — Right calcaneum and astragalus, external view; coll. T. M.
15. — Same bones of *C. f.* .
16. — Right astragalus, dorso-external view; coll. M. M.
17. — Right astragalus; *a* dorsal, *b* ventral, *c* proximal, *d* internal, *e* external view; coll. T. M.
18. — Same bone of *C. f.*
19. — Left navicular; *a* proximal, *b* distal, *c* internal, *d* external, *e* dorsal view; coll. J. C. M.
20. — Same bone of *C. f.*

SCHRE

Archive


3


1

4

2

9

10

15

13c

14c

13d

14d

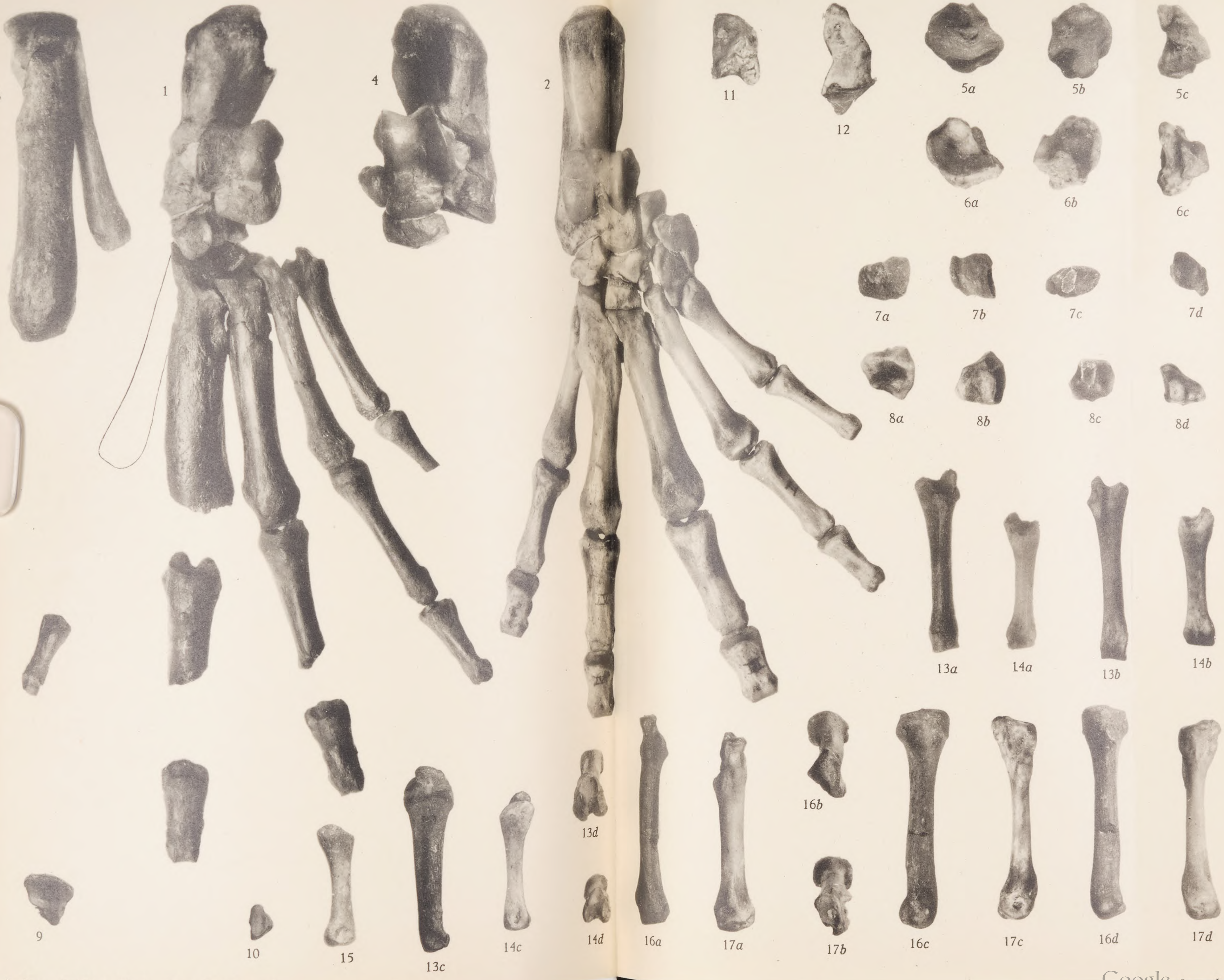

3
1
4
2
11
12
5*a*
5*b*
5*c*
6*a*
6*b*
6*c*
7*a*
7*b*
7*c*
7*d*
8*a*
8*b*
8*c*
8*d*
13*a*
14*a*
13*b*
14*b*
13*d*
16*b*
9
10
15
13*c*
14*c*
14*d*
16*a*
17*a*
17*b*
16*c*
17*c*
16*d*
17*d*

PLATE XV

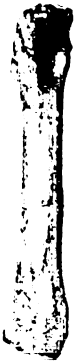
Fig. 1. — Right hind-foot; coll. T. M. (mt. I coll. B. M.). All ungual phalanges and the first phalanx of the fifth digit are unknown.
2. — Right-hind foot (without ungual phalanges) of *C. f.*
3. — Left mt. IV (coll. S. M.) and mt. V (coll. M. M.); dorsal view.
4. — Left calcaneum (coll. T. M.), astragalus (coll. J. C. M.), tibiale (coll. T. M.) and navicular (coll. J. C. M.); dorsal view.
5. — Right cuboid; *a* distal, *b* proximal, *c* internal view; coll. T. M.
6. — Same bone of *C. f.*
7. — Left tibiale; *a* dorso-internal, *b* ventral, *c* external, *d* proximal view; coll. T. M.
8. — Same bone of *C. f.*
9. — Right cuneiform III of *C. f.*; distal view.
10. — Right cuneiform II of *C. f.*; same view.
11. — Right cuneiform I of *C. f.*; external view.
12. — Right accessory bone of *C. f.*; internal view.
13. — Right mt. I; *a* dorsal, *b* ventral, *c* internal, *d* proximal view; coll. B. M.
14. — Same bone of *C. f.*
15. — Left mt. I of *C. f.* from Tegelen, internal view; coll. U.M.
16. — Right mt. II; *a* dorsal, *b* proximal, *c* external, *d* internal view; coll. T. M.
17. — Same bone of *C. f.*

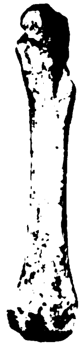
SCHR

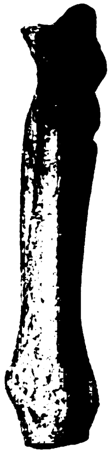
3

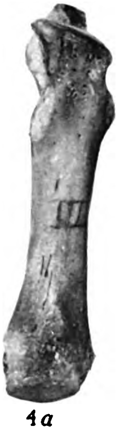
9

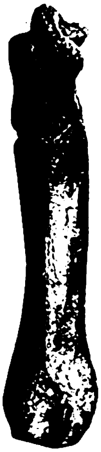
Ar

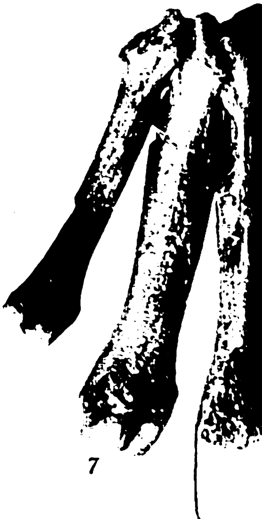

1

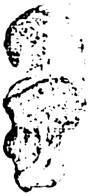

2

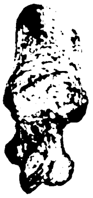

3*a*

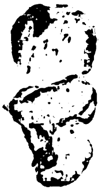

4*a*

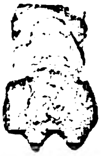

3*b*

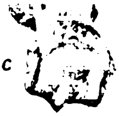

7

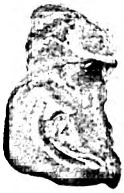

5*b*

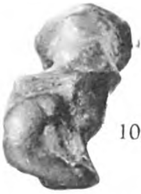

6*b*

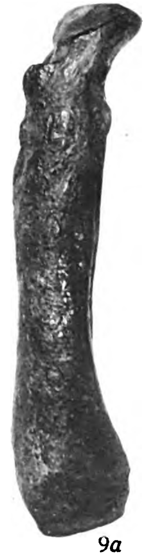

4*d*

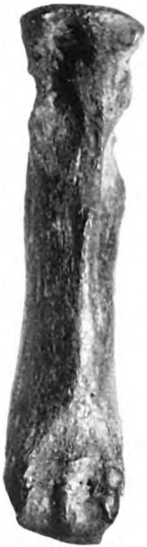

3c

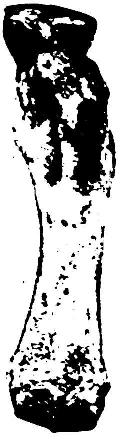

4c

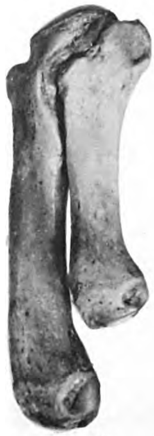

11c

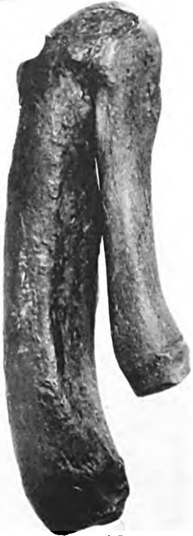

10*d*

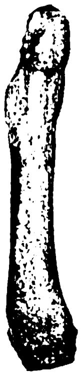

9*a*

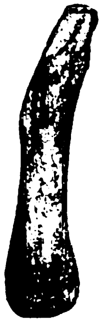

9*b*

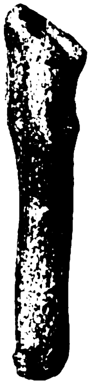

10*b*

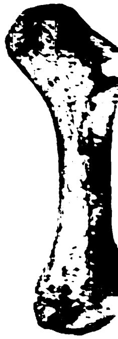

13

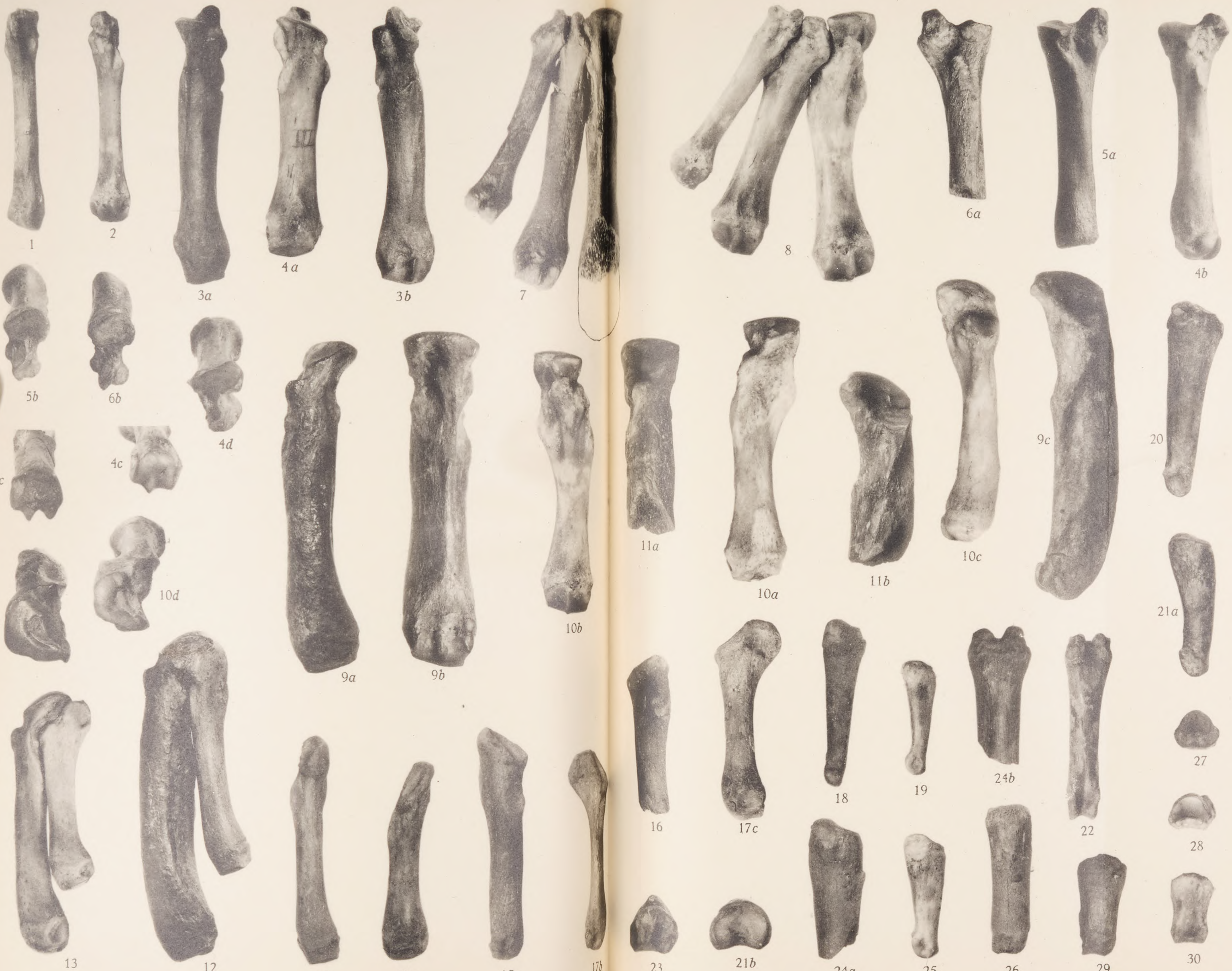

12


14


17*a*


15


17*b*


1
2
3*a*
4*a*
3*b*
7
8
6*a*
5*a*
4*b*
5*b*
6*b*
4*d*
3*c*
4*c*
11*c*
10*d*
9*a*
9*b*
10*b*
11*a*
10*a*
11*b*
10*c*
9*c*
20
21*a*
13
12
14
17*a*
15
17*b*
16
17*c*
18
19
24*b*
22
27
28
23
21*b*
24*a*
25
26
29
30

Heliotype L. van Leer & Co.

PLATE XVI

Fig. 1. — Right mt. II (same bone on Pl. XV, fig. 15); ventral view.
2. — Same bone of *C. f.*
3. — Right mt. III; *a* dorsal, *b* ventral, *c* distal view; coll. T. M.
4. — Same bone of *C. f.*; *a* dorsal, *b* internal, *c* distal, *d* proximal view.
5. — Right mt. III (without distal epiphysis); *a* internal, *b* proximal view; coll. B. M.
6. — Proximal half of right mt. III; *a* external, *b* proximal view; coll. S. M.
7. — Right mts. II, III and IV belonging to one and the same individual; ventral view; coll. T. M.
8. — Same bones of *C. f.*
9. — Left mt. IV; *a* dorsal, *b* ventral, *c* internal view; coll. S. M.
10. — Same bone of *C. f*; same views and *d* proximal view.
11. — Proximal half of left mt. II; *a* dorsal, *b* internal, *c* proximal view; coll. B. M.
12. — Left mt. IV (coll. S. M.) and mt. V (coll. M. M.); dorso-external view.
13. — Same bones of *C. f.*
14. — Left mt. V; dorsal view; coll. M. M.
15. — Same bone; internal view; coll. B. M.
16. — Proximal half of mt. V, external view; coll. M. M.
17. — Left mt. V of *C. f.* from Tegelen; *a* dorsal, *b* internal, *c* external view; coll. U. M.
18. — Right phalanx II^{1}, external view; coll. T. M.
19. — Same bone of *C. f.*
20. — Left phalanx III^{1}, internal view; coll. J. C. M.
21. — Same bone of *C. f.* from Tegelen; *a* internal, *b* proximal view; coll. U. M.
22. — Left phalanx III^{1}, ventral view; coll. M. M.
23. — Right phalanx III^{1}, proximal view; coll. J. C. M.
24. — Proximal part of right phalanx IV^{1}; *a* external, *b* ventral view; coll. T. M.
25. — Right phalanx IV^{1} of *C. f.*, external view.
26. — Same bone not full grown, dorsal view; coll. M. M.
27. — Right phalanx III^{2}, proximal view; coll. T. M.
28. — Same bone of *C. f.*
29. — Right phalanx IV^{2}, ventral view; coll. T. M.
30. — Same bone of *C. f.*

1

5*b*

3*c*

11*c*

BIBLIOTHEK
DER
UNIVERS.-STERNWARTE
GÖTTINGEN.

ARCHIVES

DU

MUSÉE TEYLER

SÉRIE III, VOL. VII

LA HAYE
MARTINUS NIJHOFF
1933

MS

40495.76
302

TABLE DES MATIÈRES

DU VOLUME VII.

Fondation de P. Teyler van der Hulst à Haarlem, 1933 V

Programma's van Teyler's Godgeleerd Genootschap te Haarlem voor de jaren 1929, 1930, 1931, 1932 en 1933 VI

Programma's van Teyler's Tweede Genootschap te Haarlem voor de jaren 1929, 1930, 1931, 1932 en 1933 XII

Conférences faites dans la Fondation Teyler XX

A. D. **Fokker**, Sur l'acoustique des salles, des instruments de musique et de la voix humaine (Conférences) 1

M. **Nuijens** et G. Th. **Philippi**, Sur la forme d'un réflecteur du son 65

A. D. **Fokker**, On the construction of sound reflectors 73

A. D. **Fokker** and M. J. O. **Stutt**, Measurements on the acoustic efficiency of specially designed sound reflectors (with 3 plates) 77

A. D. **Fokker**, Krachten en Bewegingen (Zaterdagmiddagvoordrachten) 89

A. D. **Fokker** en J. v. d. **Handel**, Bewegingen in vloeistoffen en gassen (Zaterdagmiddagvoordrachten) 133

A. D. **Fokker**, Théorie relativiste de l'interaction de deux particules chargées 176

C. J. **Gorter**, Paramagnetische Eigenschaften von Salzen 183

Antoine Mulder, Sur une nouvelle méthode de construction d'un réflecteur de son, donnant des ondes cylindriques 295

E. C. **Wiersma** and C. J. **Gorter**, Remarks on the susceptibility of oxygen gas 300

A. D. **Fokker**, Kristallsymmetrie und Gitterschwingungen 307

A. D. **Fokker**, De beteekenis der atoomkleuren. 337

A. D. **Fokker**, Symmetrische trillingen. 356

C. J. **Gorter**, Der Faraday-Effekt in paramagnetischen Lösungen 369

C. J. **Gorter**, Some remarks on the thermodynamies of supraconductivity 378

FONDATION

DE

P. TEYLER VAN DER HULST

à HAARLEM.

1933

Directeurs: J. A. FONTEIN, président; Mr. W. CNOOP KOOPMANS; J. C. TADEMA; Mr. C. W. THÖNE; Mr. J. W. VAN DER VLUGT.

Secrétaire: Mr. W. F. C. C. PIJNACKER HORDIJK.

Trésorier: J. J. DOEGLAS.

Curateur du Laboratoire de Physique: Prof. Dr. A. D. FOKKER.

Conservateur du Laboratoire de Physique: Dr. C. J. GORTER.

Curateur du Cabinet de Paléontologie et de Minéralogie: Prof. Dr. EUG. DUBOIS.

Bibliothécaire: Mademoiselle H. C. DORHOUT MEES.

Second Bibliothécaire: Dr. R. LORENTZ.

Conservateur des Collections de tableaux, de dessins et de gravures: H. VAN BORSSUM BUISMAN.

Conservateur du Cabinet Numismatique: A. O. VAN KERKWIJK.

MEMBERS DES SOCIÉTÉS TEYLÉRIENNES.

Première Société ou Société de Théologie: P. FEENSTRA, président; Prof. Dr. J. G. APPELDOORN; Prof. Dr. H. HACKMANN; Prof. Dr. W. J. KÜHLER; Dr. C. D. HYLKEMA, sécrétaire.

Seconde Société: A. O. VAN KERKWIJK, président; Prof. Dr. HUGO DE VRIES; Prof. Dr. J. W. MULLER; Prof. Dr. A. D. FOKKER, secrétaire; Prof. Dr. W. MARTIN; Prof. Dr. J. HUIZINGA.

PROGRAMMA VAN TEYLER'S GODGELEERD GENOOTSCHAP TE HAARLEM,

VOOR HET JAAR 1929.

Directeuren van TEYLER'S STICHTING en de Leden van TEYLER'S GODGELEERD GENOOTSCHAP deelen mede, dat zij in hunne vergadering van 17 October 1928 uitspraak hebben gedaan over acht antwoorden, ingezonden op de prijsvraag:

> Eene kritische verhandeling over het boek van Prof. R. OTTO, „das Heilige".

Die uitspraak is hun niet gemakkelijk gevallen. Wel bleek een drietal verhandelingen terstond ter zijde gelegd te kunnen worden, maar de andere kwamen alle voor eene bekroning in aanmerking. Eerst na nauwgezette overweging en vergelijking kon de beslissing vallen.

Het in het Duitsch geschreven korte antwoord met het motto „Quid est illud" etc. prijst OTTO op grond van zijne overeenstemming met een door den auteur eerlang in het licht te geven boek.

Het geschrift onder het motto „Dies docet diem" draagt een populair stichtelijk karakter. Als zoodanig is het niet zonder verdienste. Maar eene wetenschappelijke, kritische verhandeling over „das Heilige" is het geenszins.

Eveneens in het Nederlandsch is het werk geschreven, dat tot motto heeft „Sommigen beschouwen den inwonenden geest als een wonder ...." Scherpzinnigheid en geleerdheid kan men den schrijver niet ontzeggen. Maar in stede van eene systhematische critische verhandeling over OTTO's boek, geeft hij eene breedvoerige, ja breedsprakige uiteenzetting van de redeleer van HEGEL-BOLLAND, die het boek waarom het gaat soms uit het oog schijnt te verliezen. Dat OTTO's boek, waar het ter sprake komt, als het werk van een „zielig" auteur wordt afgemaakt op laatdunkenden toon, deed ons te eerder zonder aarzeling het lijvige stuk ter zijde leggen als niet bekroningswaardig.

Met de vijf overige antwoorden op de prijsvraag was dat niet het geval.

Een in het Fransch gesteld antwoord met als motto Rom. 8 : 15 „Vous n'avez pas reçu un esprit de servitude . . . ." munt uit door eene verdienstelijke compositie. De uiteenzetting van Otto's ontwikkelingsgang voert geleidelijk tot een helder overzicht van de denkbeelden in „das Heilige" gegeven. Daarop volgt eene goed gegroepeerde schets van wat voor- en tegenstanders over het boek hebben geschreven. Niet onverdienstelijk zijn ook de door den verhandelaar ontwikkelde bezwaren en hunne oplossing. De kritiek is echter niet zoo volledig als zij in andere antwoorden wordt geoefend. Daarom kon dit werk, ondanks zijne verdiensten, niet worden bekroond.

Dit laatste geldt ook van het antwoord, in het Nederlandsch geschreven en als motto hebbende „To be a philosopher one must first have been a kantian". Ook dit is een verdienstelijk geschrift, dat, zonder mededinging, voor eene bekroning ernstig in aanmerking zou komen. Het oefent scherpe kritiek op Otto als filosoof, die psychologisch interpreteert wat Kant kenkritisch heeft bedoeld. Den godsdienstpsycholoog Otto prijst de schr. in een betoog, dat blijkbaar voor een uitsluitend vakkundig publiek is geschreven. In overzichtelijke helderheid schiet dit goede werk echter te kort, vergeleken met andere ingekomen antwoorden.

In onze taal is ook het antwoord geschreven onder het motto: „Von allen Seiten her sind wir auf eine psychologische Analyse der Gegenwartsreligion gewiesen". De schr. toont als vakgeleerde zijn onderwerp te beheerschen. Maar de levendige erkenning van Otto's groote verdiensten als godsdienstpsycholoog staat op gespannen voet met de kritiek die op den wijsgeer Otto wordt geoefend. Men ontvangt ten slotte geen beslist eindoordeel over „das Heilige". Daarom kon ook dit overigens verdienstelijke werk niet worden bekroond.

De Duitsche verhandelingen resp. onder de motto's „σὺ δὲ νῆφε ἐν πασιν" (2 Tim. 4 : 5) en „νήψατε" zijn de verdienstelijkste. Na een overzicht van „das Heilige" doet de eerstgenoemde overtuigend uitkomen, dat Otto's opzet: het numineuze d. i. „das Heilige minus seines sittlichen und seines rationalen Moments überhaupt" tot den hoeksteen van allen godsdienst te maken, mislukt moet heeten. Terwijl hij de willekeur en de onhoudbaarheid van die opvatting in helder licht plaatst, handhaaft hij, in het voetspoor van Kant, den fundamenteelen samenhang van godsdienst en zedelijkheid. Tegenover deze verdiensten wegen hier en daar wat heel breede uitweidingen niet zwaar. Den prijs konden wij dezen verhandelaar niet toekennen. Maar wel bieden wij hem een bedrag van *f* 200 aan, als bewijs van bijzondere waardeering, indien hij vergunning wil geven tot het openen van de enveloppe met zijn naamkaartje.

Den prijs hebben wij toegekend aan de verhandeling onder het motto „*νήψατε*”.

Slechts een schijnbaar tekort is het ontbreken van een overzicht van Otto's boek. Het wordt bij den lezer bekend verondersteld. Deze ontvangt in deze verhandeling eene even sobere als zakelijke kritiek, die „das Heilige” eerst uit godsdienstpsychologisch — dan uit godsdienst-filosophisch oogpunt beoordeelt, nadat is voorafgegaan eene schildering van de mentaliteit na den oorlog, waaruit Otto's boek moet worden begrepen. Wij meenen, dat dit even overzichtelijke als heldere betoog een model-antwoord op onze vraag verdient te heeten.

Schrijver dezer verhandeling bleek te zijn:

Prof. Lic. Dr. Friedrich Karl Feigel, Oberstudiendirektor, Duisburg, Cecilienstrasse 24.

Nieuw uitgeschreven wordt de volgende prijsvraag, om beantwoord te worden voor 1 Januari 1931. Het Genootschap vraagt:

> Eene kritische verhandeling over de hoofddenkbeelden van de theologie van Prof. Karl Barth.

VOOR HET JAAR 1930.

Directeuren van Teyler's Stichting en de Leden van Teyler's Godgeleerd Genootschap deelen mede, dat zij in hunne vergadering van 23 October 1929 uitspraak hebben gedaan over twee antwoorden, ingezonden op de prijsvraag:

> Verleenen de uitkomsten van het archaeologisch onderzoek in Babylonië, Palestina en Egypte inderdaad een steun aan de conservatieve Bijbelwaardeering?

Het eene antwoord, onder de kenspreuk: „Wat vergaat, het Woord bestaat” draagt meer het karakter van eene populaire voorlezing dan van eene wetenschappelijke verhandeling. Het archaeologische onderzoek wordt onvolledig en ongedocumenteerd gerefereerd. Rustig gaat de schr. uit van de verzekerdheid, dat art. 3 der Nederlandsche Geloofsbelijdenis niet dwaalt. De afwezigheid van alle critische bezinning sloot eene bekroning uit.

De tweede verhandeling met het motto „Verbum Dei manet in aeternum" is veel uitvoeriger, maar de afwezigheid van alle critische bezinning sloot ook voor deze verhandeling eene bekroning uit. Als de schrijver het Bijbelsche scheppingsverhaal met een Babylonisch heeft vergeleken, dan concludeert hij niet, dat het eerste schooner, verhevener is dan het tweede, maar dat het eerste ouder is en authentiek, zooals een bloem zich als „echt" doet kennen naast een kunstbloem! Enz. Zoo moesten wij ook deze, overigens vlijtige, verhandeling ter zijde leggen.

Nieuw uitgeschreven wordt de volgende prijsvraag, om beantwoord te worden voor 1 Januari 1932:

> Welke opvatting van den Staat beantwoordt aan het vrijzinnig Christendom?

VOOR HET JAAR 1931.

Directeuren van TEYLER'S STICHTING en de Leden van TEYLER'S GODGELEERD GENOOTSCHAP deelen mede, dat voor 1 Januari 1930 geen antwoord is ingekomen op de prijsvraag:

> Eene kritische beschouwing over de nieuwere denkbeelden omtrent het begrip openbaring.

Nieuw uitgeschreven wordt de volgende prijsvraag, om beantwoord te worden voor 1 Januari 1933:

> Beschrijving en critische beoordeeling van Ghandi's beginselen in hunne verhouding tot het Christendom.

VOOR HET JAAR 1932.

Directeuren van **Teyler's Stichting** en de Leden van **Teyler's Godgeleerd Genootschap** deelen mede, dat voor 1 Januari 1931 geen antwoord is ingekomen op de prijsvraag:

> Eene kritische verhandeling over de hoofddenkbeelden van de theologie van Prof. **Karl Barth**.

Nieuw uitgeschreven wordt de volgende prijsvraag, om beantwoord te worden voor 1 Januari 1934:

> Hoe op vrijzinnig Christelijk standpunt te oordeelen over de zending?

VOOR HET JAAR 1933.

Directeuren van Teyler's Stichting en **de Leden van Teyler's Godgeleerd Genootschap** deelen mede, dat voor 1 Januari 1932 twee antwoorden zijn ingekomen op de prijsvraag:

> Welke opvatting van den Staat beantwoordt aan het vrijzinnig Christendom?

Het eerste antwoord, ingezonden met de woorden ontleend aan Ev. Joh. I 4—5 kon reeds door den zeer geringen omvang voor bekroning niet in aanmerking komen. Het was ook overwegend van een stichtelijk karakter, zonder twijfel goed bedoeld, maar de zaak waarom het inderdaad ging was buiten bespreking gelaten.

Het tweede antwoord onder den kenspreuk: „viget vigebit, victa vincit veritas", hoewel uitvoeriger werd evenmin den prijs waardig geacht. De schrijver schijnt slechts één vorm van vrijzinnig Christendom te kennen. Ook ontbreekt een behoorlijk onderzoek naar het wezen van den staat. Bij de uitwerking komen de vragen, waarop het wezenlijk aankomt zelfs niet ter sprake. Niet onbesproken hadden mogen blijven vragen als deze, hoe volgens het vrijzinnig Christendom de Staat behoorde te staan tegenover de Kerk, de School, het Militairisme, tegenover extreme politische richtingen, enz. Nu is de geheele behandeling van het thema oppervlakkig en vaag geworden.

Nieuw uitgeschreven wordt de volgende prijsvraag, om beantwoord te worden voor 1 Januari 1935:

> Er wordt gevraagd een historisch-critisch onderzoek naar het waardevolle in de theosophische stroomingen. (De anthroposophie daaronder begrepen.)

De prijs voor het best en voldoend gekeurd antwoord op deze vragen bestaat uit een gouden eerepenning, op den stempel des Genootschaps geslagen, ter innerlijke waarde van vierhonderd gulden, of, zoo men daaraan de voorkeur mocht geven, in vierhonderd gulden. De prijs wordt uitgekeerd, zoodra de bekroonde verhandeling voor de pers gereed is.

De verhandelingen moeten in het Nederlandsch, Latijn, Fransch, Engelsch of Hoogduitsch, met eene *latijnsche* letter, vooral goed leesbaar (door eene andere hand dan die van den auteur of met de schrijfmachine) geschreven zijn. Niet duidelijk geschreven verhandelingen worden ter zijde gelegd. Ook moeten zij op den bepaalden tijd *in haar geheel* worden ingezonden en geene antwoorden, waaraan eenig gedeelte bij de inlevering ontbreekt, zullen tot het dingen naar den gemelden eereprijs worden toegelaten. Alle ingezonden stukken blijven het eigendom van het Genootschap, dat de bekroonde, met of zonder vertaling, in zijne werken opneemt, zonder dat de schrijvers, anders dan met toestemming der Stichting, die mogen uitgeven. Ook behoudt het Genootschap aan zich het recht om van de niet bekroonde stukken zoodanig gebruik te maken als het raadzaam zal oordeelen, en wel: zonder of met vermelding van den naam des schrijvers, in het laatste geval echter niet zonder diens toestemming. Voorts worden geene afschriften van de niet-bekroonde stukken aan de schrijvers verstrekt dan op hunne kosten. De in te zenden antwoorden moeten, zonder naam en alleen met eene spreuk onderteekend, vergezeld van een verzegeld briefje, dezelfde spreuk ten opschrift voerende en van binnen opgaaf van des schrijvers naam en woonplaats behelzende, gezonden worden aan het *Fundatiehuis* van wijlen den Heer P. TEYLER VAN DER HULST te Haarlem. Het programma van het Genootschap is op aanvrage bij Heeren Directeuren van Teyler's Stichting jaarlijks omstreeks 15 November kosteloos verkrijgbaar.

PROGRAMMA VAN TEYLER'S TWEEDE GENOOTSCHAP TE HAARLEM

VOOR HET JAAR 1929.

Directeuren van Teyler's Stichting en de Leden van Teyler's Tweede Genootschap hebben besloten voor het jaar 1929 de volgende prijsvraag uit te schrijven:

> Verlangd wordt eene beschrijving der gedenkpenningen, in de Noordelijke Nederlanden vervaardigd sedert het midden der 15de eeuw tot het einde der 18de, met levensbizonderheden van de makers dier penningen.

Bedoeld wordt om voor Noord-Nederland een werk te verkrijgen in den geest van Dr. Julien Simonis, *L'Art du Médailleur en Belgique, contributions à l'étude de son histoire depuis l'avènement de Charles le Téméraire au duché de Bourgogne, jusqu'au milieu du XVIe siècle*, Bruxelles 1900, en van de *Nouvelles contributions à l'étude de son histoire* (*seconde moitié du XVIe siècle*), van denzelfden schrijver in 1904 verschenen.

Bij de beschrijving der penningen zal gevoegd moeten worden eene verwijzing naar de werken, waarin de stukken worden beschreven en afgebeeld, met de opgave van het metaal waarvan zij zijn vervaardigd, maat in millimeters en vermelding der openbare of particuliere verzameling waarin de stukken zich bevinden, of, indien de origineelen niet bekend zijn, de plaats waar van het stuk wordt melding gemaakt (bijv. veilingcatalogus, boedelinventaris, en derg.). Wanneer van de penningen in gemakkelijk te raadplegen werken (b.v. F. van Mieris, G. van Loon en de Vervolgen op laatstgenoemd werk) reeds goede en nauwkeurige afbeeldingen bestaan, zal de schrijver kunnen volstaan met eene beknopte, duidelijke omschrijving dier stukken, zonder gehouden te zijn deze uitgebreid te beschrijven.

Het voornemen bestaat, om het werk van eenige platen te voorzien, waarop in het bizonder nog weinig of nimmer afgebeelde penningen zullen voorkomen. De schrijver gelieve aan te geven, welke stukken naar zijne meening voor afbeelding in aanmerking komen.

De antwoorden moeten worden ingezonden vóór of op den 1en Januari 1932, opdat zij vóór den 1sten April 1932 kunnen beoordeeld worden.

Directeuren van Teyler's Stichting en de Leden van Teyler's Tweede Genootschap deelen mede, dat zij uitspraak hebben gedaan over een antwoord, ingezonden op de prijsvraag voor het jaar 1927:

> Men vraagt eene geschiedenis van den Nederlandschen handel op den Levant in de zeventiende eeuw.

Dit antwoord, in de Nederlandsche taal gesteld en ingezonden onder het motto „Amor vincit omnia", wordt onvoldoende geacht om voor eene bekroning in aanmerking te komen. De schrijver heeft zich bepaald tot een onsamenhangend, onvolledig en op allerlei punten gebrekkig excerpt uit de bronnenpublicaties van Heringa en De Castries. In plaats van een behoorlijk verhaal te geven, vergast hij ons op los aaneenverbonden opmerkingen, die meestal kant noch wal raken, en aanhalingen, ontleend aan bovengenoemde werken. Het geheel is verward. Van den oorsprong van dezen handel geeft de schrijver ons niets dan eenige regels over het begin ervan; van de stichting der Directie van den Levantschen handel en de inrichting van dat college hooren wij zoo goed als niets; van de werkzaamheid der admiraliteiten tot beteugeling van den zeeroof, van de vredesverdragen, door Tromp en De Ruyter met Algiers, Tunis en Saleh gesloten, niets dan enkele bijzonderheden; van de beteekenis van den zeeroof, van de goede verhouding tot Turkije in tegenstelling met die tot de roofstaten van Barbarije krijgen wij niets te hooren dan eenige door elkander gehaalde bijzonderheden zonder eenigen samenhang. Wij vinden in het geheele stuk geen enkele verwijzing naar de gebruikte bronnen, zooals in een behoorlijk geschiedverhaal toch zou behooren voor te komen. Het slot eindigt midden in een soort betoog over den achteruitgang van den handel — een betoog even abrupt en verward als dat van het begin. De stijl van het geheel is vol fouten tegen taal en logica, vol platte aardigheden en half begrepen spreekwijzen, vol gewone spelfouten, hier en daar met blijkbaar aan De Castries ontleende Fransche woorden doorspekt.

VOOR HET JAAR 1930.

Directeuren van Teyler's Stichting en de Leden van Teyler's Tweede Genootschap hebben besloten voor het jaar 1930 de volgende prijsvraag uit te schrijven:

> Het Genootschap vraagt eene Flora der locaal-endemische plantensoorten van Nederlandsch Indië.

Deze behoort te omvatten de diagnosen dier soorten en die van één, twee, of drie der nauwst verwante en in de nabijheid van de groeiplaatsen der eerste, levende vormen, vergezeld van een aanwijzing of de punten van verschil moeten worden beschreven als van progressieven of van retrogressieven aard.

Aan het slot worde een tabellarisch overzicht van deze verschilpunten gegeven.

Als locaal-endemisch worden die vormen opgevat, die slechts een zeer klein gebied bewonen en die dus, voor zooverre zij geen relicten zijn, door Willis worden beschouwd als voor geologisch korten tijd uit een hunner nauwste verwanten te zijn ontstaan. (Zie J. C. Willis, Age and Area, Cambridge 1922)

Heeren Directeuren behouden zich, met het oog op de kosten, voor, te bepalen hoevele afbeeldingen bij de uitgave der verhandeling zullen worden opgenomen. De inzenders worden uitgenoodigd, aan te geven welke illustraties bij voorkeur behooren te worden geplaatst.

De antwoorden moeten worden ingezonden vóór of op den **1en Januari 1932,** opdat zij vóór den 1sten April 1932 kunnen beoordeeld worden.

VOOR HET JAAR 1931.

Directeuren van Teyler's Stichting en de Leden van Teyler's Tweede Genootschap deelen mede, dat zij uitspraak hebben gedaan over het antwoord, ingezonden op de prijsvraag van het jaar 1928, waarbij gevraagd werd een beschrijving van het leven en het werk van Jan Lievens.

Dit antwoord is in de Duitsche taal gesteld en ingezonden onder het motto: „Stat magni nominis umbra".

Het werk is zeer goed ingedeeld en de systematiek is tot in kleinigheden volgehouden. De schrijver heeft, weliswaar, gedeeltelijk zijn werk gebouwd op de grondslagen van door anderen gevonden gegevens, maar hetgeen hij hieromtrent in de inleiding zegt, getuigt van al te groote bescheidenheid. Immers, zijn studie is vol van eigen vondsten, zoodat het werk veel meer is dan een opsomming en groepeering van gegevens. Het getuigt allereerst van volkomen vertrouwdheid met de bouwstoffen. De schrijver is geheel bekend met de heerschende opvattingen over LIEVENS. Hij gaat in zijn behandeling op stijlcritisch terrein en op dat van de stijl-ontwikkeling zeer diep, waarbij hij telkens een standpunt van beteekenis weet in te nemen waar het geldt de bespreking van hangende problemen. Met name is dit het geval bij de verhouding van LIEVENS tot LASTMAN, tot REMBRANDT en tot de kunst der Utrechtsche academisten.

De schrijver kent blijkbaar het meerendeel van LIEVENS' schilderijen, etsen en teekeningen door autopsie. Hierdoor heeft hij zich een zeer juiste voorstelling gevormd van 's meesters capaciteiten. De onbekendheid met het weinige, dat den schrijver onbereikbaar was, heeft aan de juistheid van zijn oordeel geen schade gedaan. De beteekenis van LIEVENS als schilder en het wezen van zijn kunstenaarschap zijn zuiver en volledig geteekend. Tal van nieuwe, zeer aannemelijke gezichtspunten worden door den schrijver geopend. Zoo wordt gewezen op den invloed der prentkunst, dien LIEVENS ondergaat en weet de schrijver het verschil in kijk, temperament en werkwijze bij LIEVENS en REMBRANDT beter gefundeerd te karakteriseeren, dan voorheen is geschied. De schrijver maakt het aannemelijk, dat de vroegrijpe LIEVENS in den beginne meer dan eens invloed had op het werk van zijn kameraad REMBRANDT. Geheel nieuw is de schets van LIEVENS' Antwerpsche werkzaamheid. Het moeilijkste probleem — dat van LIEVENS' geschilderde landschappen — brengt de schrijver een goed stuk nader tot de oplossing al zullen enkele toeschrijvingen nog herziening behoeven. De oeuvre-catalogus getuigt van pijnlijke nauwkeurigheid en beantwoordt volkomen aan de te stellen eischen. Een voordeel is, dat de bij de kunstwerken behoorende detailkwesties in den catalogus zelf worden behandeld en dat slechts die problemen, welke van belang zijn voor het beeld van LIEVENS en zijn kunst als geheel, in den tekst zijn ondergebracht. Aldus is deze zeer leesbaar geworden.

Stijlcritisch is de schrijver bijzonder ervaren. Het zeer moeilijke werk van schiften van LIEVENS' eigen werk, copieën en falsificaties is tot een zeer bevredigend eind gebracht.

Ook de vraag of LIEVENS zelf zijn houtsneden maakte, het probleem van de teekeningen van vader en zoon en vele andere kwesties zijn duidelijk uiteengezet en objectief bekeken.

Om kort te gaan: Het antwoord voldoet aan de door de prijsvraag gestelde eischen en is een degelijk, op breeden en stevigen grondslag gebouwd stuk werk, uitnemend door zuivere systematiek, goed geschreven en getuigende van volkomen meesterschap over de materie en van scherp stijl-critisch oordeel.

De gegevens zijn met groote objectiviteit verwerkt en tal van nieuwe gegevens zijn aan het licht gebracht.

Op grond van genoemde hoedanigheden hebben DIRECTEUREN VAN TEYLER'S STICHTING en DE LEDEN VAN TEYLER'S TWEEDE GENOOTSCHAP besloten het antwoord met den gouden eerepenning te bekronen.

Bij opening van het verzegeld briefje bleek de schrijver te zijn: Dr. H. SCHNEIDER, privaat-docent aan de Rijks-Universiteit te Leiden en assistent aan het Koninklijk Kabinet van Schilderijen (Mauritshuis) te 's-Gravenhage.

DIRECTEUREN VAN TEYLER'S STICHTING en DE LEDEN VAN TEYLER'S TWEEDE GENOOTSCHAP hebben besloten voor het jaar 1931 de volgende prijsvraag uit te schrijven:

> Gevraagd wordt eene beschrijving van het leven van PIETER CORNELISZOON HOOFT.

Bedoeld is: een beeld, scherper omlijnd en vollediger dan tot dusverre gegeven is, van HOOFT'S leven, op grond van zijne (uitgegeven en onuitgegeven) brieven, van zijne werken en van anderer oordeel over hem: zijn persoon en karakter, zijne staatkundige, kerkelijke, godsdienstige en wijsgeerige beginselen en denkbeelden, zijne dichterlijke en ambtelijke werkzaamheid, zijn vriendenkring.

De antwoorden moeten worden ingezonden vóór of op den **1en Januari 1933,** opdat zij vóór den 1sten April 1933 kunnen beoordeeld worden.

VOOR HET JAAR 1932.

Directeuren van Teyler's Stichting en de Leden van Teyler's Tweede Genootschap deelen mede, dat zij hebben besloten voor het jaar 1932 de volgende prijsvraag uit te schrijven:

> Gevraagd wordt een studie over de Opkomst der Staatsgezinde Partij tijdens het Stadhouderschap van Frederik Hendrik.

De bestaande historische litteratuur over het tijdperk geeft slechts een onduidelijk beeld van de wijze, waarop de tegenstand tegen de stadhouderlijke politiek, voornamelijk in de provincie Holland, den omvang heeft kunnen aannemen, die den ommekeer van het jaar 1650 begrijpelijk maakt. Het zou van belang zijn, naar den aard van deze politieke wending een nader onderzoek in te stellen, dat o. a. gericht zou moeten zijn op alles wat verband houdt met het eerste raadpensionarisschap van Adriaan Pauw, en met de benoeming van M. H. Tromp tot luitenant-admiraal. De vraag zou moeten worden gesteld, in hoeverre de latere schimpnaam „Loevesteinsche factie" grond heeft in werkelijke samenhangen tusschen de gebeurtenissen van 1618 en de vorming der staatsgezinde partij. De politieke houding van verschillende groepen in de Republiek, met name de gewijzigde gevoelens van de rechtzinnige predikanten, zou in het licht moeten worden gesteld. Het onderzoek moet gebaseerd zijn op gedrukte en ongedrukte bronnen, vooral de laatste, in den ruimsten zin des woords.

De antwoorden moeten worden ingezonden vóór of op den **1en Januari 1934,** opdat zij vóór den 1sten April 1935 kunnen beoordeeld worden.

VOOR HET JAAR 1933.

Directeuren van Teyler's Stichting en de Leden van Teyler's Tweede Genootschap deelen mede, dat zij hebben besloten voor het jaar 1933 de volgende prijsvraag uit te schrijven:

> Gevraagd wordt eene studie over de Expansie der zeventiende-eeuwsche Hollandsche Schilder-

kunst, met name een gedocumenteerd overzicht van den invloed, dien onze toenmalige schilderkunst naar onderwerp, opvatting, compositie, stijl, kleur en techniek heeft geoefend op die van andere landen.

Het onderzoek zal o.m. moeten uitgaan van de gedrukte gegevens omtrent:

1e het verblijf van vreemde schilders in Holland (Vlamingen, Franschen, Duitschers, Engelschen e.a.),

2e het verblijf van Hollandsche schilders in den vreemde, onder meer in de Zuidelijke Nederlanden, Engeland, Duitschland, Frankrijk, Spanje, Portugal, Italië, Rusland, Denemarken, Skandinavië, Azië (o.a. Oost-Indië en Perzië), Noord- en Zuid-Amerika,

3e den export van Hollandsche schilderkunst naar andere landen, bijv. naar Zweden door agenten van Koningin Christina, en naar Rusland, Frankrijk, Amerika enz., via agenten of door den kunsthandel.

Aan de hand van bovenbedoelde gegevens en de in aanmerking komende kunstwerken, moet een overzicht worden gegeven van den invloed, dien de aldus in het buitenland bekend geworden 17de-eeuwsche Hollandsche kunst op de buitenlandsche heeft gehad, vooral in de 17de, 18de en 19de eeuw (bijv. in Duitschland op Dietrich, Seekatz e.a., in Engeland op Gainsborough, Sir Josua Reynolds e.a., in Frankrijk op de school van Barbizon, enz.)

Het gebruiken van onuitgegeven bronnen zal op prijs worden gesteld, doch wordt niet verlangd.

De antwoorden moeten worden ingezonden vóór of op den 1en Januari 1935, opdat zij vóór den 1sten April 1936 kunnen beoordeeld worden.

De prijs voor het best en voldoend antwoord bestaat in een gouden eerepenning, op den stempel des Genootschaps geslagen, ter innerlijke waarde van ƒ 400.—.

De verhandelingen moeten in het Nederlandsch, Fransch, Engelsch of Hoogduitsch, met eene *Latijnsche* letter, vooral goed en leesbaar geschreven zijn door eene *andere hand, dan die van den opsteller* (*of met de schrijfmachine*). Ook moeten zij vóór den bepaalden tijd *in haar geheel* worden ingezonden; geene antwoorden, waaraan eenig gedeelte bij de inlevering ontbreekt, zullen tot het dingen naar den gemelden eereprijs worden toegelaten.

Alle ingezonden stukken blijven het eigendom des Genootschaps, dat de bekroonde verhandelingen, met of zonder vertaling, in zijne werken opneemt, zonder dat de schrijvers, anders dan met toestemming der Stichting, die mogen uitgeven. Ook behoudt het Genootschap aan zich het recht om van de niet bekroonde stukken zoodanig gebruik te maken als het raadzaam zal oordeelen, hetzij zonder of met vermelding van den naam des schrijvers; in het laatste geval echter niet zonder zijne toestemming. Ook worden geene afschriften van de niet bekroonde stukken aan de schrijvers verleend, dan te hunnen koste.

De in te zenden antwoorden moeten, zonder naam en alleen met een spreuk onderteekend, vergezeld van een verzegeld briefje dezelfde spreuk ten opschrift voerende en van binnen des schrijvers naam en woonplaats behelzende, gezonden worden *aan het Fundatiehuis van wijlen den Heer* P. TEYLER VAN DER HULST *te Haarlem.*

CONFÉRENCES FAITES DANS LA FONDATION TEYLER

1929. A. D. FOKKER, OVER DE AKOESTIEK VAN ZALEN, VAN MUZIEKINSTRUMENTEN EN VAN DE MENSCHELIJKE STEM (3 conférences).

A. D. FOKKER, KRACHTEN EN BEWEGINGEN (3 conférences).

1930. A. D. FOKKER, BEWEGINGEN IN VLOEISTOFFEN EN GASSEN (3 conférences).

1931. A. D. FOKKER, OVER WIND EN REGEN (3 conférences).

1932. A. D. FOKKER, OVER KLEUREN EN HAAR BETEEKENIS (3 conférences).

1933. C. J. GORTER et A. J. RUTGERS, HET PERIODIEK SYSTEEM (3 conférences).

№ 263

Aus den Beständen der Niedersächs. Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen ausgeschieden.
Göttingen, den 11. AUG. 1966

ARCHIVES

DU

MUSÉE TEYLER

SÉRIE III, VOL. VII.

FASCICULE 1.

A. D. **Fokker**, Sur l'acoustique des salles, des instruments de musique et de la voix humaine (Conférences). 1
M. **Nuyens** et G. Th. **Philippi**, Sur la Forme d'un Réflecteur du Son. 65

HAARLEM. — LES HÉRITIERS LOOSJES.
1929.

N: 263

OVER DE AKOESTIEK VAN ZALEN, VAN MUZIEKINSTRUMENTEN EN VAN DE MENSCHELIJKE STEM

ZATERDAGMIDDAGVOORDRACHTEN IN TEYLER'S STICHTING
OP 2, 9 EN 16 FEBRUARI 1929

DOOR

A. D. FOKKER.

I. Akoestiek in de open lucht.

Het allereenvoudigste is de akoestiek buiten. Indien men daar met zijn beiden is, is er geen akoestisch probleem. Men kan een gesprek voeren, en elkander goed verstaan, tenzij de onderlinge afstand te groot wordt.

Indien men fluistert, zal men op 3 meter afstand ophouden volledige zinnen te verstaan, hoewel gefluisterde losse lettergrepen op nog wel grooteren afstand worden verstaan. Spreekt men met luide stem, dan kan men tot op 20 meter nog vragen en antwoorden, maar op grooteren afstand zal geen gesprek meer mogelijk zijn, daar kan men nog slechts geroep verstaan.

Hier treedt het eerste akoestische probleem aan den dag. De scheepsroeper tracht daaraan een oplossing te geven. Door om den mond heen een kegelvormig, hard, het geluid terugkaatsend scherm te zetten tracht men te bereiken dat het geluid zich niet zijdelings, doch meer voornamelijk in de richting van den toegesprokene uitbreidt, en dit gelukt ook ten deele.

Een tweede akoestisch probleem ontstaat, wanneer een redenaar, buiten, een menschenmenigte heeft toe te spreken. Indien het aantal toehoorders wat groot is, kunnen zij niet allen binnen 20 meter aansluiten. Een compagniescommandant zal de compagnie, indien zij in frontcolonne staat opgesteld, nog maar juist kunnen toespreken, mits hij langzaam en luid spreekt. Hier doet zich, behalve de afstand, ook als moeilijkheid gevoelen dat de vooraanstaanden het geluid onderscheppen, en deze moeilijkheid wordt nog ernstiger doordat buiten, tengevolge van een naar boven afnemende temperatuur en vochtigheid der luchtlagen, de geluidstralen omhoog gekromd worden: een akoestische atmosferische refractie.

Heeft men dan ook een grootere menigte toe te spreken, hetzij als bataljonscommandant, hetzij als redenaar op een meeting, dan moet men zorgen, dat het geluid over de voorste rijen heen de verderafstaanden kan bereiken: men moet dan te paard stijgen of een tribune beklimmen. Een andere oplossing van deze moeilijkheid zou zijn, dat men de meer naar achter staanden eene hoogere plaats geeft. Op de helling van een heuvel of berg verstaat men uitstekend wat aan den voet van den heuvel wordt gezegd. In omgekeerde richting is dat bijna onmogelijk.

Doet men beide dingen: geeft men het gehoor plaats op eene oploopende helling, en betreden de sprekers een verhoogd podium, stelt men bovendien achter de sprekers een rechten wand op, die het geluid weerkaatst, dan heeft men de inrichting van het antieke amphitheater.

Vaak hoort men hoog opgeven van de voortreffelijkheid der akoestiek dier antieke amphitheaters. Eenige twijfel daaromtrent rijst, indien men bedenkt, dat maskers, die door de acteurs werden opgezet, bij den mond trechtervormig gevormd waren tot een soort kleine scheepsroepers. Waartoe deze maatregel, indien werkelijk de akoestiek niets te wenschen liet?

Hoe het zij, het is goed de akoestisch essentieel belangrijke factoren in het oog te vatten. Deze zijn drieërlei: de verhoogde plaats

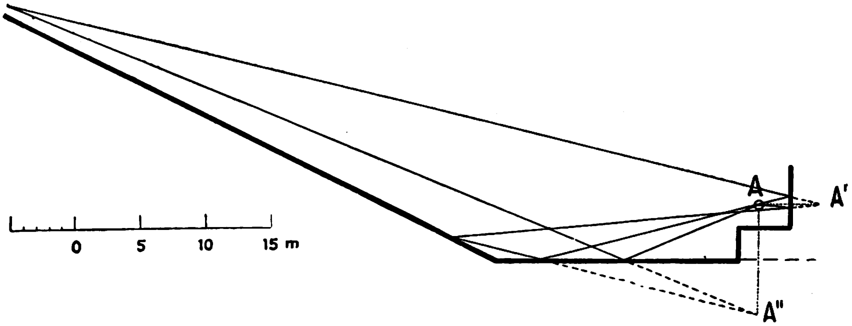


Fig. 1.

Doorsnede van een Grieksch amphitheater. Van de geluidsbron A worden door kaatsing aan achterwand en orchestravloer de beelden A′ en A″ gevormd.

van de sprekers, de sterk oploopende (omgekeerde) kegel van de cirkelvormige zitrijen, en de terugkaatsende wand dicht achter de sprekers. Indien het half-cirkelvormige plein in het midden (orchestra) vlak en hard is, en onbezet, zal ook dit ertoe bijdragen dat nog meer geluid naar het auditorium komt. In de figuur zijn de kegels van geluidstralen geteekend, die van den spreker (A) na weerkaatsing aan den achterwand (schijnbaar uit A′) en aan den orchestravloer (schijnbaar uit A″) naar het auditorium komen. Indien de orchestravloer door zonbestraling heet is, zal men in de van beneden verwarmde lucht een kromming van de geluidsstralen krijgen, die maakt dat ook nog steiler naar beneden gerichte stralen na reflectie nog in het publiek op de bovenste rijen komen.

Hoofdzaak is dat geluid, hetwelk anders in de wijde lucht verloren zou gaan, in stede daarvan bij luisterende ooren komt. Daartoe strekt de achterwand, daartoe strekt de hoogte op welke men plaats voor hoorders gemaakt heeft. Maar naar boven kan het geluid nog steeds ontwijken. Indien men ook daar nog een wand zou aanbrengen, een zoldering, zou ook dit gedeelte van het geluid nog kunnen worden benut.

Aldus komt men tot een besloten ruimte, tot een zaal. Daarin zal met minder inspanning een spreker zich tot een grooter gehoor kunnen wenden. Er behoeft hier geen geluid verloren te gaan. Het gevaar dat echter ontstaan kan doordat men te veel geluid krijgt, niet te sterk, maar te lang doorklinkend, zullen wij aanstonds nader onder de oogen zien.

Het is u bekend dat wij bij het geluid moeten denken aan een snel trillende beweging in de lucht. De luchtdeeltjes verkeeren in trilling, over zeer geringen afstand weliswaar, maar eenige honderden malen per seconde heen en weer. Alle geluidsbronnen verkeeren in trilling: bij een stemvork en bij een snaar van een cello zien wij dat, en wij gevoelen het wanneer wij een klinkende klok met de hand dempen, of wanneer wij de vingers onder het spreken tegen het strottenhoofd leggen. Afwisselend dwingt de geluidsbron de lucht om voor haar beweging te wijken, en zuigt zij de lucht achter haar beweging aan. Rondom breiden zich dientengevolge gebieden uit waar de lucht afwisselend wat samengedrukt is, of wat verdund: snel groeiende, meest bolvormige schillen van plaatsen waar de lucht ietwat verdicht, en waar ze een weinig verdund is, met geleidelijke overgangen daartusschen.

Wij spreken in beeldspraak van geluidsgolven, denkende aan de uitbreiding van de golfkringen die wij op het water zoo dikwijls zien. Ook daar verplaatsen de waterdeelen zich maar weinig, er is geen strooming, maar de kringen van verheffing en van inzinking breiden zich uit. Een golffront noemen wij een kring van deeltjes die tegelijk hun grootste uitwijking vertoonen. Zoo ook bij het geluid.

Bij elke pulseering zendt de geluidsbron een geluidsfront de wereld in. Den afstand tusschen twee opeenvolgende golffronten noemen wij golflengte.

Die golffronten verplaatsen zich evenwijdig aan zichzelf, zoodat een bolvormig golffront zich met behoud van den bolvorm vergroot, en een plat golffront plat opschuift. Een cylindervormig golffront zal den cylindervorm blijven behouden.

De snelheid waarmede de stukken van een golffront zich evenwijdig aan zichzelf voortplanten is 340 m per sec in lucht van 20° C. Met deze groote snelheid verbreidt zich de energie der geluidsgolven, zonder dat er noemenswaard van verloren gaat, tot de golven op hindernissen of belemmeringen stuiten. Dan worden zij teruggekaatst. Bij deze terugkaatsing gaat steeds een gedeelte der geluidsenergie verloren. Soms is het maar weinig, dikwijls is het een aanmerkelijk deel der opvallende geluidsenergie, dat door den wand bij de terugkaatsing wordt opgenomen, geabsorbeerd, en in warmte omgezet.

Wij kunnen ons de voorstelling van de voortplanting en terugkaatsing verlevendigen door de opzettelijke aanschouwing van golfrimpels op een watervlak ¹).

---

¹) Ter projectie plaatst men onder een waterbak met bodem van spiegelglas een booglamp; het licht schijnt door het water naar de zoldering of in een spiegel, die het op den muur werpt. Golfrimpels geven, door de veranderlijke kromming van het wateroppervlak, een teekening op de zoldering of den muur.

II. De Nagalm in Zalen.

Indien de wanden eener besloten ruimte de opvallende geluidsgolven volkomen zouden terugkaatsen zonder eenige verzwakking door absorptie, zou het geluid in die ruimte nimmer uitsterven. Het zou niet mogelijk zijn in die ruimte verstaanbaar te spreken. Elke volgende lettergreep zou slechts het voortdurende geraas van de vorige vermeerderen. Men gevoelt het gevaar dat er schuilt in een teveel aan geluid, indien dit niet, nadat het nuttig op de ooren heeft ingewerkt, bijtijds uitsterft. Voor dit verdwijnen van het om zoo te zeggen afgewerkte geluid, dat in de antieke amphitheaters in de open lucht verdween, moeten, indien een besloten ruimte geen openstaande ramen heeft, de wanden, beter gezegd de wandbekleedingen zorgen. Zij mogen niet volkomen geluidkaatsend zijn. Een breukdeel van den stroom van geluidsenergie die erop valt, moet worden geabsorbeerd. Deze fractie heet de absorptiecoëfficiënt. Hoe snel zullen wanden met een bepaalden absorptiecoëfficiënt het geluid doen uitsterven?

Laat ons dit in een gedachte-voorbeeld nagaan. Stel in een rechthoekige zaal staan twee wanden 17 m van elkander. De absorptiecoëfficiënt zij 0,26, zoodat bij terugkaatsing eener geluidsgolf 26% der energie in den wand wordt opgeslorpt. Laat in die zaal een platte golf, met een front evenwijdig aan die wanden, tusschen de wanden heen en weer gekaatst worden. Per seconde zal de golf 20 terugkaatsingen moeten verduren. Na $^1/_{20}$ sec, na de eerste terugkaatsing, zal in de golf nog maar 0,74 van de oorspronkelijke energie over zijn. Na $^1/_{10}$ sec zal de geluidsenergie door een tweede terugkaatsing verder verzwakt zijn tot $0,74 \times \times 0,74 = 0,55$ van haar beginwaarde. Op $^2/_5$ sec na het begin zal als gevolg van de vier terugkaatsingen de energie afgenomen zijn tot $0,74^4 = 0,30$ der beginwaarde, en zoo vervolgens. Wij kunnen deze waarden vereenigen in een tabel:

na seconde:	0,05	0,10	0,15	0,20	0,40	0,80	1,00
overblijfsel	0,74	0,55	0,41	0,30	0,09	0,008	0,0025

en wij kunnen die waarden ook in een figuur teekenen.

Wij merken op, dat telkens na eenzelfde tijdsinterval de geluids-

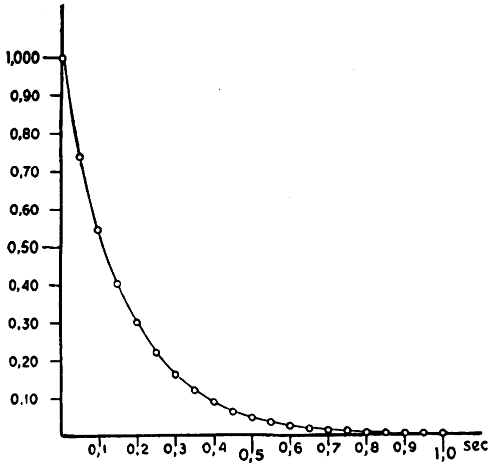


Fig. 2.
Voorstelling van exponentieel afnemen.

energie in eenzelfde reden is verminderd. Vormen de tijdsduren na het begin een toenemende rekenkundige reeks, dan vormen de geluidsenergieën een afnemende meetkundige reeks.

Wij zouden ook hebben kunnen beschouwen niet een enkele geluidsgolf, maar een lange reeks van opelkaarvolgende, die niet tegelijkertijd, maar de een na de andere, zouden worden teruggekaatst, zoo dat er aan het begin van het beschouwde tijdsinterval golven van verschillenden ouderdom vertegenwoordigd zijn, d. i. golven die eenmaal en die twee maal, en die alle mogelijke aantallen malen zijn teruggekaatst geworden. Het effect is, dat wij in de figuur, die het afnemen der geluidsenergie voorstelt, de afzonderlijke punten door een vloeiende lijn moeten verbinden. Nog blijft gelden dat na gelijke tijdsintervallen de opvolgende aanwezige energiebedragen een afnemende meetkundige reeks vormen.

De manier van wegsterven die wij hier leeren kennen heet exponentieel mettertijd afnemen.

Karakteristiek voor de mate van wegsterven is het tijdsverloop waarin de geluidsenergie afneemt tot op een bepaalde fractie van haar beginwaarde. Omdat de geluidsterkten, die wij flink luid vinden, ongeveer miljoen malen de sterkte zijn, die wij juist nog kunnen hooren, definieeren wij, op het voetspoor van W. C. Sabine, den karakteristieken nagalm als een tijdsduur, waarin het geluid tot op een miljoenste afneemt. Dat is dan ongeveer het tijdsverloop, gedurende hetwelk wij nog iets hooren kunnen in een ruimte, nadat een geluidsbron, die heeft staan klinken, plotseling daarmede opgehouden is.

In het gegeven getallenvoorbeeld zou na 2,3 sec de geluidsenergie afgenomen zijn als van 1,04 miljoen tot 1, als nagalm zou dus mogen gelden 2,3 sec. In het voorbeeld zou de nagalm twee malen korter geworden zijn, indien de twee wanden op twee maal korteren afstand van elkander stonden. Immers, dan zou er 40 malen per sec een reflectie en verzwakking der geluidsgolven plaats hebben instede van 20 maal, en het geluid zou dus in de helft van den vroegeren tijd moeten uitsterven. Ook zou de nagalm twee malen korter worden, indien elke terugkaatsing de geluidsgolf even sterk verzwakte als vroeger twee terugkaatsingen deden, dat is de teruggekaatste geluidsenergie tot op 0,55 van de invallende brachten. Een absorptiecoëfficiënt 0,45 inplaats van 0,26 zou dus den nagalm tot op de helft bekorten.

Wallace Clement Sabine is de eerste geweest, die het probleem van den nagalm aan een stelselmatig proefondervindelijk onderzoek heeft onderworpen. Zijn werk vindt men verzameld in eene uitgave van de Harvard University Press [1]). Hij heeft kunnen vaststellen, dat, althans in eerste benadering, in een bepaalde zaal

1. de nagalm, bij onveranderde opstelling en sterkte van de geluidsbron, voor den waarnemenden luisteraar gemiddeld even lang aanhield, op welke plaats deze zich ook zette,
2. de nagalm, bij vaste plaats van den waarnemer, gemiddeld even lang duurde, ongeacht in welke verschillende plaatsen de geluidsbron opgesteld werd,
3. de nagalm, gewijzigd door het binnenbrengen van geluidabsorbeerend materiaal, onverschillig was voor de plaats waar men dit materiaal aanbracht.

Voorts kon hij ook experimenteel aantoonen dat het geluid van den nagalm op exponentieele wijze wegstierf.

Eerst nadat deze feiten vastgesteld zijn, kan men van *den* nagalm eener zaal, als van een bepaalde akoestische eigenschap eener zaal, spreken. Zooals reeds eerder werd vermeld, bedoelt men dan het tijdsinterval, gedurende hetwelk de geluidsterkte tot op een millioenste, 10^{-6}, van de aanvankelijke sterkte afneemt.

Aan ons sterk vereenvoudigde voorbeeld is reeds gebleken, dat de nagalm korter wordt, naarmate het volumen der ruimte afneemt, en ook dat hij afneemt, naarmate het absorbeerend vermogen der wanden toeneemt.

---

[1]) W. C. Sabine, Collected Papers on Acoustics, Harvard University Press, 1923.

Wij willen thans een iets minder grove beschouwingswijze volgen, die ook in aanmerking neemt, dat er in alle mogelijke richtingen geluidsgolven door de kamer loopen en elkander doorkruisen. Wij zullen uitgaan van de vereenvoudigende onderstelling, dat de geluidsenergie in een zaal gelijkmatig over het volumen verdeeld is. Bij volkomen terugkaatsende wanden zou daarin nooit verandering komen. Maar laat ons in een dier volkomen reflecteerende wanden een opening maken, laat ons plotseling een venster openen. De geluidsgolven, die op deze opening toekomen, zullen doorloopen; hun energie komt niet meer in de kamer terug, er is een geluidslek, en voor de zaal is het alsof de wand dat weglekkende geluid vernietigt.

Indien er per volumeneenheid in de zaal aan geluidsenergie aanwezig is u erg/m^3, en indien met de geluidsnelheid w, van 340 m/sec, deze energie uitsluitend loodrecht op het raam, dat een opening van A m^2 moge hebben, liep, zoo zou er per seconde weglekken een energie $\frac{1}{2}\, w\, A\, u$ ergen. De factor $\frac{1}{2}$ is hier bijgevoegd, omdat de helft der geluidsenergie naar rechts, en de helft naar links loopt. Zoo simpel is echter het geval niet. Het geluid loopt kriskras in verschillende richtingen. Naarmate geluidstralen scheef op het raam toeloopen, is de dwarsdoorsnede van den bundel, die door de opening ontsnapt, kleiner. Voorts zijn er, ruw gesproken, betrekkelijk meer scheeve richtingen naarmate zij scheever staan. Indien men met dit alles rekening houdt, vindt men dat de factor $^1/_2$ moet worden vervangen door $^1/_4$ [1]. Voor de vermindering van de in de zaal aanwezige totale geluidsenergie, $V u$, moet men dus rekenen

$$\frac{d\ Vu}{dt} = -\frac{1}{4}\, w\, A\, u,$$

en daaruit vindt men

$$u = u_0\, e^{-t w A/4 V},$$

waarin u_0 de aanvangswaarde der energiedichtheid voorstelt. Vragen wij naar den nagalm, T, dat is de tijd dien wij wachten moeten opdat u zal zijn afgenomen tot op een millioenste — dat is $10^{-6} = e^{-13,8}$ — van u_0, dan moeten wij schrijven

---

[1] A. D. Fokker, *Sabine's formule voor den nagalm*, Physica 7, p. 198, 1927.

$$-13{,}8 = -T\frac{wA}{4V},$$

en dus

$$T = \frac{55{,}2\ V}{w\ A}\ \text{sec.}$$

Neemt men voor w de waarde 340 m/sec, dan vindt men 0,162 V/A sec, nagenoeg met den factor 0,164 dien SABINE opgeeft als uitkomst zijner metingen. Om de formule gemakkelijk te onthouden kan men stellen

$$T = \frac{1}{6}\frac{V}{A}\ \text{sec},$$

waarbij het volumen der zaal in m^3, en het raamoppervlak A in m^2 moet uitgedrukt worden.

Indien wij nu te maken hebben met een zaal welker wanden niet volkomen reflecteeren, en waarin geen raamopening is, kunnen wij toch dezelfde formule blijven gebruiken. Immers, gelijk SABINE opgemerkt heeft, zes vierkante meters van een wand die een absorptiecoëfficiënt $^1/_6$ heeft zullen evenveel geluidsenergie per seconde absorbeeren als een enkele vierkante meter die alles absorbeert, als een open raam van 1 m^2. En aangezien het voor den nagalm er niet toe doet waar het absorbeerende materiaal wordt aangebracht, kan ik de gegeven formule blijven gebruiken, mits ik onder A het absorbeerend vermogen der zaal versta, uitgedrukt in het oppervlak van een raam, dat evenveel energie zou doorlaten als er geluid per seconde in de zaal wordt geabsorbeerd.

Ziedaar dan de in de tegenwoordige akoestiek beroemde formule van SABINE, voor welke de vorige week dr. M. J. O. STRUTT een wiskundig exacte afleiding gegeven heeft [1]). Dezen samenhang tusschen nagalm, volumen en absorbeerend vermogen te onderkennen uit zijne metingen, die de eerste waren in een geheel onontgonnen gebied, is van SABINE een eerbiedwaardig stuk werk geweest, dat getuigenis aflegt van zijn langdurig geduld, van zijn nauwgezetheid en scherpzinnigheid.

Zijn formule stelt ons in staat, bij het ontwerpen van zalen den nagalm van te voren te berekenen, en door geschikt gekozen maatregelen binnen aannemelijke grenzen te houden.

De berekening van het volumen eener zaal is eenvoudig genoeg.

---

[1]) M. J. O. STRUTT, *Het probleem der demping*, Physica 9, p. 161, 1929. *On the acoustics of large rooms*, Phil. Mag. 8, 236, 1929.

Om het absorbeerend vermogen te berekenen, moet men behalve de oppervlakten der wanden, vloer en zoldering, ook de absorptiecoëfficiënten van de bekleedingsmaterialen kennen. Het absorbeerend vermogen is het product van absorptiecoëfficiënt en oppervlak in m^2. Voor een groot aantal materialen zijn die coëfficiënten bepaald, en men vindt een opsomming in boeken over akoestiek [1]). Om enkele voorbeelden te noemen, laten wij enkele daarvan hier volgen:

Absorptiecoëfficiënten.

open raam	1,00	olieverfschilderijen	0,28
baksteen	0,025	houtlambriseering	0,06
beton	0,015	vernist houtwerk	0,03
glas	0,027	onbeschilderd vilt, 1 duims	0,55
pleisterwerk	0,033	,, ,, 2 duims	0,70
marmer	0,01	linnen gordijnen	0,15
linoleum	0,03	wollen gordijnen	0,23
cocosmat	0,17	geelkoper	0,17
tapijten	0,20		

Ook de meubileering van een zaal, stoelen, tafels en banken hebben een absorbeerend vermogen. Per zitplaats op houten banken kan men rekenen op 0,009 m^2, voor banken met kussens per zitplaats 0,2 m^2. Voor een afzonderlijke vrouw bepaalde SABINE het absorbeerend vermogen 0,54 m^2, voor een afzonderlijk manspersoon 0,48 m^2. Dooreengenomen rekent hij voor een aaneengesloten auditorium per persoon 0,44 m^2, of, wanneer men het oppervlak van het auditorium als maatstaf neemt, een absorptiecoëfficiënt van 0,96.

Een andere vraag is, welke duur van den nagalm aesthetisch de meest gewenschte is. Ongetwijfeld heeft de nagalm een nuttige functie: de versterking van het geluid dat onze ooren bereikt. Maar te lang mag de nagalm ook niet duren, want dan vloeien alle articulaties van het geluid door elkaar, hetzij in de lettergrepen der spreekstem, hetzij in de snelle passages van muziekinstrumenten.

De akoestische kwaliteit eener zaal die door den nagalm wordt gekarakteriseerd heeft een tweezijdige werking: zoowel op het wegsterven van het geluid als op het aanzwellen, wanneer een geluidsbron begint te klinken. Stel dat wij een orgelpijp laten klinken gedurende zoo langen tijd, dat de geluidsterkte in de zaal stationair geworden is. Naarmate er meer geluidsenergie in de zaal is, en gedurig op de wanden valt, zullen deze ook meer absorbeeren. Vult de orgelpijp de zaal met geluidsenergie, dan zal er ten slotte zooveel per seconde worden geabsorbeerd, dat dit verlies maar juist wordt goedgemaakt door hetgeen de orgelpijp aan geluidsenergie per seconde suppleert. Dan wordt de energie-inhoud stationair. Breken wij nu den luchtstroom plotseling af, dan sterft de geluidsenergie exponentieel weg (fig. 3, *a*).

---

[1]) Bijv. A. H. DAVIS and G. W. C. KAYE, Acoustics of Buildings, G. Bell & Sons, 1927; of: Circular 300 (25 febr. 1926), Bureau of Standards, Washington.

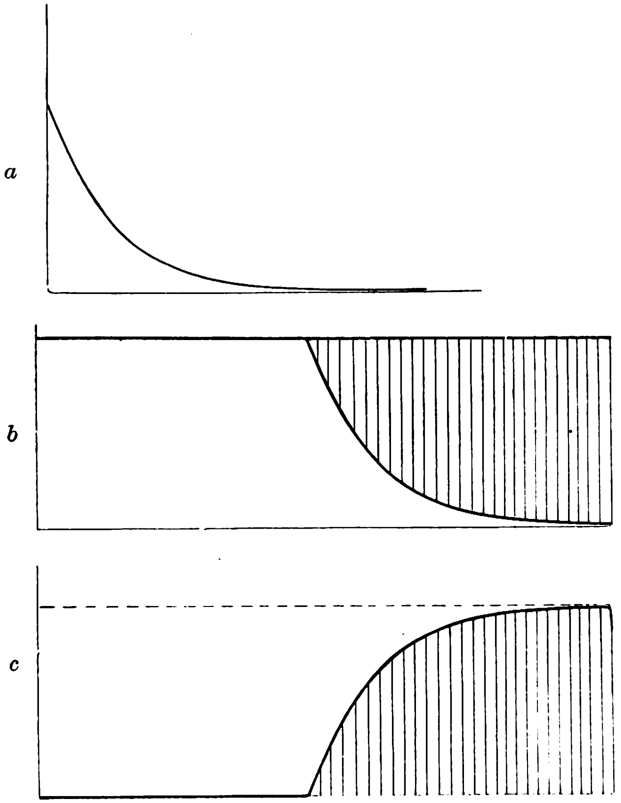


Fig. 3.
Afnemen en aanzwellen van geluidsinhoud eener zaal.

Stel dat wij twee gelijke orgelpijpen hebben, waarvan er een klinkende de geluidsenergie in de zaal stationair houdt. Laat op hetzelfde oogenblik deze pijp ophouden, en de ander beginnen. Wij zullen dan in de zaal dezelfde stationaire geluidsenergie blijven houden, hoewel, zooals wij weten, het van de eerste pijp afkomstige geluid exponentieel wegsterft. Het geluid van de tweede afkomstig, en in de zaal aanwezig, moet dit dus juist weer goedmaken (fig. 3, *b*). Wij besluiten, dat bij het aanzetten van een constante geluidsbron de geluidsinhoud der zaal exponentieel toeneemt (fig. 3 *c*).

In hetzelfde interval, waarin het geluid bij afzetten der pijp tot de helft zou wegsterven, zal het bij aanzetten zwellen tot de helft van de definitieve waarde. In hetzelfde interval, waarin bij afzetten het geluid wegsterft tot op $^1/_{10}$, zal bij aanzetten het zwellen tot op $^9/_{10}$ van de sterkte die het zal kunnen bereiken.

Voor den gemiddelden duur van een lettergreep rekent men $^1/_5$ seconde. Indien de nagalm 1 seconde bedraagt, zal in 1 sec de geluidsterkte in de zaal afnemen tot op 10^{-6}, d. i. nagenoeg 2^{-20}. In $^1/_5$ sec. zal de sterkte dus afnemen tot 2^{-4} of $^1/_{16}$ van de aanvankelijke waarde, ongeveer 6%. In dit geval mag men verwachten, dat de syllaben niet te zeer door elkander heen zullen gehoord worden. In $^1/_{10}$ sec zal de sterkte afgenomen zijn tot op $^1/_4$. Bij den aanhef van een woord zal dus, omgekeerd, in $^1/_{10}$ sec het geluid op $^3/_4$ gekomen zijn van de volle kracht, die bij lang aanhouden van den klank zich zou instellen. Voor het gesproken woord mag men dit bevredigend achten. Een nog kortere nagalm, van 0,7 sec, zou beter voldoen. Een nagalm van 1,5 sec of langer is voor het gesproken woord reeds aan bedenking onderhevig.

SABINE heeft ter gelegenheid van de inrichting van een nieuw muziekconservatorium in nog ongemeubelde kamers van verschillende grootten door muziekkundigen van smaak hun oordeel laten uitspreken over de welklinkendheid van pianomuziek bij verschillende nagalmen. In elk der kamers werden zoo veel geluidabsorbeerende kussens binnengebracht of weggenomen als noodig bleek om de musici zoo goed mogelijk te bevredigen. Daarna heeft hij experimenteel in de verschillende ruimten, in de volgens deskundig oordeel optimum-conditie, den nagalm bepaald en, telkens met verrassend scherpe overeenstemming, gevonden 1,1 sec.

Het is mij niet bekend of er op dezelfde wijze opzettelijke, vergelijkende en metende proeven zijn ingesteld om te weten welke nagalm het best de zangstem, of een viool, of een orkest flatteert. Uit de gegevens van zalen, die een goeden roep genieten, schijnt te blijken dat voor orkestmuziek en voor opera een nagalm van 2,3 seconde gewenscht is. Dit is een gansch andere eisch dan voor pianomuziek of voor een spreekstem. Men kan dan ook gemakkelijk opmerken, dat een klavier in een concertzaal met orkestbegeleiding geheel anders klinkt dan in een kleine zaal voor kamermuziek. Ook moet men het als een onvervulbare eisch beschouwen, dat een schouwburg tegelijk voor opera en voor tooneel zou voldoen. Het tooneel immers verlangt een veel scherpere articulatie, en daartoe een korteren nagalm, dan de opera!

Ik mag niet verzwijgen, dat enkele auteurs meenen op te merken, dat de wenschelijke en toelaatbare duur van den nagalm ook afhangt van de grootte der zaal. Er wordt aangegeven dat de nagalm evenredig mag zijn met den derden machtswortel uit het volumen. Deze meening is gegrond op het oordeel der publieke opinie over verschillende bekende zalen.

Ik kan mij slecht voorstellen, dat deze invloed van het volumen zou bestaan in een verbetering van de kwaliteit van het geluid. Eerder ben ik geneigd te gelooven dat men, noodgedwongen, in grootere zalen met een langeren nagalm genoegen neemt. Immers, wil men door versterkte absorptie den nagalm sterk reduceeren, dan verzwakt men tevens de bereikbare geluidssterkte. Wij zagen dat de wanden, bij een absorptievermogen A m^2, absorbeeren $^1/_4\ wAu$ erg/sec., als u de per m^3 aanwezige geluidsenergie is. Bij een stationairen geluidsinhoud der zaal wordt dit juist aangevuld door hetgeen de geluidsbron levert. Indien A toeneemt, zal dezelfde geluidsbron het niet verder kunnen brengen dan tot een geringere sterkte van u.

Indien men het volumen der zaal 8 maal gelijkvormig zou willen vergrooten, zou men, om den nagalm even lang te laten blijven, ook het absorbeerend vermogen 8 maal moeten vergrooten. De voor een spreker bereikbare geluidsterkte wordt daarmede echter 8 maal zoo klein. Om met een orkest in de vergroote zaal, die denzelfden nagalm zou hebben, hetzelfde effect te krijgen, zou de bezetting 8 maal zoo sterk moeten zijn. Dit maakt, dat het publiek, terwille van een grootere geluidsterkte, zich tevreden zal verklaren met een langeren nagalm, al lijdt daaronder ook de duidelijkheid van het geluid.

Wij zullen over de zeer groote zalen nog nader spreken (blz. 22), en zullen ons voor zalen met volumina van omstreeks 10000 m^3 aan de gegeven eischen wat den nagalm betreft houden.

Echter kan men niet verzekerd zijn van een goede akoestiek wanneer men uitsluitend op den nagalm let.

Weliswaar hangt de nagalm niet in de eerste plaats af van de opstelling van het absorbeerend materiaal, dat neemt niet weg, dat deze opstelling wel degelijk van invloed is op de akoestiek. Het ligt voor de hand dat de absorbentia, die den nagalm moeten beperken, van het meeste nut zijn, wanneer zij het geluid opnemen nadat het eerst zijn weg van den spreker naar den hoorder gevonden heeft. Wij moeten met de geluidsenergie zuinig zijn, en wij behooren ze niet aan vernietiging bloot te stellen zoolang ze nog niet langs den hoorder geweest is. Ik denk nu aan een mij bekende gehoorzaal, waar rondom de sprekerstribune een groot tapijt den vloer bedekt, terwijl achter hem een groot schilderij den ganschen wand beslaat. Tapijt en schilderij nemen 25% van de opvallende geluidsenergie weg, voordat deze kans heeft gehad de woorden te helpen overbrengen. Dat is verspilling. Gelukkig is deze zaal niet zeer groot.

Het doelmatigst brengt men de absorbentia aan achter het auditorium, of op de bovengedeelten van de verticale wanden, terwijl men achter en terzijde van den spreker of van het orkest bij voorkeur voor harde wanden met groot terugkaatsend vermogen zal zorgen.

Men kan zeggen dat de nagalm ons oriënteert over den te verwachten invloed der diffuse en der herhaalde reflecties van het geluid. Evenals men in een verlichte zaal direct licht heeft van de lampen, en voor een aanmerkelijk deel indirect licht door diffuse terugkaatsing van het directe licht aan zoldering, wanden en vloer, zoo hebben wij in een zaal directe geluidsoverbrenging, en een indirecte, door terugkaatsingen aan wanden en meubels. Voor zoover het diffuus overgebrachte geluid niet te veel later komt dan het directe, is het nuttig, voor zoover het te laat komt, is het schadelijk. Waar de grens ligt tusschen het nuttige, aangename en het storende, hangt van den aard van het geluid af. Voor een rede, voor zang- of orkestmuziek ligt de grens anders, en dat komt in den toelaatbaren nagalm tot uitdrukking.

Maar ook hier put de beschouwing van den nagalm het akoestische probleem niet uit. Wij moeten ons rekenschap geven van de effecten van niet-diffuse of herhaalde, maar van enkele, en gerichte reflecties, die zoowel gunstig als hinderlijk kunnen zijn. In aanmerking komt in het bijzonder de beschouwing van terugkaatsingen aan gekromde wandoppervlakken.

III. Focus en Echo.

Ter oriënteering zullen wij in het twee-dimensionale van het wateroppervlak in den golfbak reflecties aan gekromde wanden nagaan.

Allereerst zullen wij een schijf hout met cirkelvormige opening op het water laten drijven. De boven uitstekende rand kaatst de golven terug. Laten wij van het midden een cirkelgolf uitgaan, dan bereikt die overal tegelijk den terugkaatsenden rand, en de golf trekt zich, cirkelvormig blijvend, weer in het middelpunt samen. Dit laat zich hooren: elk deel van de golf zal in denzelfden tijd eenzelfden afstand afleggen, en na de terugkaatsing zullen dus alle deelen tegelijk in het midden terugkomen.

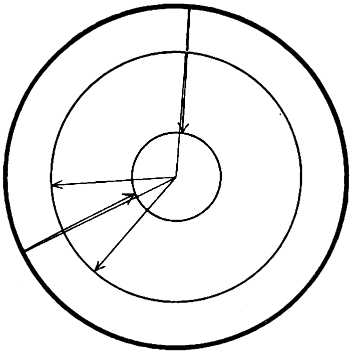


Fig. 4.
Terugkaatsing tegen cirkelwand.
Golf uit centrum.

Gaat de cirkelgolf van een excentrisch punt uit, dat niet te ver van het midden ligt, dan trekt ze zich na terugkaatsing weder als ongeveer een cirkelgolf nagenoeg samen in een excentrisch punt evenver aan de tegenovergestelde zijde van het midden. Wij spreken hier van een focus- of brandpuntwerking. Ligt echter de oorsprong van de golf te ver buiten het midden van den cirkelwand, dan is er geen sprake van dat de teruggekaatste golf een cirkel zou zijn en zich in het tegenpunt als in een focus zou samentrekken. De reden ligt voor de hand. De afstand tusschen deze twee punten via een punt van den cirkelomtrek verschilt nu zeer aanmerkelijk wanneer ik het eene of het andere omtrekpunt neem, en

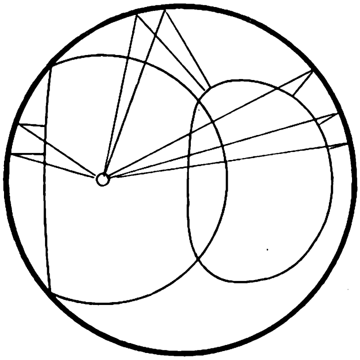


Fig. 5.
Terugkaatsing tegen cirkelwand.
Excentrische golf.

de verschillende golfdeelen, die deze verschillende wegen nemen, kunnen dus niet tegelijk aankomen.

De voorwaarde voor deze focusseering is klaarblijkelijk, dat al die wegen van den oorsprong naar het focus via den terugkaatsenden wand even lang zijn. Wij moeten het dus in den golfbak beproeven met een ellips. Inderdaad, wanneer wij een ellipsvormig uitgezaagde plank op het water leggen, en in het eene brandpunt het water aanraken, zal het teruggekaatste golffront een cirkelvorm hebben, die op het andere brandpunt afloopt en zich daarin samentrekt. Er is hier een wederkeerigheid tusschen de brandpunten: wat van het eene uitgaat, komt in het andere samen, en omgekeerd.

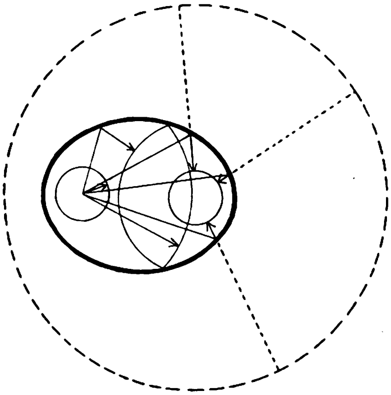


Fig. 6.
Terugkaatsing tegen ellipswand.
Focale golf.

U weet dat indien wij, met vasthouding van een brandpunt en van den top eener ellips, het andere brandpunt verder en verder wegschuiven, de ellips tenslotte tot een parabool nadert. Een golf die in het brandpunt haar oorsprong heeft, zal dus als cirkel om het oneindig verre tweede brandpunt daar heen loopen. Dat wil zeggen dat de teruggekaatste golf recht is geworden. Inderdaad: zagen wij een plank parabolisch uit, dan maakt deze paraboolwand uit een golf, die van het brandpunt uitgaat, een rechte golf. Omgekeerd: loopt een rechte golf op den paraboolwand in, dan maakt deze daarvan een stuk van een cirkelgolf die zich in het brandpunt samentrekt. Alle deelen van het golffront leggen in gelijke tijden weder gelijke wegen af.

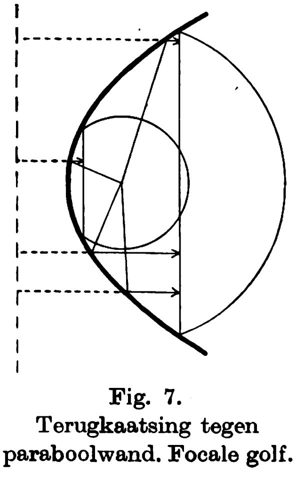


Fig. 7.
Terugkaatsing tegen
paraboolwand. Focale golf.

Vat men de parabool op als een „geopende" ellips, dan kan men de opening nog wijder maken en men krijgt een hyperbool. Deze heeft wederom twee brandpunten, maar het brandpunt ligt aan de andere zijde van den top. Een cirkelgolf die in het eene brandpunt haar oorsprong heeft, wordt nu weder als een cirkelgolf teruggekaatst, en weder als eene, die haar middelpunt in het andere brandpunt heeft (fig. 8). Echter loopt zij daarvandaan, omdat immers de kaatsende wand, waarachter dat brandpunt ligt, haar den anderen kant uitstuurt.

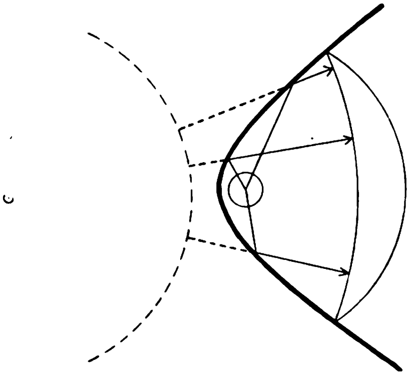


Fig. 8.
Terugkaatsing tegen hyperboolwand.
Focale golf.

Of een gekromde wand bij de terugkaatsing van golven deze zal focusseeren of niet, hangt van de kromming af. Bij de ellips was de kromming van den wand zoo sterk, dat de naar buiten gekromde golf veranderd werd in een naar binnen gekromde, d. i. een naar zijn middelpunt toeloopende. Indien men bedenkt, dat de terugkaatsende wand bij de terugkaatsing altijd halverwege moet liggen tusschen de teruggekaatste golf en de golf, zooals zij ongestoord zoude zijn doorgeloopen (fig. 9) dan volgt, dat de kromming van den wand het gemiddelde is van de krommingen der golven direct vóór en na de terugkaatsing. Rekent men voor een naar binnen gekromde golf de kromming negatief, dan moet men zeggen dat de kromming van den wand het halve verschil is tusschen de krommingen van invallende en teruggekaatste golf. Is de kromming van den wand $1/R$, die van de invallende golven $1/p$, en van de teruggekaatste $-1/q$, dan luidt deze stelling in formule:

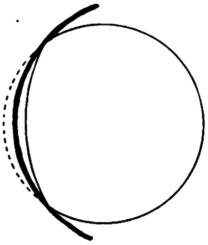


Fig. 9.
Krommingen van golf en wand.

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Indien de kromming van den wand de helft is van de kromming der invallende golf (top van parabool) dan heeft de teruggekaatste golf geen kromming over. Is de kromming van den wand sterker (top van ellips) dan komt de golf met een negatieve kromming terug, gefocusseerd. Is de kromming van den wand geringer (top van hyperbool) dan komt de golf met een positieve kromming terug, dat is, ze divergeert nog.

Indien men een cirkelvormige wand heeft, dan zal deze, al naar den afstand van de geluidsbron, d. i. naargelang van de kromming der invallende golven, bij benadering de werking hebben van een ellips, of van een parabool, of van een hyperbool.

Heeft men een willekeurig gekromden wand, dan kan men den vorm van de teruggekaatste golf vinden met behulp van de constructie van Christiaan Huygens. Men moet een lijn vinden zoodanig, dat alle stralen van de geluidsbron tot de golf even lang zijn. Men kan op de plaats van de geluidsbron een koord van bepaalde lengte vast maken. Houdt men een tweede punt van het koord aan den wand vast, dan kan het uiteinde een cirkeltje beschrijven, dat aangeeft, tot hoever een geluidsgolf via dit punt

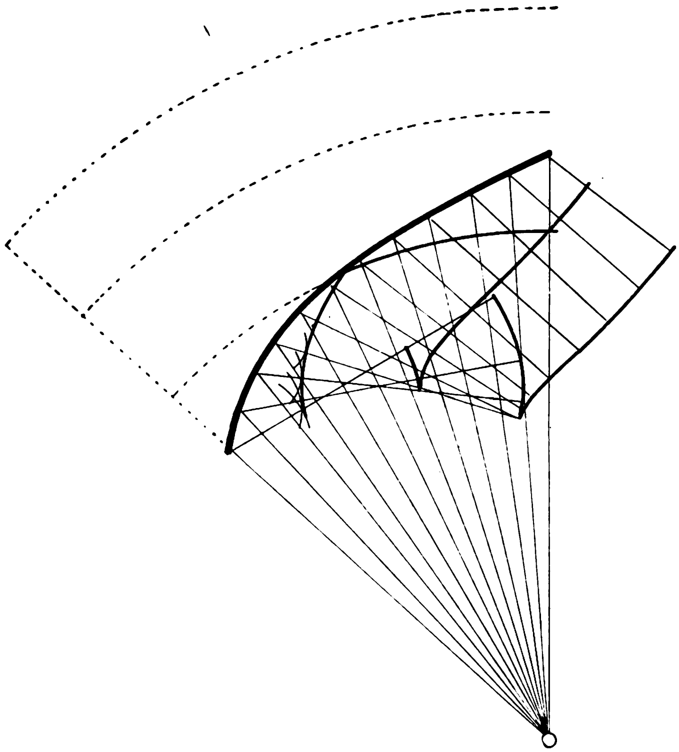


Fig. 10.
Constructie van gereflecteerd golffront volgens Huygens.

van den wand gekomen kan zijn. Doet men dit voor alle punten van den wand, dan zal men zien dat al die cirkelboogjes een gemeenschappelijke omhullende hebben, in welke wij het teruggekaatste golffront herkennen.

In een zaal kan de focusseerende geluidkaatsing door gekromde oppervlakken, hetzij van den wand of van de zoldering, hoogst ongewenschte verrassingen baren. In een museum kan de waarneming van zoo'n geluidsfocus als curiosum een aangenaam intermezzo geven, wanneer de gids u demonstreert, hoe men gefluister op groote afstanden nog kan verstaan. Wij hebben hier in de voorkamer een parabolischen reflector opgesteld. Hangt men in het brandpunt een horloge, dan kan men dit, in den bundel van platte geluidsgolven en evenwijdige stralen, op grooten afstand nog hooren tikken. Vangt men den bundel in een tweeden parabolischen reflector op, dan wordt in het brandpunt van dezen laatste het geluid weder sterk geconcentreerd. Een focuswerking van dezen aard, met drie reflecties, vertoont men u in een der zalen van het Louvre-museum te Parijs.

In een gehoorzaal zijn dergelijke focuswerkingen meestal hinderlijk. Meestal komt de gefocusseerde geluidswerking zooveel later, dat men een storenden afzonderlijken echo verneemt.

Den nagalm kan men eigenlijk ook reeds als echo beschouwen, maar dan een diffuse echo, diffuus zoowel wat de ruimteverdeeling als wat verdeeling in den tijd betreft. Dat gedeelte, hetwelk langer dan $^1/_{15}$ seconde later komt dan het rechtstreeksche geluid, is storend. Bij den diffusen nagalm, indien hij niet te lang duurt, is dit storende geluid relatief niet sterk meer. Maar een door focuswerking niet diffuus, maar ruimtelijk en tijdelijk geconcentreerde echo is in hooge mate storend en onaangenaam, wanneer hij meer dan $^1/_{15}$ sec te laat komt.

Zelfs al zou de gefocusseerde echo binnen dien tijd aankomen, doet men toch beter hem te vermijden. Bij een verplaatsing van de geluidsbron, of bij het tegelijk klinken van verschillende geluidsbronnen, bijv. bij een vocaal quartet, zouden er van de vier stemmen op vier verschillende plaatsen focussen gevormd worden, en men zou, in een dier focussen gezeten zijnde, door éene stem de andere overstemd hooren.

Om dit te vermijden kan men om te beginnen de bouwplannen onderzoeken en nagaan, of er gevaar dreigt. Met het profiel der zaal voor zich, in lengte- en in dwarsdoorsnede, kan men, overal waar er een gekromd oppervlak is aangegeven, uitgaande van de gegeven plaats der geluidsbron, de reeds genoemde constructie van HUYGENS toepassen en de gestadige vervorming van het golffront nagaan (vgl. fig. 10). Soms vindt men gedeelten die zich in een punt samentrekken. Daarna vertoont het golffront in doorsnede wat men mathematisch een keerpunt noemt. Dat duidt dan de aanwezigheid van een focus of een rij van foci aan. Bevindt dit focus zich ergens hoog in de zaal, dan heeft men er geen last van. Eventueel zou men hier een absorbeerende stof (vlaggedoek, vaandels) kunnen aanbrengen indien men reden heeft om den nagalm te beperken; immers, in zoo'n focus kan men het meeste geluid tegelijk opvangen en onschadelijk maken.

Men kan ook van het zaalprofiel een houten model maken. Sommige laboratoria beschikken over de toestellen, noodig om op een bepaalde plaats binnen dat profiel door middel van een electrische vonk een plotselinge geluidsgolf voort te brengen. Deze plant zich voort binnen de omlijsting van het zaalprofiel als een geluidsgolf in de zaal zou doen, en lijdt dezelfde terugkaatsingen. Op zeker oogenblik, kort na de geluidsvonk, verlicht men het zaalprofiel door een scherpe lichtsterke vonk, die het instantané projecteert op een fotografische plaat. De luchtverdichtingen en -verdunningen van de onderweg zijnde geluidsgolf veroorzaken kleine lichtbrekingen, waardoor de golf binnen de lijst van het profiel op de fotografische plaat wordt afgeteekend. Door het tijdsverloop tusschen geluidsvonk en lichtvonk te varieeren, kan men in een reeks van opnamen het verloop der golven volgen en eventueele focusseering der teruggekaatste ontdekken.

Tot het hanteeren van deze methode moet men over een goed ontwikkelde experimenteertechniek beschikken. Veelal zal men daarom liever het zaalprofiel in den golfbak leggen en de watergolven projecteeren.

Heeft men in een ontwerp een gekromden wand als gevaarlijk onderkend, dan kan men het ontwerp veranderen. De wand kan een andere kromming krijgen, men kan hem recht maken, of zorgen dat het focus op een plaats valt waar het niet storen kan.

Ook kan men een middel te baat nemen, dat het eenige is, wat men doen kan, wanneer de zaal niet slechts in ontwerp, maar met haar focuskwaal in werkelijkheid bestaat. Dit middel is het diffuus maken van de terugkaatsing die, niet diffuus, het focus geeft.

Een glazen plaat kan men matteeren, zoodat zij weinig licht recht terugspiegelt maar veel diffuus verstrooit. Het glas is dan oneffen gemaakt en zoo, dat de fijne krasjes en putjes afmetingen hebben van de orde van grootte der golflengte van het licht. Iets dergelijks kunnen wij bij de geluidkaatsende zolderingen ook doen. Wij kunnen het golffront breken, dat, ongebroken, naar een focus zou loopen. Het is duidelijk, dat indien wij inplaats van de golven aan een gesloten wand terug te kaatsen, dit doen aan een wand met verhoogingen en verdiepingen, het teruggekaatste golffront in stukken terugkomt. Indien de verdiepingen een kwart golflengte bedragen, zal bij loodrechten inval de afstand tusschen de teruggekaatste golffrontstukken een halve golflengte bedragen. Komen deze in het focus samen, dan heffen de lucht-verdunningen van de voorloopers de verdichtingen van de nakomers op, en omgekeerd. In het focus zelf zal dan geen geluidsenergie gebracht worden. Toch kan de energie niet verloren gaan. Zij zal nu echter verstrooid zijn en diffuus rondzwerven.

Dit diffuus worden hangt samen met het feit dat van rechtlijnige voortplanting van geluidstralen langs voorwerpen sprake kan zijn, en gelijkhoekige terugkaatsing tegen wanden plaats grijpt mits en alleen wanneer die voorwerpen en wanden groot zijn vergeleken bij de golflengte van het geluid. Indien nu de onregelmatige onderbrekingen, of de verspringingen in een wand, ongeveer van dezelfde afmeting zijn als de geluidsgolven, — de helft, of een derde, of twee derde — dan heeft er in plaats van gerichte, een verstrooide of diffuse terugkaatsing plaats. De golflengten van het geluid der spraak varieeren van enkele tot een dozijn decimeters. Door caissonneering van een wand met enkele decimeters diepe caissons kan men dus den gerichten, storenden echo vervangen door een diffusen, d. w. z. door een nagalm, die veelal minder storend zal zijn.

Men kan de reflectie niet diffuus maken door eenvoudig het oppervlak wat ruw te maken. Oneffenheden in den wand, die klein zijn vergeleken bij de golflengten van het geluid, hebben een onmerkbaar kleinen invloed.

IV. Gerichte Geluidkaatsing.

Een storenden echo trachten wij dus bij den bouw te vermijden, en na den bouw trachten wij hem te doen verdwijnen door hem zijn energie te onttrekken en deze aan den diffusen nagalm toe te voegen.

Het omgekeerde probleem is dit: kan men bij den bouw niet een nuttigen echo doen ontstaan? Nuttig zal hij zijn, indien hij korter dan $^1/_{15}$ seconde op het rechtstreeks vernomen geluid volgt. Voor ons gehoor versmelt hij dan met het directe geluid. En voorts: kan men niet geluidsenergie aan den storenden diffusen nagalm onttrekken, om die toe te voegen aan den nuttigen, gerichten echo?

Inderdaad is dit een probleem van groote beteekenis in zalen die zoo groot zijn, dat hun nagalm niet wel binnen de perken kan worden gehouden. Het leidt ertoe, dat men de gehoorzaal zal gaan behandelen alsof zij een muziekinstrument was. Een akoestisch instrument is zij stellig en zeker, en bij den bouw zullen de wetten der geluidsleer evenzeer moeten wegen als de wetten der zwaartekrachtsleer, die de statische constructies van muren en dak bepalen.

Indien men den nagalm wil vermijden, moet men voorkomen, dat een wand het geluid, inplaats van naar het publiek, naar andere wanden zou kaatsen, met het gevolg dat het een tijdpoos heen en weer loopt totdat het ten langen leste doodgeloopen is. De wanden zullen een doelmatig gekromden vorm moeten hebben, evenals de zoldering.

Welken vorm wij moeten geven, hangt af van de plaats van den spreker. Veel minder bepaald is het probleem wanneer de plaats van de geluidsbron niet vastgelegd is. Indien er echter een sprekerstribune is, en men weet, vanwaar het geluid uitgaat, kan men daarin zijn uitgangspunt nemen.

Men kan bijvoorbeeld zich ten doel stellen, dat de wand achter den spreker de geluidsgolven niet tegen de zijwanden zal richten, maar uitsluitend de zaal in. Indien de zijwanden evenwijdig zijn, volgt daaruit, dat de horizontale projectie van den achterwand een parabool moet zijn (fig. 11, *a*). Indien deze vorm van achterwand niet convenieert, kan men hem onderbreken, en laten bestaan uit een aantal stukken van paraboolwanden (fig. 11, *b*). De afzonderlijke strooken, waarin de wand aldus verdeeld wordt, zullen het best enkele meters breed genomen worden, namelijk enkele malen de golflengte van het geluid, en gelijke breedte van de strooken zal men ook liever vermijden, om geen interferentieverschijnselen van het geluid uit te lokken. Deze interferentieverschijnselen zal ik overigens terzijde laten.

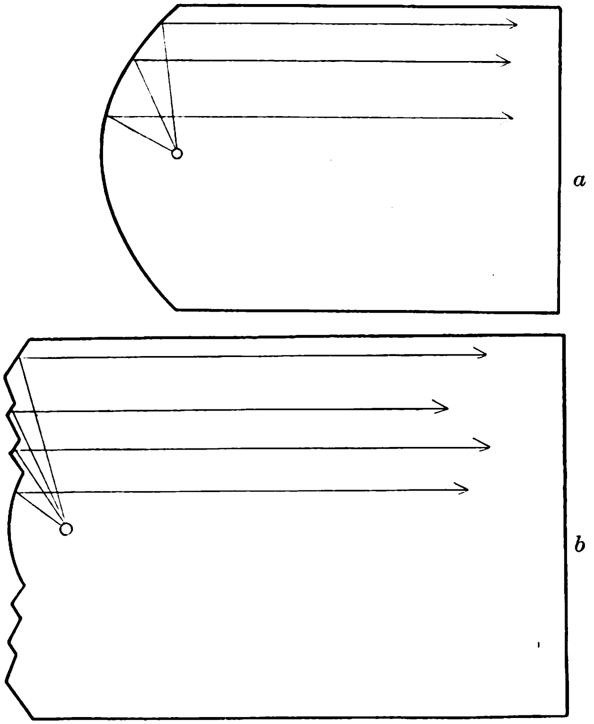


Fig. 11.
Parabolische zaalwand.

Kan men aanvaarden dat de zijwanden geeren, dan kan men voor den achterwand een hyperbolische grondlijn nemen.

Bij deze parabolische en hyperbolische wanden ligt het andere focus, wanneer de spreker in het brandpunt staat, in het oneindige resp. achter den wand. Daarom is geen hinderlijk focus in de zaal te vreezen.

Kiest men een cirkelwand, of een ellipsvorm van de zaal, dan zal men moeilijk kunnen voorkomen, dat er bepaalde zaalgedeelten zijn die aan hinderlijke focusstoringen lijden.

Op een dergelijke wijze kan men ook de zoldering benutten om te voorkomen, dat deze het geluid in ruimten laat spelen, waarin het nutteloos verloren gaat of vanwaar het na eenigen tijd hinderlijk naar het gehoor terugkomt. Om te beginnen kan men vermijden, dat door dwarsbalken de werking van den zolder als klankkaatser wordt verijdeld. Voorts zou men kunnen overwegen, aan het plafond een parabolisch profiel te geven. Dit zou, met den spreker in het brandpunt, de geluidstralen door de heele zaalruimte, ook de bovenste helft, evenwijdig laten loopen. Die bovenste helft echter bevat geen toehoorders. Men zou nu de as der parabool wat omlaag kunnen laten hellen, waardoor de geluidstralen na de kaatsing naar beneden gericht zijn.

Echter zouden bij zulk een parabolisch zolderingprofiel toch de plaatsen achter in de zaal slechter bedeeld zijn dan die vooraan. Het kan geen kwaad, om met een lichte concentratie der geluidsgolven dezen hoorders te hulp te komen. Dit geschiedt door een ellipsvorm, waarbij het echter niet tot een focus mag komen. Dit focus kan zonder bezwaar liggen een flink eind beneden de voeten van de toehoorders; dezen profiteeren dan van een versterking van het geluid, zonder dat het nog tot een scherp focus komt. Deze versterking zal ook niet meer dan $^1/_{15}$ sec na het directe geluid behoeven te komen, en wellicht past men het profiel pas toe wanneer het directe geluid ten eenenmale te zwak is om gehoord te worden.

In deze richting gaat de poging der concertzaal „salle Pleyel" in Parijs. Consequent in deze richting is ook gegaan de fransche architect Le Corbusier in zijn ontwerp voor een volkenbondspaleis te Genève, waarin de groote zaal een lengte van 70 m zou hebben, dat is drie maal zoover als men het onversterkte luid gesproken woord kan verstaan. In deze omstandigheden is het eenige dat bij mogelijkheid verstaan kan worden een kunstmatig versterkt geluid.

Le Corbusier heeft direct achter de sprekerstribune de balustrade ontworpen van den hooger gelegen voorzitterszetel, die het opvallende geluid richt naar de voorste rijen in de zaal (fig. 12). Achter den president is een achterwand ontworpen die zich naar de zoldering toekromt, en die het middengedeelte der zaal met geluidsenergie bestroomt. De zoldering zorgt verder voor de be-

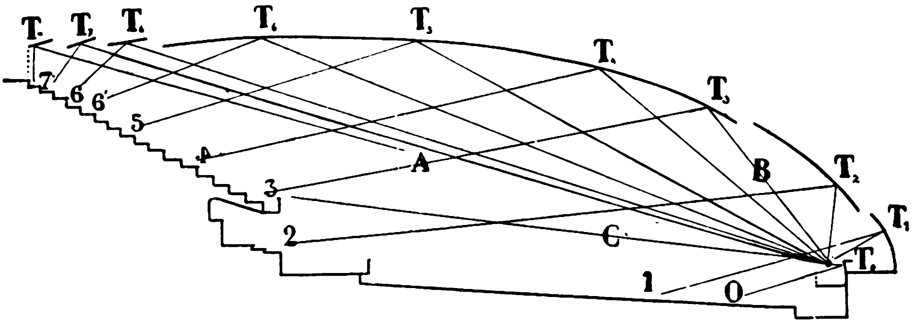


Fig. 12.
Ontwerp voor zaalzoldering van Le Corbusier.

vloeiing van de loges en van de galerijen met teruggekaatste geluidsgolven. Het profiel doet sterk denken aan de bovenste helft van een ellips met horizontale as (welke ellips onderbroken is, om redenen van ventilatie en verwarming, zie de figuur). Door de vriendelijke hulpvaardigheid van prof. Diehl uit Delft heb ik de beschikking gekregen van een in hout uitgevoerd profiel van Le Corbusier's ontwerp, zoodat wij dat in den golfbak kunnen leggen. Inderdaad zien wij de directe en de gereflecteerde golf dicht na elkaar de geheele zaalruimte tot in het hoekje van de galerij doorloopen.

Ik ben niet bevoegd om de architectonische verdiensten en gebreken van dit ontwerp te beoordeelen. Ik hoop van harte dat meer bevoegden ook in dat opzicht veel verdiensten zullen ontdekken, omdat inderdaad hier een poging gedaan is om de akoestische eischen op den voorgrond te stellen en met een consequente toepassing van wat men weet de voorwaarden te scheppen voor een duidelijk verstaan. Men zegt dat de moderne techniek de constructiemogelijkheden voor een overspanning van dusdanig groote ruimten, en voor de gewenschte vormgeving van zulk een zoldering biedt. Het zal een schoone taak zijn voor moderne architecten om zich te doordringen van de akoestische rationaliteiten evenzeer als van de statische, en door een reeks van doelbewuste pogingen de schoonheid van de akoestisch-wiskundige rationaliteit te ontdekken en te verwezenlijken in hun vormgeving aan gehoorzalen voor groote menschenmenigten.

Niet altijd zal het mogelijk zijn, de wanden en zoldering zelf van de zaal als geluidkaatser te gebruiken. De zaal, men denke aan een kerk, kan wel eens daartoe veel te hoog zijn. In zulke gevallen zullen wij op andere manier moeten trachten ons doel te bereiken, nl. geluidsenergie die zonder tegenmaatregel in den nagalm zou verdwalen, aan dien nagalm onttrekken door ze aanstonds naar de luisterende gemeente te richten.

Dit kan men doen door een klankkaatser aan te brengen. Men kent sinds lang de klankborden boven den kansel, vlakke zolderingen, die op korten afstand, zeg een halven meter, boven het hoofd van den predikant zijn aangebracht en het geluid beletten in opwaartsche richting te gaan. Wat is de akoestische beteekenis van deze platte klankborden? Indien zij volkomen terugkaatsen, vormen zij van de geluidsbron een, wat men zou kunnen noemen, spiegelbeeld van gelijke sterkte. Het is dus alsof men iemand met de dubbele sterkte hoort spreken, dat is te zeggen, indien men zich bevindt in een gebied, dat door de teruggekaatste stralen wordt bestreken. Voor de toehoorders die het dichtst bij zitten werkt zulk een klankbord dus het best, en de verafzittenden die het meest geluidsversterking noodig hebben, worden niet geholpen. Een andere onvolkomenheid dezer klankborden is, dat het achterwaarts uitgezonden geluid niet verder gebruikt wordt.

Men komt al spoedig tot de slotsom, dat er een gekromd oppervlak noodig is. Dergelijke klankkaatsers zijn op aanwijzingen van dr. J. KRAMERS, S.J., uit Nijmegen, geconstrueerd en in verschillende R.K. kerken in gebruik. De werking van deze klankkaatsers kan men zeer goed gewaarworden. Het maakt een groot verschil of men iemand spreken hoort, die vóór den klankkaatser staat, of iemand die er naast staat.

Welken vorm moet men aan die klankkaatsers geven? Wij willen bereiken, dat de golven niet naar boven de leege ruimte ingaan. Het geluid moet in de laagte blijven. Wij weten dat golffronten zich verplaatsen in een richting loodrecht op zichzelf, en daarbij evenwijdig aan zichzelf blijven. Indien er geen deel van het teruggekaatste golffront naar boven mag uitwijken, en alle deelen horizontaal moeten loopen, moet het teruggekaatste front rechte vertikale doorsneden hebben. De proeven in den golfbak hebben ons geleerd (fig. 7), dat daartoe de kaatsende wand, wat de verticale doorsnede betreft, een parabool moet geven, die haar brandpunt heeft in de geluidsbron. En de horizontale doorsnede?

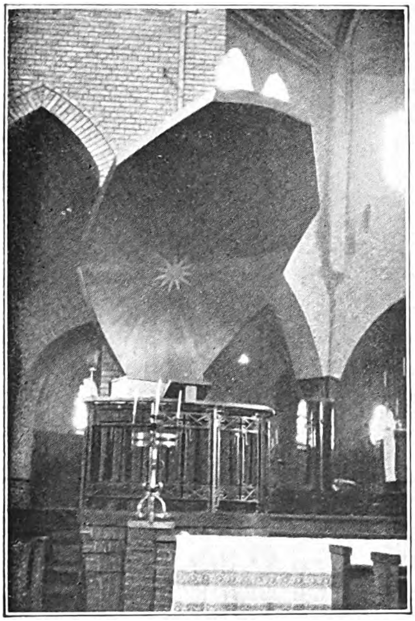


Fig. 13.
Klankkaatser van dr. J. Kramers, S. J.,
in de R. K. kerk, Sportlaan, Den Haag.

Men zou ook die den vorm eener parabool kunnen geven. Daar deze den top gemeen moet hebben met de verticale doorsnede, en er maar één geluidsbron is die in het brandpunt moet staan, is dus deze parabool congruent met de andere, en onze kaatser zou een *omwentelingsparaboloïde* worden. De teruggekaatste golven zouden, behalve een rechte vertikale, ook een rechte horizontale doorsnede hebben en dus plat zijn. Deze platte golven zouden in eerste benadering zich niet zijdelings uitbreiden. Bij hun loop door de kerkruimte zouden zij niet veel van hun sterkte verliezen, en het geluid zou zeer ver dragen, maar .... de doorsnede van dezen sterken geluidsbundel zou niet veel grooter worden dan het oppervlak van den klankkaatser. Tenzij dus de klankkaatser de wand zelf achter den spreker is, zou slechts een beperkt deel van het gehoor er baat bij vinden.

De teruggekaatste golf zal zich, hoewel niet in de hoogte, toch wel in zijdelingsche richtingen moeten kunnen uitbreiden. Natuurlijk moet de zijdelingsche hoek, waarbinnen die verbreiding geschiedt, beperkt blijven tot den kleinsten hoek, die nog het grootste gedeelte van het gehoor omvat. De horizontale doorsnede van het teruggekaatste golffront zal dus een cirkel mogen zijn. Uit de golfbakproeven (fig. 8) leerden wij, dat om dit te verkrijgen, de horizontale doorsnede van den kaatsenden wand een hyperbool moet zijn. Het brandpunt, en de top van een der takken van die hyperbool liggen vast, omdat de geluidsbron, en de verticale doorsnede van den klankkaatser reeds bepaald zijn. Wat men van de hyperbool nog met het oog op de te bespreken ruimte kiezen moet, is òf de asymptotenhoek, òf het andere brandpunt, dat het midden wordt van de horizontale cirkeldoorsnede van het teruggekaatste golffront.

Ziedaar den vorm van den gewenschten *klankkaatser* in eerste benadering vastgesteld door zijn *verticale doorsnede*: *een parabool*, en door zijn *horizontale doorsnede*: *een hyperbool*, beide met samenvallende toppen en brandpunten.

Men kan ter completeering van het oppervlak de hyperbool evenwijdig aan zichzelf met haar top langs de parabool verschuiven; men kan ook bij die verschuiving de hyperbool zich zoo laten vergrooten, dat haar middelpunt op een verticale lijn blijft. Dat maakt in eerste benadering geen overwegend verschil uit.

Komt het er echter op aan om uit den klankkaatser te halen wat er aan mogelijkheid in schuilt, dan moet men nog nader preciseeren. Wij zullen dit doen, door van het teruggekaatste golffront te verlangen dat niet alleen de middelste verticale doorsnede een rechte lijn is, maar alle verticale doorsneden, zoodat, gegeven de horizontale cirkeldoorsnede, wij als *teruggekaatste golf* verlangen *een cylindervormig front*, dat bij zijn verdere voortplanting blijft een cylinder, om dezelfde verticale as, die door het andere brandpunt gaat van de horizontale hyperbooldoorsnede van den klankkaatser.

Volgens Christiaan Huygens hebben alle deelen van een golffront denzelfden afstand afgelegd sinds zij de geluidsbron verlieten. De deelen van ons cylindervormig front planten zich voort langs horizontale stralen, die alle de as van den cylinder, zij het elk op zijn eigen hoogte, snijden. Zetten wij nu van het golffront achterwaarts in de richting van die as de door de diverse deelen van het front afgelegde wegen uit, dan belanden wij in weer een cylindervlak, om dezelfde as. De verschillende punten van het kaatsend oppervlak zullen klaarblijkelijk op denzelfden afstand van dit laatste cylindervlak moeten gelegen zijn, als van de geluidsbron. Ditzelfde kan men ook uitdrukken door te zeggen, dat het kaatsend oppervlak de meetkundige plaats moet zijn der punten, welker afstanden tot een vast punt (brandpunt) en tot een vaste lijn (as van het gereflecteerde golffront) een constant verschil hebben.

Dr. M. Nuyens heeft dit oppervlak nader onderzocht. Het is van den vierden graad, en hij heeft kunnen vaststellen dat men een verbeterden kaatser construeert, indien de horizontale hyperbolen, die men met hun top langs de parabool laat glijden, niet congruent verschoven worden, ook niet gelijkvormig vergroot zoo dat hun middelpunten op een verticale rechte blijven, maar zoo, dat hun middelpunten op een parabool komen te liggen, die hetzelfde brandpunt (en natuurlijk dezelfde as) heeft als de verticale parabool, waarlangs de hyperbooltoppen glijden. Een voorbeeld ziet men in fig. 14 geteekend.

Elke hyperbool heeft twee takken. De andere tak glijdt mede, haar top glijdt langs een parabool, wederom met hetzelfde brandpunt, en die andere tak beschrijft een tweede blad van de door onzen eisch gedefinieerde meetkundige plaats. Voor de punten van dit blad is de afstand tot het brandpunt evenveel grooter dan de afstand tot de as der gereflecteerde cylindergolven, als voor de punten van het eerste blad bedoelde afstand kleiner was.

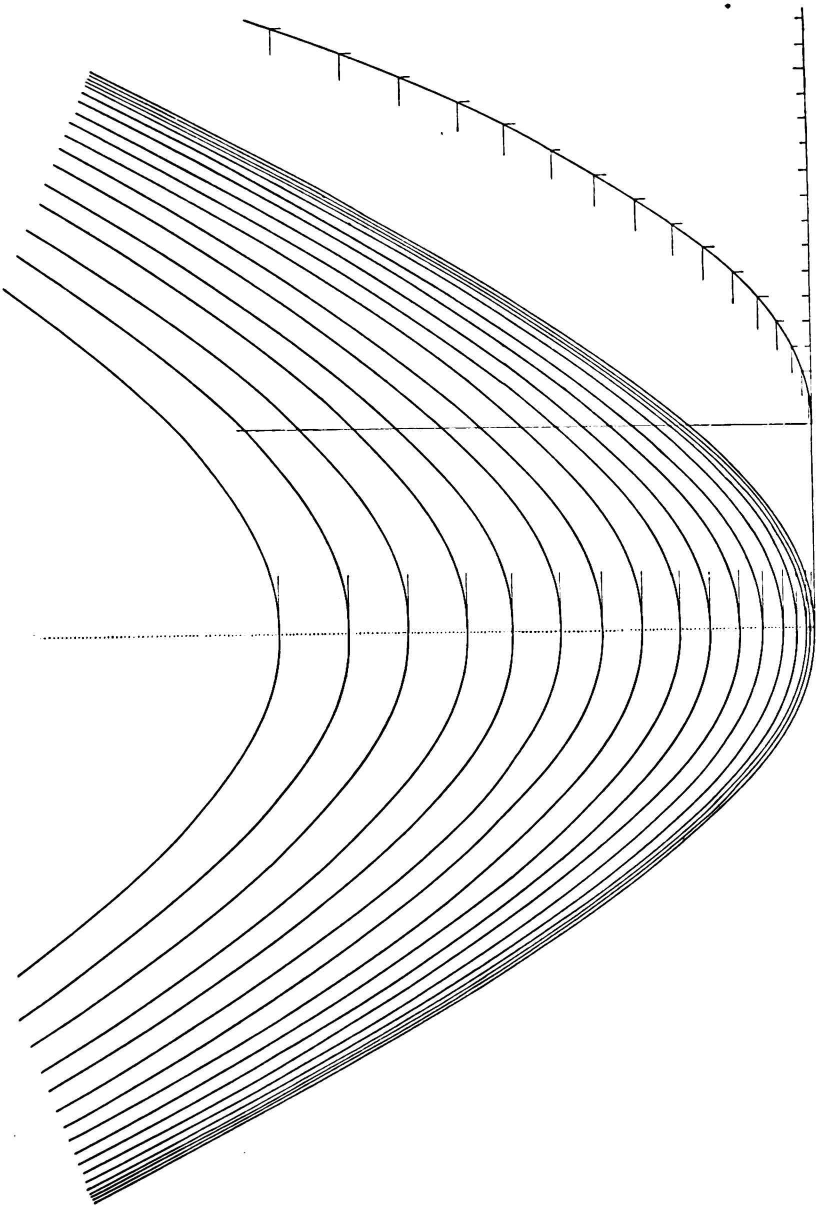


Fig. 14.

Niveaulijnen (10 cm) voor klankkaatser met asymptoten-opening van 45°, brandpuntsafstand 30 cm.

Het spreekt van zelf dat men ook met klankkaatsers niet het geluid kan brengen in doode hoeken, zooals men achter breede pilaren heeft. Op die plaatsen is het geraden gebruik te maken van electrische geluidsoverbrenging, en een luidspreker in werking te stellen.

Men moet echter niet meenen, dat men zonder meer met behulp van luidsprekers alle moeilijkheden kan overwinnen en zich niet meer behoeft te bekommeren om de eischen van akoestiek, of zich moeite behoeft te geven voor een goede richtinggeving aan het geluid met een juisten klankkaatser. Afgezien hiervan, dat het eenvoudig vermeerderen van de geluidsenergie het onschoone heeft van het gebruiken van meer geweld inplaats van met meer overleg te werk te gaan, loopt men spoedig met een teveel aan geluidsenergie vast.

Elke luidspreker namelijk vergroot buiten het onmiddellijk door hem bestreken gebied de moeilijkheid van den spreker te verstaan, door de hoeveelheid energie die hij storend aan den nagalm toevoegt. Elke volgende luidspreker maakt het gebied, waarin men den vorigen, en den spreker goed verstaan kan, weer kleiner, omdat van alle kanten de diffuse nagalm zooveel meer opdringt. Opzettelijke proefnemingen hebben dit duidelijk doen blijken. Het is niet een aan iedereen toe te vertrouwen werk om doelmatig luidsprekers te plaatsen. Door een flink aantal lukraak uit te zetten heeft men kans meer te schaden dan te baten. Bij die proefnemingen is ook aan den dag gekomen, dat het in hooge mate op het richteffect van den luidspreker aankomt ¹). Dat wil zeggen dat de geluidsenergie die naar de hoorders gericht wordt sterk moet overwegen boven de energie die in andere richtingen naar den nagalm verdwaalt.

Maar dat is juist het gezichtspunt, vanwaaruit wij de constructie der klankkaatsers beschouwden: geluidsenergie den weg naar de nagalmbergende ruimten versperren en naar het gehoor werpen! De luidspreker zal vooral voldoen daar waar geen nagalm te duchten is: buitenshuis, en daar waar men achter geluidobstakels doode hoeken heeft.

Wij hebben nog een ander voorbeeld geconstrueerd. Wij hebben

---

¹) C. ZWIKKER, *Verstaanbaarheid van luidsprekerinstallaties*. De Ingenieur 1929, No. 13.

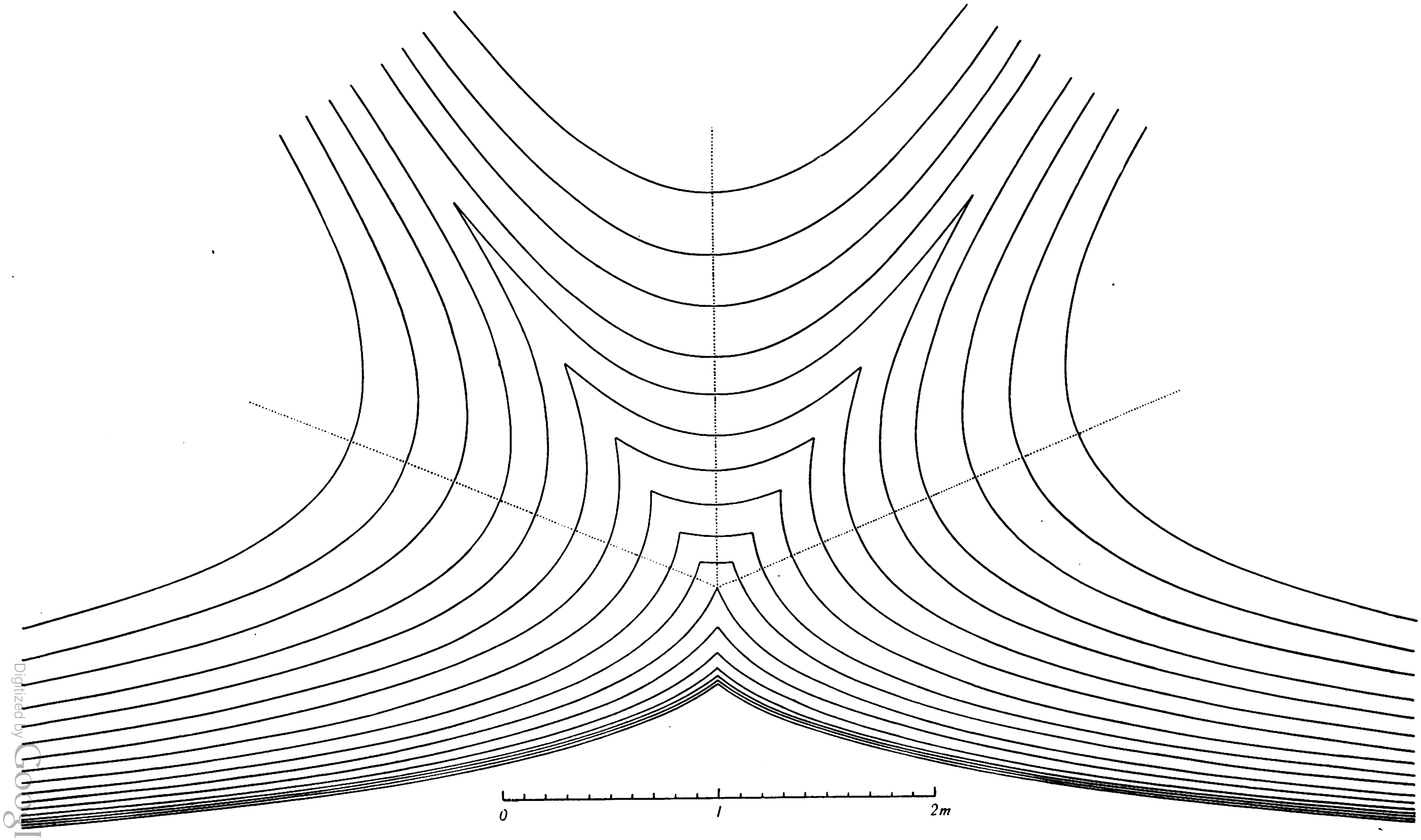


Fig. 15.

Niveaulijnen (10 cm.) voor driedeeligen klankkaatser, met geluidsbron in het snijpunt der stippellijnen.

ons afgevraagd, wat men zou kunnen doen, indien er niet alleen recht voor den spreker, maar ook te zijner rechter en te zijner linkerzijde een gehoor zich bevindt, een kerk bijvoorbeeld met een hoofdschip en twee zijschepen. Wij ontwierpen een driedeeligen klankkaatser, een combinatie van drie oppervlakken die elkander gedeeltelijk afsnijden. Als asymptotenhoek voor elk namen wij 45°, en de assen richtten wij de eene recht vooruit, en de andere onder hoeken van 22½° met den kerkwand achter den spreker. De drie brandpunten vallen samen. De figuur 15, waarin de niveaulijnen van het drieledige oppervlak met telkens 10 cm hoogteverschil, geteekend zijn, kan een denkbeeld geven van het model. De zijwaarts kaatsende oppervlakken beslaan een grooter deel dan het voorwaarts kaatsende. Dit compenseert eenigermate de ongelijkheid in de geluidsverdeeling in de natuurlijke emissie bij het gewone spreken. Ik hoop dat men bij het zien van het model mijn gevoelen zal deelen, dat deze oplossing van het akoestisch probleem niet misstaan zou in een groote kerk, waar men de ruimte heeft, en waar deze mathematische vormen, in sobere strengheid indrukwekkend schoon zouden kunnen worden verwezenlijkt onder het orgel.

Men treft in kerken wel eens omgevingen aan van den kansel, die bepaald een belemmering vormen voor een aanmerkelijk gedeelte van de geluidsenergie, om naar het gehoor te komen. Aan een voorbeeld, dat nog niet van de slechtste is, wil ik dat duidelijk maken. Laat ons eerst letten op de verticale doorsnede (fig. 16, A). De spreker staat onder het orgel. Wat doet het ondervlak van dit orgel? In de figuur ziet men, dat het de geluidstralen (*a*) richt op het allervoorste gedeelte der kerk, waar de doopvont staat. Wat doet het ondervlak van het orgel met het geluid (*b*) dat schuins achteropwaarts gaat? Het werpt dit verder naar achteren, de achterwand werpt het op het podiumtapijt, en daar zal een rest misschien aanloopen tegen de gesloten omheining van het podium. De ontwerper had den uitersten rand van het orgel als rand van een parabolischen wand moeten kiezen. Gegeven de plaats der

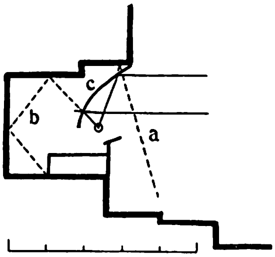


Fig. 16, A.
Akoestisch bedenkelijke kanselomgeving.

geluidsbron, en de horizontale richting der as, zou de parabool daardoor bepaald zijn geweest (fig. 16 A, *c*). Deze paraboolwand werpt al hetgeen naar den orgelonderkant gaat, in de gemeente. Hetgeen vóór langs het orgel gaat, ontsnapt naar boven, naar den nagalm. Men zou dit gedeelte kunnen beperken, door den spreker nog iets naar achteren te verplaatsen. Het orgel staat echter laag, en de door den orgelrand bepaalde parabool komt te dicht achter den spreker.

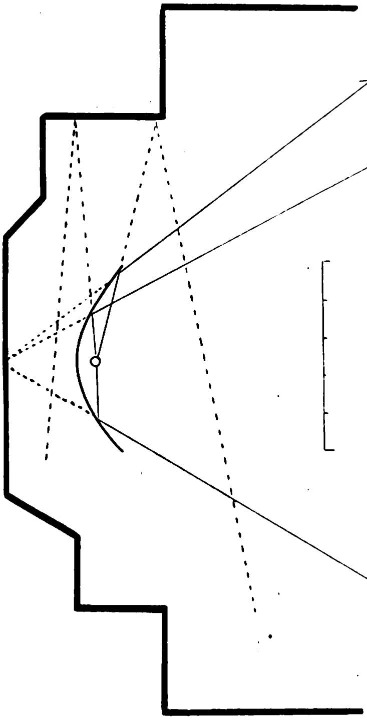


Fig. 16, B.
Akoestisch bedenkelijke kanselomgeving.

In de horizontale projectie (fig. 16 B) valt opnieuw op, dat de spreker zoo ver van den achterwand staat, die hem, als het goed was, juist moest steunen, en dat het zijwaarts van hem uitgaande geluid ook muren ontmoet, die het niet naar de gemeente kaatsen. Er stroomt veel geluid doelloos de verkeerde richting uit. Reeds leerde de beschouwing van de verticale doorsnede kennen, waar de wand achter den spreker moet komen. Wij kunnen den vorm nog nader bepalen, en bij het gegeven brandpunt en den gegeven top een hyperbool vinden, die het geluid rechtstreeks naar de toehoorders kaatst. Iets minder exact zou hier voor de hyperbool ook een cirkel ontworpen kunnen worden.

Het ligt voor de hand, dat men in dit voorbeeld den kansel naar achteren zal verplaatsen, en den achterwand een kromming zal geven, die een hyperbolische benadert. Hierboven werd reeds opgemerkt dat bij zulk een verplaatsing de parabolische klankkaatser onder het orgel nog grooter werking zal oefenen.

Dat men met eenvoudige middelen vaak reeds aanzienlijke verbetering kan bereiken, worde geïllustreerd aan een ander voorbeeld, waar de sprekermond in de gemeenschappelijke as ligt van drie steenen cirkelbogen (fig. 17), waarvan er twee de begrenzing vormen van cylindrische gewelven. Deze brengen het uitgaande geluid dat er op valt tot een focus op de hoogte van het hoofd van den spreker zelf, die er door gehinderd wordt, en werpen het vervolgens op den vloer rondom den kansel, vanwaar niet veel meer nuttig de kerk ingaat. Met behoud van de plaats des sprekers kan men aan die bogen licht houten beschotten laten aansluiten, die in den verticalen opstand (fig. 17, A) twee parabolen toonen, met naar beneden gerichte as en gemeenschappelijk brandpunt, en die het opgaande geluid omlaag in de gemeente werpen. In de horizontale doorsnede hebben de beschotten twee hyperbolen (fig. 17, B). Bij het ontwerp had men de steenen bogen een anderen vorm dan den cirkelvorm moeten geven, om aan den kansel een akoestisch ideale omgeving te verschaffen.

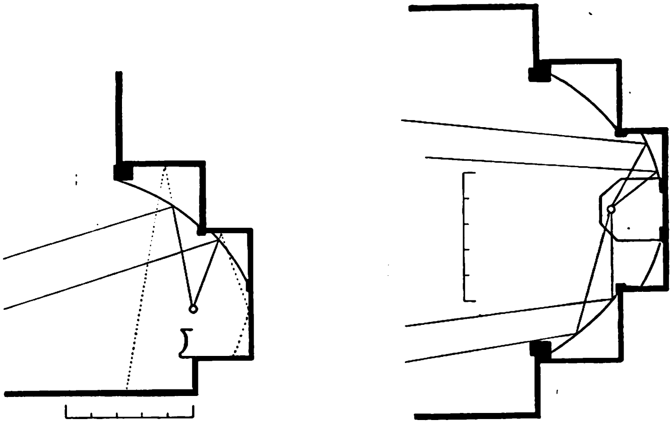


Fig. 17, A. Fig. 17, B.

Akoestisch bedenkelijke kanselomgeving.

Omtrent de werkzaamheid van de besproken klankkaatsers koester ik niet den geringsten minsten twijfel. Men moet de spreekplaats zoover met den klankkaatser omgeven als maar met het gemak van binnen- of opkomen en afgaan van den kansel of spreekgestoelte vereenigbaar is.

De werking is des te zekerder, naarmate de golflengte van het geluid kleiner is, vergeleken bij de afmetingen van den klankkaatser. Voor een basstem kunnen de grondtonen der klinkers golflengten hebben van een paar meters, maar de boventonen, die vooral het onderscheid tusschen de verschillende klinkers aangeven, hebben golflengten van enkele decimeters. Een klankkaatser van enkele meters zal voor deze zeer goed werken. Vooral bij de medeklinkers, de sissers en de ploffers, die geluidsgolven geven van slechts drie, vijf, acht centimeters zullen de klankkaatsers uitstekend voldoen. Zij verduidelijken aldus het effect der articulatie, en zij versterken het rechtstreeks gespiegelde geluid op kosten van den nagalm. Zij verdienen ontworpen en gemaakt te worden.

Een eigenaardige werking van klankkaatsers verdient nog gesignaleerd te worden. Wanneer men het versterkte stemgeluid hoort, zal men er iets ondefinieerbaar vreemds, ongekends aan hooren. Het geluid schijnt uit een andere wereld te komen. Dit is het gevolg van de vervorming van de gekaatste geluidsgolf. Wij hooren in den regel niet alleen geluid, wij hooren ook waar het vandaan komt. Verbazend kleine tijdsverschillen in de aankomst van het geluid aan de beide ooren worden door ons niet meer afzonderlijk waargenomen, maar onderbewust leiden wij eruit af de plaats waar het geluid van daan komt. Ir. J. L. VAN SOEST heeft voor enkele maanden kunnen vaststellen [1]) dat tijdsverschillen van enkele millioenste deelen van een seconde voor onze waarneming nog van beteekenis zijn. Indien nu de gekaatste geluidsgolf bolvormig was, stigmatisch, zouden wij de geluidsbron tegelijk in den spreker, en in het centrum van de gekaatste golf lokaliseeren. Dat zou ons al wonderlijk te moede maken. Maar de gekaatste geluidsgolf trachten wij cylindrisch te maken, astigmatisch. Wat de horizontale doorsnede betreft schijnt zij uit het andere focus van den kaatser te komen, wat de verticale doorsnede betreft uit het oneindige. Geen wonder dat wij gedesoriënteerd aan het geluid iets ongewoons merken.

Dit schaadt echter niet aan de duidelijkheid.

---

[1]) J. L. VAN SOEST en P. D. GROOT, *Stereoacoustische geluidsbeelden en kleinst waarneembare tijdverschillen*, Physica, **9**, p. 111, 1929. J. L. VAN SOEST, *Richtingshooren bij sinusvormige geluidstrillingen*, Physica, **9**, p. 271, 1929.

V. Klankanalyse.

Alvorens ons bezig te houden met de eigenaardigheden van het geluid zelf, moeten wij ons enkele zaken herinneren.

In het eenvoudigste geval is de geluidsbeweging een enkelvoudige trilling. Stemvorken voeren zulke bewegingen uit. Wij maken een spiegel op het been van een stemvork vast. De spiegel moet een lichtbundel terugkaatsen en daarmede een lichtvlek afteekenen. Indien de stemvork trilt, zal deze vlek heen en weer gaan, zóó snel, dat wij inplaats van een vlek een vertikale streep zien. Wij kunnen die beweging niet met het oog volgen.

Wij zetten vervolgens in den weg van den lichtbundel een afzonderlijken, draaienden spiegel. Deze maakt dat de lichtbundel in plaats van een stilstaande lichtvlek een horizontale streep maakt. Wij kunnen den draaienden spiegel ook in werking brengen terwijl de stemvork trilt. Wij zien dan den vorm der trillende beweging in den vorm van een slingerlijn die zich afteekent. Wij noemen dat een sinusoïde, of een harmonische slingerlijn.

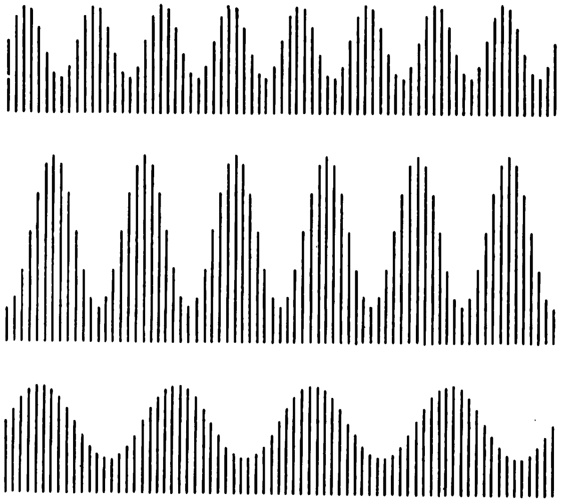


Fig. 18.
Drie slingerlijnen met perioden in de verhouding 3 : 4 : 6.

Nu kan zich het geval voordoen, dat bij die trilling zich nog een andere voegt. Dat noemt men samenstelling of superpositie. Met een rij latjes van wisselende lengte kan men een harmonische lijn door hun toppen afteekenen. Dit op en neer van de slingerlijn verbeeldt een enkelvoudige trilling. Een tweede rij latjes geven in hun op en neer een andere slingerlijn. Door deze tegen de vorige te laten aansluiten krijgt men in de bovenste toppen een op en neer, dat een beweging verbeeldt, welke de superpositie is van de twee vorige (fig. 19). Men krijgt nu een samengestelde slingerlijn, met een ander patroon, dat zich dàn zal herhalen, wanneer er van de twee perioden der samenstellende trillingen een gemeen veelvoud te vinden is.

Zijn bijvoorbeeld drie perioden van de een samen even groot als vier perioden van de andere, dan zal de periode van de samengestelde trilling daaraan gelijk worden. De grondfrequentie, dat is het aantal malen per seconde dat het patroon terugkomt, wordt dus het verschil van de twee frequenties. Immers, zijn deze 300 en 400 perioden per sec, dan is er in de resulteerende trilling een frequentie van 100 perioden per seconde.

Soms is er geen gemeen veelvoud van de periodes te vinden, men krijgt dan geen regelmatig terugkeerend patroon. De twee frequenties zijn dan onharmonisch. Soms is het verschil in frequentie zeer gering. Wij krijgen dan de bekende zwevingen. Nemen de zwevingen in aantal per seconde toe, dan zullen wij ze ten slotte niet meer als zwevingen hooren, maar een afzonderlijken toon waar-

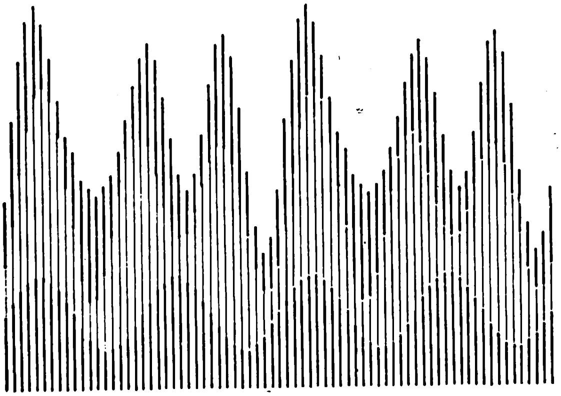


Fig. 19.
De drie slingerlijnen gesuperponeerd.

nemen, den z.g. verschiltoon, aldus genoemd omdat zijn hoogte overeenstemt met een frequentie die het verschil is van de frequenties der gesuperponeerde trillingen.

Men kan ook nog een derde slingerlijn op de beide vorige superponeeren. Heeft de periode van deze derde lijn met de beide andere perioden een gemeen veelvoud, dan is er weer een grondfrequentie te onderscheiden in de resulteerende slingering, zooals men bij de op elkanderschuiving der latjes ziet (fig. 19).

In de boven beschreven stemvorkproef kunnen wij verschillende stemvorken nemen, elk met een spiegel voorzien, en ze zoo opstellen dat de lichtbundel achtereenvolgens alle spiegeltjes passeert. Trillen twee of drie der stemvorken tegelijkertijd, dan zien wij een gecompliceerde beweging van de lichtvlek, die, met den draaienden spiegel ontleed, juist dergelijke slingerlijnen vertoont als wij aan de uiteinden der gesuperponeerde latjes zien. De luchtbeweging, die wij als het geluid van de beide stemvorken hooren, is er ook een als de geanalyseerde van de lichtvlek. En evenals wij bij deze slingerlijn-analyse een grondperiode zien, evenzoo hooren wij bij de samenstelling van harmonische tonen een grondtoon (mits die niet te laag is of te zwak om gehoord te worden).

Moeilijker dan het samenstellen van eenige enkelvoudige harmonische trillingen, is het ontleden van een gegeven periodieke beweging in haar enkelvoudige bestanddeelen.

Er is een stelling, welker ontdekking de mathematici aan Fourier te danken hebben, en die zegt dat elke periodieke beweging (of functie zooals de wiskundigen zeggen) hoe vreemd en willekeurig ze ook moge schijnen, mits ze zich periodiek precies in al haar willekeur herhaalt, ontbonden kan worden in een aantal samenstellende enkelvoudige trillingen. Het metterdaad bepalen van die enkelvoudige componenten is een wiskundig proces, waarop wij niet nader kunnen ingaan. Men heeft ook instrumenten geconstrueerd, z.g. harmonische analysatoren, die mechanisch de noodige integraties verrichten, en waarop men door den stand van

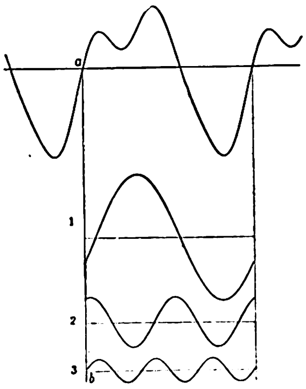


Fig. 20.
Analyse in grondtoon en twee harmonische boventonen.

wijzers aflezen kan de sterkte van de componenten. Als voorbeeld reproduceeren wij een analyse van een bepaalde kromme in drie bestanddeelen (fig. 20).

Hoewel wij altijd zorgvuldig de analyse in de componenten moeten verrichten voordat wij tot conclusies kunnen komen, kan men toch somtijds aan de krommen zelf al wel enkele hoofdtrekken opmerken. Zoo kan men aan de kromme van fig. 21 opmerken, dat er een lange periode is van den grondtoon, maar dat de beweging veel sneller heen en weer gaat, zij het met wisselende grootte der uitslagen. Op den grondtoon zijn dus boventonen gesuperponeerd. De grondtoon is zwak. De boventonen zijn sterker. In één periode gaat de kromme zesmaal omhoog. De zesde boventoon schijnt dus aanwezig te zijn. Hij is niet de eenige, want de slingerwijdte is niet steeds even groot. Indien er voornamelijk twee boventonen waren, de zesde en zevende bijv., zou het aangroeien en afnemen van de kartelingen even snel geschieden. Wij zien echter plotseling groote uitslagen, die geleidelijk afnemen, en dan weer plotseling groot zijn. Er schijnt nog wat meer dan deze twee te zijn. Inderdaad zijn bij deze kromme, zooals bij de analyse bleek, de 5e, 6e en 7e boventoon sterk vertegenwoordigd, de zesde het sterkst.

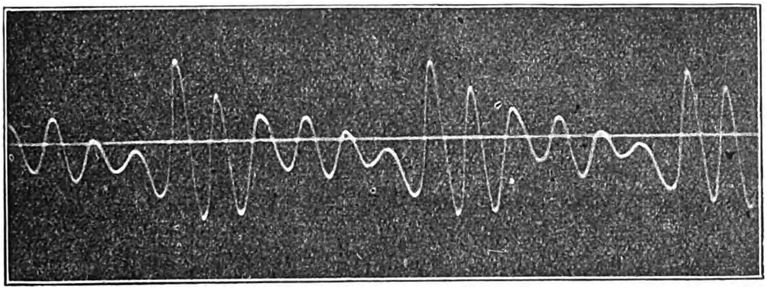


Fig. 21.

Miller's phonogram van den *aa*-klank, frequentie 159 per sec.

In de tweede plaats herinner ik u aan de verschillende trillingswijzen die een veerkrachtig systeem kan uitvoeren.

Een gespannen koord, welks uiteinde door een motor kan worden heen en weer getrokken, kunnen wij op verschillende manieren aan het trillen krijgen, wanneer wij de snelheid van trilling varieeren. Het koord kan in zijn geheel trillen, in twee helften, in drie derde deelen, en zoo vervolgens. Bij een viool of cello vindt men deze verschillende trillingswijzen in de flageolettonen.

Bij een snaar zijn de trillingsfrequenties evenredig aan het aantal deelen waarin de snaar trilt, dus evenredig met 1, 2, 3, 4, enzoovoorts. De intervallen van deze hoogere trillingswijzen met de grondtoon zijn de octaaf, octaafquint, dubbele octaaf, dubbele octaaf groote terts en zoo gaat de rij nog een stuk verder.

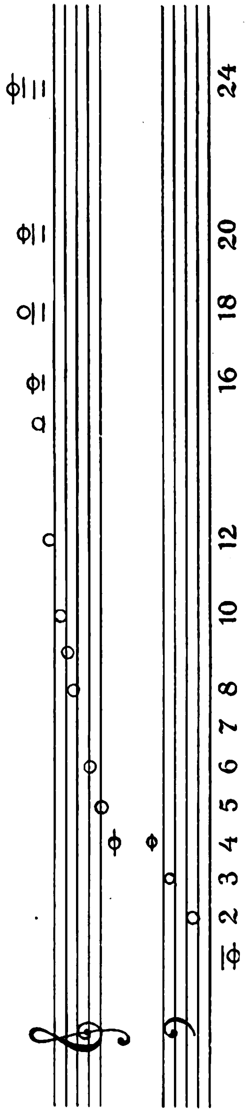


Fig. 22.
De reeks der boventonen.

Al deze hooge tonen noemen wij **boventonen**, en daar de frequenties elk een gemeenen deeler hebben, m. a. w. de perioden een gemeen veelvoud hebben, noemen wij ze **harmonische boventonen** (fig. 22).

Evenals snaren kunnen ook luchtkolommen (fluit, orgelpijp) harmonische boventonen geven.

Platen, tweedimensionaal, geven slechts bij uitzondering harmonische boventonen. Strooien wij op een vlakke plaat zand, en laten wij ze trillen, dan krijgen wij de knoopenlijnen te zien, dat zijn de punten die bij de trillingswijze stil blijven staan. Op dezelfde wijze als wij flageolettonen in een snaar opwekken, kunnen wij door vasthouden van bepaalde punten der plaat de onderscheiden hoogere trillingswijzen doen optreden.

Ook gespannen vliezen hebben zeer verschillende trillingswijzen. De boventonen zijn niet harmonisch. Klokken zijn gebogen platen. Hier kan men de verschiltonen vaak zeer sterk, soms overwegend, hooren.

Ruimten, zooals kamers zijn, hebben ook trillingswijzen, die stellig niet alle harmonisch behoeven te zijn.

Bij kleine kamers liggen voor lage tonen die trillingswijzen nogal veel uiteen. Men hoort ze soms opeens, wanneer de wind door een kier ze aanblaast, of wanneer men, in een buikpunt der trilling staande, kucht of niest. Bij grootere ruimten, en vooral voor de hooge tonen, zijn er vele trillingswijzen die dicht bijeen liggen. In het algemeen geldt de stelling, dat indien de afmetingen der ruimten groot zijn vergeleken bij de golflengte, het aantal trillingswijzen met frequenties binnen een bepaald interval, evenredig is met het volumen, en van den vorm der ruimte niet meer afhangt.

Laat ons een oogenblik stilstaan bij de resultaten, die DAYTON CLARENCE MILLER heeft verkregen bij zijn analyse van verschillende klanken ¹).

MILLER ving deze klanken op in een hoorn, die de geluidsgolven geleidde naar een gespannen membraan, welke door de luchtbeweging in trilling werd gebracht. In het midden van de membraan was een draad bevestigd, die een keer om een fijn asje geslagen was en verder door een veer licht gespannen werd gehouden. Dit asje droeg een spiegeltje, en het is duidelijk, dat een trilling van de membraan een trillende draaiing van dat spiegeltje om de as te weeg moest brengen. Het spiegeltje werd beschenen door een lichtbundel, waarmede een lichtpunt kon worden gefotografeerd op een film. Bij trilling van het spiegeltje teekent dit lichtpunt op de film een lijntje af, en wanneer de film dwars op dit lijntje wordt voortgetrokken, wordt er een golflijn gefotografeerd die in haar periodiek herhaalde grilligheid de eigenaardigheden van den onderzochten klank opteekent.

De fotografische opname wordt met den harmonischen analysator in de bestanddeelen ontleed.

Kunnen wij nu zeker zijn, dat het resultaat dezer analyse werkelijk overeenstemt met de beweging der luchtdeeltjes? Neen, niet aanstonds en zonder meer, want het instrument, hoorn, membraan en spiegelasje, zou wel eens in verschillende mate gevoelig kunnen zijn voor luchttrillingen van verschillende frequentie.

MILLER heeft daarom een serie van 61 orgelpijpen, met frequenties tusschen 129 en 4138 per seconde (vijf octaven van c^2 bas tot c^5 discant) laten maken die, op het gehoor, bij aanblazen een even sterken toon gaven. Hij heeft gemeten, welke uitslagen deze in zijn instrument, dat hij phonodeik noemde, teweegbrachten,

---

¹) D. C. MILLER, The science of musical sounds, New York, 1922.

en had daarmede de gegevens om de componenten der geregistreerde luchtbeweging te herleiden tot een gemeenschappelijke maat van sterkte der gehoorsimpressie. Dat is tenslotte hetgeen MILLER opgeeft: de verhouding der amplituden van de in den klank gevonden componenten, uitgedrukt in de amplitude van een enkelvoudig geluid (van dezelfde toonshoogte als die component), dat met een bepaalde sterkte gehoord wordt. Het zijn niet de amplituden van de beweging zelf. Immers, het oor bezit een verschillende gevoeligheid voor de verschillende toonshoogten. De stroom van geluidsenergie moet, om nog juist gehoord te worden, voor een lage toon van 100 per seconde (as^3 bas) tien- of honderdduizend maal zoo sterk zijn als noodig is voor een hooge toon van 1800 per seconde (ais^3 discant). Vandaar dat soms in de phonogrammen de grondtoon duidelijk op te merken is, terwijl in de tot sterkte van gehoorsimpressie herleide opgave van MILLER hij bijna ontbreekt.

Wij zijn gewend de toonschaal voor ons te zien als het klavier van een piano. Gelijke intervallen vindt men daar, of het in de laagte is of in de hoogte, op gelijke afstanden van elkander. Maar de frequenties die met elkander een bepaald interval vormen, hebben niet een bepaald verschil, zij staan tot elkander in eenzelfde meetkundige reden. Van getallen die in bepaalde meetkundige reden staan, vertoonen de logarithmen een constant verschil. Vandaar dat de toonschaal van het klavier de afbeelding geeft van de logarithmen der frequenties van de tonen. Teekenen wij de frequenties in een logarithmische schaal, dan komt dat neer op het aangeven van de toets van het klavier waarbij die toonhoogte behoort.

Stel nu eens dat wij een grondtoon aangeven op de logarithmische, d. i. op de klavierschaal, en dat wij de bijbehoorende tweede, derde, vierde, enz. harmonische evenzoo aangeven. Dan zullen de frequenties evenver uit elkander liggen, immers bij een grondfrequentie n hebben de boventonen frequenties $2n$, $3n$, $4n$, $5n$, enz. Op de logarithmische schaal echter liggen zij niet evenver van elkaar. Daar liggen grondtoon en 2e harmonische (octaaf), de 2e en de 4e harmonische (weer een octaaf), de 4e en de 8e harmonische even ver uit elkaar. Het ensemble van grondtoon en verschillende boventonen, logarithmisch geteekend, geeft dus niet een verzameling van equidistante punten. De verzameling van deze punten echter vormt een onveranderlijk ensemble (fig. 23), en wanneer de grondtoon een andere plaats krijgt, schuiven zij alle mede.

Dit logarithmisch geteekende ensemble van punten gebruikt

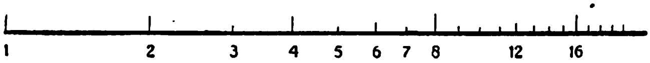


Fig. 23.

Miller om zijn resultaten weer te geven. Bij elken toon teekent hij door een grootere of kleinere spitse driehoek de relatieve sterkte aan. Zoo zien wij in de fig. 24 die de samenstelling van fluitklanken geeft, dat in het lage register, bij zeer zacht aanblazen, de grondtoon verre overweegt, en de octaaf nog even mededoet. Blaast men echter sterk aan, dan wordt de grondtoon relatief veel zwakker, de tweede harmonische (octaaf) overweegt verre, de vierde (dubbele octaaf) volgt in belangrijkheid, en de derde is ook zeer merkbaar. Het middenregister geeft bij pianissimo vrijwel

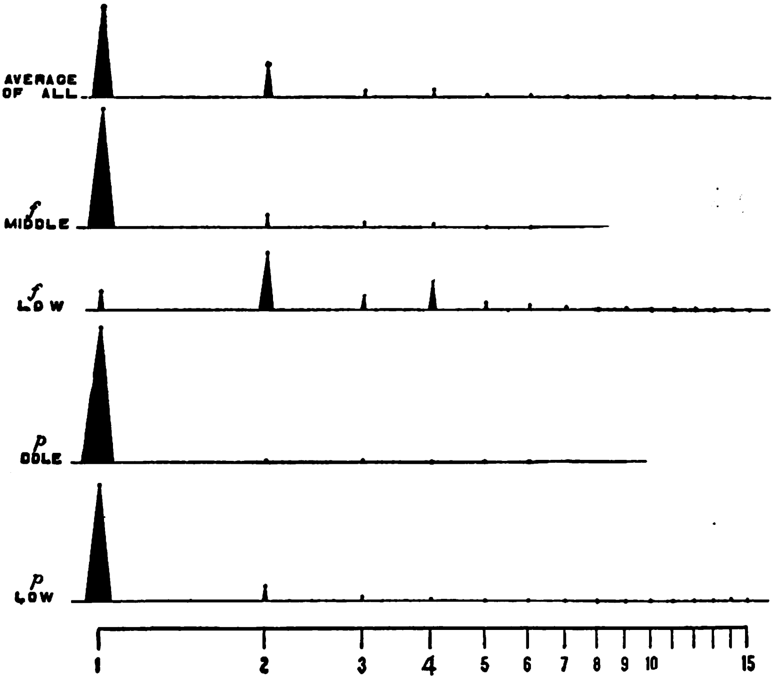


Fig. 24.
Miller's analyse van fluitklanken.

zuiver enkelvoudig den grondtoon, en bij sterker aanblazen treden daar de boventonen niet zoo sterk op.

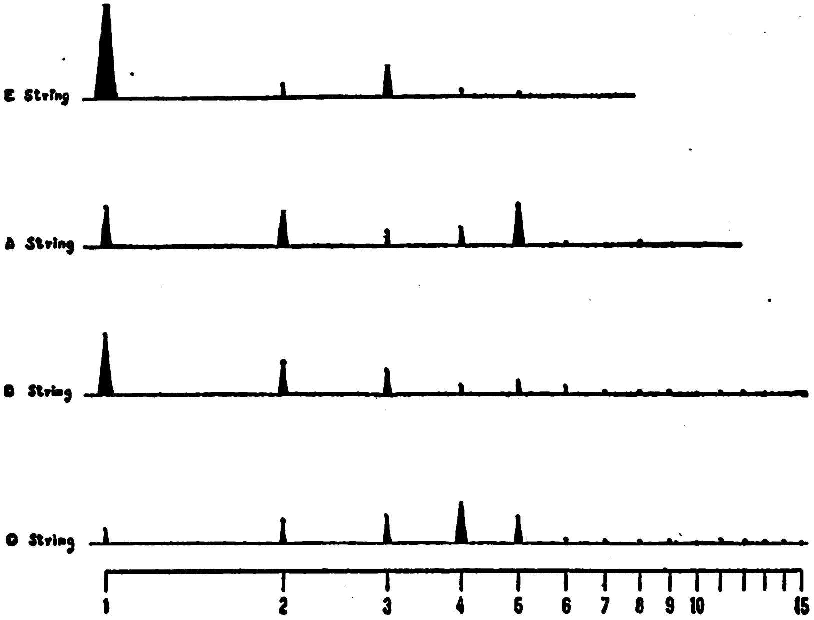


Fig. 25.
Miller's analyse van den klank der verschillende vioolsnaren.

Bij de viool (fig. 25) zijn er veel meer boventonen in den klank, en de rijkdom van boventonen verschilt veel bij de vier snaren. De hoogste, E-snaar, is het armst aan boventonen. Men zal vaak opmerken, dat de klank ijler is dan die van de andere snaren. Dit wordt volkomen door de analyse bevestigd: men moet het toeschrijven aan het verschil in samenstelling van die klanken. Bij de G-snaar valt op hoezeer de grondtoon in sterkte achterstaat, ja bijna ontbreekt. Hoe komt het dan dat wij nochtans dien grondtoon hooren, duidelijker en sterker dan de overwegende tweede, derde, vierde en vijfde harmonische? Wij moeten bedenken, dat indien wij slechts de derde en vierde harmonische hoorden, wij tegelijkertijd den verschiltoon zouden hooren: drie perioden van de eene en vier perioden van de andere vormen samen één periode, die zich telkens herhaalt met een frequentie, die driemaal zoo klein als de frequentie der eene, en viermaal zoo klein als de frequentie der andere harmonische is. Het oor hóórt den toon van deze grootere periode, tegelijk met de andere. Bij de G-snaar zal deze verschiltoon ons worden bijgebracht zoowel door de combinatie van tweede en derde, als van derde en vierde, vierde en vijfde harmonische. Voor al die combinaties is de verschiltoon de grondtoon, en al zou de grondtoon zelf in de beweging der snaar in het geheel niet voorkomen, wij zouden hem toch hooren, zelfs voornamelijk den grondtoon hooren, in de versmelting der boventonen, die niet of nauwelijks meer kunnen worden onderscheiden.

Interessant in dit opzicht zijn ook de klanken van de klarinet en van de hobo.

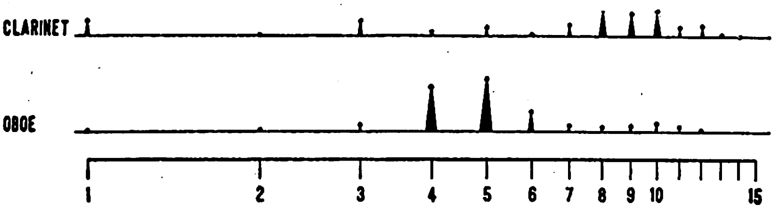


Fig. 26.
Miller's analyse van den klank van klarinet en hobo.

Bij de klarinet valt op het aantal hooge boventonen, waaronder de achtste, negende en tiende harmonische „den boventoon voeren". De octaaf ontbreekt bijna geheel, en hoewel de grondtoon wel aanwezig is, moeten het wel de verschiltonen zijn

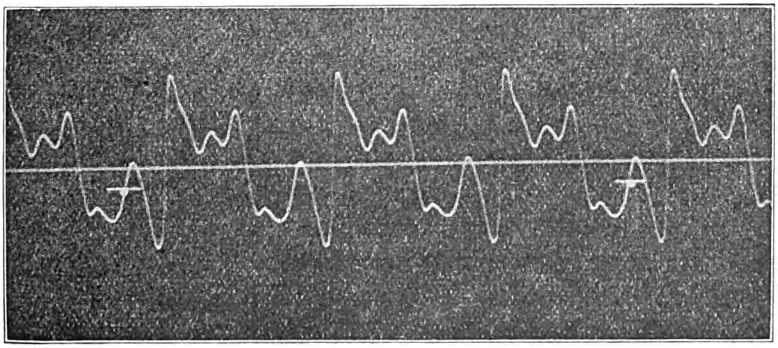


Fig. 27.
Miller's phonogram van een klarinettoon.

tusschen de hooge boventonen, die ons den grondtoon bijbrengen.

De hobo mist bijna geheel den grondtoon en de octaaf, het zijn de vierde, vijfde en zesde harmonische die voornamelijk den klank bepalen.

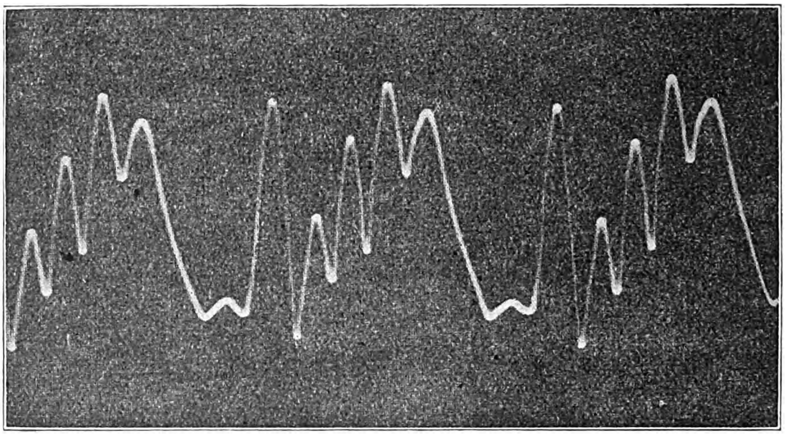


Fig. 28.
MILLER's phonogram van den toon eener hobo.

Nog rijker in boventonen en nog rijker geschakeerd in combinaties van verschillende boventonen, zijn de klanken van een hoorn. Sommige bevatten uitsluitend den grondtoon, bij andere overweegt de octaaf, al of niet vergezeld van hoogere harmonischen, in de buurt van de negende. Bij nog andere is het voornamelijk de quint van de octaaf, vergezeld van de dubbele octaaf. Soms zijn het uitsluitend de hoogere harmonischen, tusschen de zesde en de zestiende, al naar de wijze waarop de hoorn bespeeld wordt.

Door het werk van MILLER kennen we de reden van de verschillende klankkwaliteiten der instrumenten. Een instrument is des te veelzijdiger, naarmate het meer boventonen geeft, en naarmate het, bij de bespeling, die boventonen in verschillende combinaties kan voortbrengen.

Wij zullen verder zien, dat in dit opzicht de grootste rijkdom van mogelijkheden geboden wordt door de menschelijke stem, die onophoudelijk haar klank en haar timbre verandert.

VI. De menschelijke Stem.

Wij willen ter voorbereiding van de bespreking der menschelijke stemgeluiden eerst de trillingsmogelijkheden beschouwen van klankholten. Iedereen weet, dat wanneer hij een flesch uitschenkt, een klokkend geluid daarmede gepaard gaat. Bij het vullen eener flesch uit de waterleiding hooren wij een steeds hooger wordenden toon, zoo dat wij ook zonder kijken op het juiste oogenblik de kraan weten dicht te draaien. Die geluiden komen van trillingen der luchtholte binnen de flesch. Waardoor wordt bij dergelijke holten de toonshoogte bepaald?

Wij willen ons met een oriënteerende benadering vergenoegen. Dan kunnen wij ons duidelijk maken, dat de toonshoogte zal afhangen van het volumen der holte, en van de grootte harer opening.

Laat ons voor het gemak van spreken stellen, dat de opening tamelijk klein is, en de holte tamelijk groot. Wij kunnen ons dan voorstellen dat uitsluitend in den hals van die flesch de lucht heen en weer trilt. In den buik der flesch verdeelt de binnenkomende luchtstroom zich over een zoo groote doorsnede, dat de beweging miniem is.

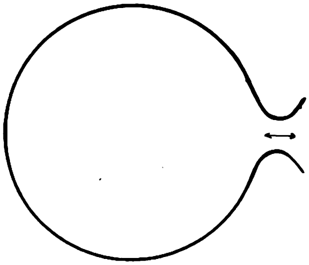


Fig. 29.

Bij het binnenstroomen der lucht zal de druk binnen de holte toenemen, en deze toenemende druk zal een eind maken aan het binnenstroomen, immers, er zal een overdruk ontstaan boven de buitenlucht. Na den stilstand van den luchtstroom zal de lucht naar buiten gedreven worden, zoo lang als er nog eenige overdruk is. Is deze overdruk uitgeput, dan zal de luchtstroom tengevolge zijner traagheid nog doorgaan; hierdoor ontstaat een onderdruk, die den luchtstroom gaandeweg sterker tegenhoudt, en tenslotte wederom een luchtstroom naar binnen zal zuigen. Het spel van drukverschillen en traagheid bestaat in een trillende beweging, die wij als toon hooren. Het is te vergelijken met het schommelspel van de toenemende helling der baan en van de traagheid bij een als slinger opgehangen massa.

Hoe grooter het volumen is, bij behoud van dezelfde opening, des te grooter overmaat van lucht kan de holte bergen voordat de tegendruk met een bepaald bedrag oploopt. Trekt men weder de parallel met den gewonen slinger, dan is het alsof de lengte van den slinger vergroot wordt. Bij grootere volumina komen de drukkrachten, die de luchtstrooming doen omkeeren, langzamer in actie. Vandaar dat vermeerdering van het volumen den toon der holte lager maakt. Toch is het niet zóó, alsof bij viervoudiging van het volumen het viermaal zoo lang zou duren voordat de viermaal zoo langzaam oploopende druk de beweging zou hebben uitgeput. Immers, de druk behoeft, gedurende tweemaal zoo langen tijd, slechts tot de helft van de vorige uiterste waarde op te klimmen, om nochtans in dien dubbelen tijd dezelfde hoeveelheid van beweging der luchtstrooming uitgeput te hebben. Indien men de holte $2\frac{1}{4} = 1\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2}$ maal grooter inhoud heeft, zal de toon ongeveer een quint lager worden, met $1\frac{1}{2}$ maal kleinere frequentie.

Stellen wij ons nu voor, dat bij behoud van het volumen de afmetingen der opening, gelijkvormig, twee maal vergroot worden. Het oppervlak der opening zal viermaal grooter worden. Oppervlakkig zou men nu meenen dat een bepaald drukoverschot in de flesch ook viermaal zoo snel zal zijn vereffend. Bedenkt men echter, dat ook de afmetingen der bewegende luchtmassaas in de richting der stroomlijnen gelijkvormig twee malen vergroot zijn, zoodat er dus in een gelijkvormige stroomfiguur achtmaal zooveel massa in beweging gebracht moet worden, terwijl de drijvende kracht, — eenzelfde drukoverschot als voorheen, werkende over een viermaal zoo groot oppervlak —, slechts vier maal zoo groot is, dan ziet men dat de lucht over de viermaal zoo groote opening maar half zoo snel in beweging komt, zoodat het drukoverschot in slechts twee maal zoo korten tijd vereffend zal zijn. Indien wij dus den toon een quint hooger willen maken, moet de diameter der opening anderhalf maal zoo groot zijn.

Dit alles geldt bij benadering, wanneer de lucht, eenmaal binnen de holte, niet merkbaar beweegt, dat is te zeggen niet vergelijkbaar met de lucht in den hals der flesch. Bij een orgelpijp bijvoorbeeld is de doorsnede overal even groot. Het is alles hals, wanneer wij met een flesch zouden willen vergelijken. Voor zoo'n pijp gelden andere regels.

Wij kunnen de uitkomst op de proef stellen, door een dun waterstraaltje te laten klateren in een flesch, en door het indoen van water het volumen der flesch te veranderen. Wij kunnen een flesch nemen met twee halzen, door de eene het klaterende straaltje binnenspuiten, en afwisselend een der beide halzen sluiten of openen, men zal een interval hooren, dat het midden houden moet tusschen een kwart en een kwint. Men kan een hoog en wijd bekerglas met een glasplaat afsluiten zoo dat nog juist het geluidwekkende drupstraaltje binnen kan, en vervolgens de glasplaat geleidelijk wegtrekken, de toon klimt hooger en hooger.

Wij moeten ons ook rekenschap geven van de toonshoogten der eigen trillingen van gekoppelde holten.

Een holte met twee diametrale openingen heeft ongeveer dezelfde toonshoogte als een even groote holte met een enkele opening die het dubbele oppervlak heeft. Laat ons stellen dat zulk een holte door een harer openingen in verbinding staat met een andere holte. De holte met éene opening zullen wij de eerste noemen, die met twee openingen de tweede. Welke toonshoogte mogen wij verwachten van dit samenstel van twee holten, dat door éene opening in verbinding staat met de buitenlucht?

Wij merken op, dat er kennelijk twee trillingswijzen mogelijk zijn. Bij de eene heeft de luchtbeweging in de twee halzen dezelfde richting, bij de andere zijn daar de luchtstroomingen tegengesteld. Welke trillingsfrequentie hebben wij te verwachten in het gelijkgerichte geval? Ik beweer, dat deze frequentie lager zal zijn dan de frequentie van de eerste holte alleen, en ook lager dan die van de tweede holte alleen. Immers, laat ons het oogenblik beschouwen waarop de luchtstrooming, die naar buiten gericht was, juist omkeert. Vergelijk de eerste holte in de tegenwoordige omgeving (waartoe de aangesloten tweede holte behoort) met wat zij zonder de koppeling was. Thans is in de holte II ook een onderdruk, terwijl, ongekoppeld, buiten de opening de volle druk der atmosfeer gestaan zou hebben. De lucht in de hals zal dus minder snel in beweging komen: de trillingsfrequentie moet lager zijn dan die van holte I. Voor de holte II zijn de omstan-

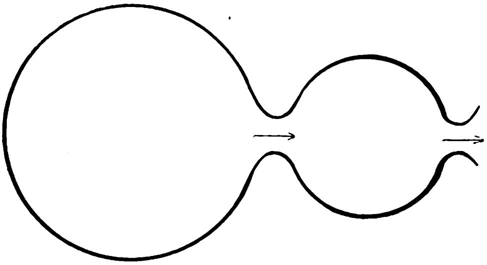


Fig. 30.

digheden, zooals men kan nagaan, op dezelfde manier veranderd: bij ontkoppeling zou op het moment van grootste luchttekort van beide kanten lucht toestroomen: thans moet de holte echter nog lucht aan de eerste holte afstaan, omdat daar de druk nog lager is: de frequentie dezer trilling moet dus kleiner zijn dan die van de trilling van holte II alleen.

De andere trillingswijze heeft een in de beide halzen tegengestelde strooming. Let weer op het oogenblik dat de stroomingen juist tot staan zijn gekomen, en in de holte II een luchtoverschot is. Achter de linkeropening is, in de eerste holte, een onderdruk. Het overschot in de tweede holte zal dus sneller wegstroomen dan in het geval van trilling zonder koppeling. De frequentie dezer trillingswijze is dus grooter dan die van de trillingen van de tweede holte afzonderlijk. Ook zal zij grooter zijn dan de frequenties der trillingen van de eerste holte afzonderlijk. Immers, op het genoemde oogenblik is er vlak buiten de eerste holte, n.l. binnen holte II, een overdruk, en de lucht zal met grooter versnelling door de hals stroomen dan wanneer de holte los in de lucht hing.

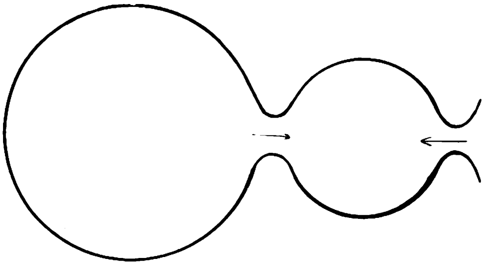


Fig. 31.

Zoodat wij besluiten, dat bij de twee gekoppelde holten er twee trillingswijzen zijn. De frequenties dezer trillingswijzen zijn de een grooter, de ander kleiner dan beide frequenties der holten afzonderlijk [1]).

Wij zullen aan dit voorbeeld herinnerd worden wanneer wij den klank der vocalen geanalyseerd zien.

Een hoofdstuk dat wij thans onder de oogen moeten zien is dat van de zoogenaamde resonantie. Ik zeg zoogenaamde, omdat het beter is te spreken van gedwongen trilling.

Wij spreken vooral van resonantie, indien een geluidsbron, — die zelf een bepaalden toon zou kunnen voortbrengen, — aan het trillen geraakt, omdat een andere geluidsbron dienzelfden toon doet hooren. Van twee gelijkgestemde stemvorken zal de eene, aangeslagen, door middel van de overgebrachte luchttrillingen, de andere aan het medetrillen brengen. Dit geldt niet, wanneer de stemvorken niet op, zooals men zegt, precies dezelfde hoogte gestemd zijn. Ander voorbeeld: men heft door het pedaal van een piano de dempers op, slaat een lagen toon aan, en alle snaren, die dezelfde hoogte hebben als een boventoon van de aangeslagen snaar, zullen gaan resoneeren. Zingt men tegen een gong een van de tonen die deze zelf geven kan, dan zal hij medetrillen en die trilling nog lang voortzetten, als men met den zangtoon ophoudt.

---

[1]) H. Zwaardemaker, *Multiple resonantie*, Onderz. Physiol. Lab. Utr. Hoogeschool, 5e reeks, XIV, p. 184.

Om stemvorken sterker geluid te doen geven, maakt men gebruik van klankkasten, die afgestemd zijn, d. w. z. welker luchtholte juist dezelfde toonshoogte heeft als de stemvork. Door tegen de klankkast te tikken, hoort men duidelijk de eigen toonshoogte, en deze komt overeen met die van de stemvork welke op de kast is bevestigd. Die luchtholte staat in veel effectiever contact met de omgevende lucht dan de stemvork. Indien deze dus de kast aan het trillen brengt, zullen wij den klank door de heele zaal hooren, wat bij een losgehouden stemvork niet het geval is.

Maar juist aan het voorbeeld van zoo'n klankkast kunnen wij opmerken, dat er met het gangbare begrip der resonantie iets niet in den haak is. Want laat ons zoo'n klankkast nemen, zeg afgestemd op a^1. Houden wij voor de opening een aangeslagen stemvork a^1, dan hooren wij diens geluid prachtig versterkt. Wij doen hetzelfde met c^2. Hoewel de klankkast op a^1 is afgestemd, klinkt het geluid van c^2 zeer versterkt wanneer wij de vork voor de opening houden. Hetzelfde ervaren wij bij g^1, bij e^1 en e^2, bij c^1.

Hier blijkt het dus niet waar te zijn, dat de klankkast uitsluitend resoneert op de trillingen waarvoor zij precies is afgestemd: er is een heel gebied van frequenties, en tamelijk uitgebreid, waarop zij door medetrillen reageert!

Inderdaad. Nooit is de z.g. resonantie zóó selectief, dat uitsluitend bij een bepaalde trillingsfrequentie een geïnduceerde trilling kan worden opgewekt. Hoewel het gebied van de frequenties die z.g. resonantietrilling kunnen opwekken soms heel smal is (en bij de radio-installaties streeft men naar zoo scherp mogelijke selectiviteit) er is toch nog altijd een zekere breedte. Is deze breedte zeer gering, dan zegt het spraakgebruik resonantie. Is zij aanzienlijk, dan spreekt men van gedwongen trilling. In al die gevallen echter heeft men te maken met gedwongen trillingen.

Deze trillingen geschieden met de frequentie van de trillende kracht die ze opwekt. De mate waarin zij worden opgewekt hangt af van twee relaties: van het verschil tusschen de frequenties van de dwingende kracht en van de eigen trilling, en voorts van de demping van de eigen trilling. De eigen trilling kan sterk gedempt zijn, hetzij doordat er veel wrijving is, of doordat, zooals bij de klankkast, er veel geluidsenergie dadelijk in de omringende lucht wordt afgegeven. Een trillend systeem, dat in zijn eigen beweging sterk gedempt is, zal op een trillingopwekkende kracht niet zoo sterk reageeren als een systeem dat aan minder wrijving of energieafgifte onderhevig is, zelfs niet wanneer het precies in de eigen frequentie wordt opgewekt; maar aan den anderen kant zal het merkbaar reageeren op een veel wijdere verscheidenheid van trillingopwekkende krachten, in een veel wijder frequentiegebied gaan medetrillen. Een stemvork, zelfs op een klankkast gemonteerd, blijft lang doorklinken: een bewijs dat zijn energie relatief maar langzaam weglekt. Daarom is zijn resonantiegebied maar smal, bij ontstemming reageert de vork al dra niet meer. Een pianosnaar kan lang blijven doorklinken, de demping is gering, het resonantiegebied is smal. Binnen dat smalle gebied resoneert ze sterk, daarbuiten nagenoeg niet. Een vioolsnaar op klankbodem klinkt op verre na niet zoo lang door: sterke demping met als gevolg zwakke, misschien moeilijk vast te stellen „resonantie", maar in een wijd gebied.

Het kan zijn, dat een samengesteld systeem meer dan één, misschien wel zeer vele trillingswijzen heeft. Indien er op dat systeem een trillende kracht aangrijpt, zal deze dan ook meer dan één, ja verscheidene trillingswijzen tegelijk kunnen opwekken. Zulk een geval hebben wij in een zaal. Indien daarin een orgelpijp staat te klinken, is dat een „uitwendige" kracht, die op de trillingswijzen der zaal inwerkt, en ze zal dwingen mede te trillen met de frequentie van de dwingende kracht, dat is van de orgelpijp. Zoodra de orgelpijp zwijgt houdt echter die dwingende kracht op, elk van de opgewekte trillingswijzen zal, en nu met haar eigen frequentie, uitklinken. Aangezien deze frequenties van elkander kunnen verschillen, ligt daarin een aanleiding voor het optreden van zwevingen. Inderdaad hoort men, luisterende naar den nagalm, het geluid niet glad en exponentieel wegsterven, maar met afnemende zwevingen. Dit is ook hetgeen men met een oscillograaf waarneemt, die op een bepaalde plaats is opgesteld. Echter treden de zwevingen niet in de geheele zaal synchroon op, en het gemiddelde van de geluidsenergie in de geheele zaal neemt wel exponentieel af. Merkwaardig is het, uit de oscillogrammen, zooals dr. Zwikker die heeft opgenomen, te zien dat het aanzwellen duidelijk complementair verloopt aan het uitsterven, overeenkomstig de redeneering van blz. 10.

Aan den anderen kant kan het ook zijn, dat de frequenties van verschillende geluidsbronnen binnen het resonantiegebied van eenzelfde trillend systeem vallen. Dan zal dit op elk dier geluidsbronnen reageeren met medetrillen, in de frequenties dier geluidsbronnen. — Of het geval kan zich voordoen, dat een aantal verschillende boventonen van een enkele geluidsbron in het resonantie gebied van eenzelfde klankkast komen. Dan zal die klankkast elk van die boventonen versterkt doen hooren, in een mate die beantwoordt aan hun verschil met de eigen frequentie der klankkast en aan haar demping.

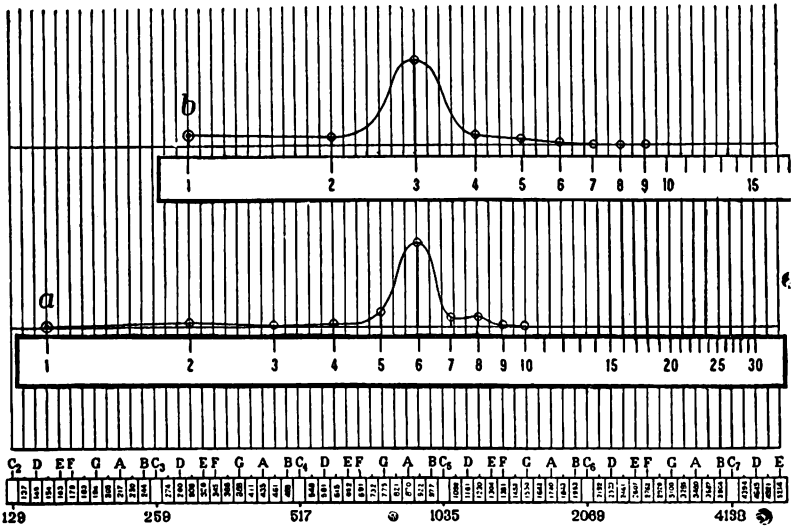


Fig. 32.

Miller's analyse van twee *aa*-klanken, met een octaaf onderscheid.

Laat ons Miller volgen in de analyse van den klinker *aa*. Men kan denzelfden klinker op verschillende toonshoogten zingen. Wat is hetgeen daarbij hetzelfde is? Miller geeft de analyse van twee *aa*'s, gezongen op een grondtoon van 150 per sec en een octaaf hooger, 300 per sec. Bij den eersten toon, in de bas, komen vooral de 5e, 6e, 7e en 8e harmonische versterkt te voorschijn. Bij den hoogeren toon is vooral de derde harmonische zeer sterk. De tonen hebben dus een verschillende kwaliteit. Maar wat zij gemeen hebben is, dat de versterkte boventonen liggen in eenzelfde gebied. Duidelijk komt dit uit, wanneer de analyses van verscheidene *aa*-klinkers, op allerlei toonshoogten gezongen, worden bijeengeteekend in eenzelfde diagram, zooals men in de figuur 33 ziet, waar nog drie afzonderlijke analyse-uitkomsten mede geteekend staan. Men ziet hoe de versterkte harmonischen bijeen liggen, opgedrongen rondom een gemiddelde frequentie die Miller in deze figuur aangeeft te zijn 922.

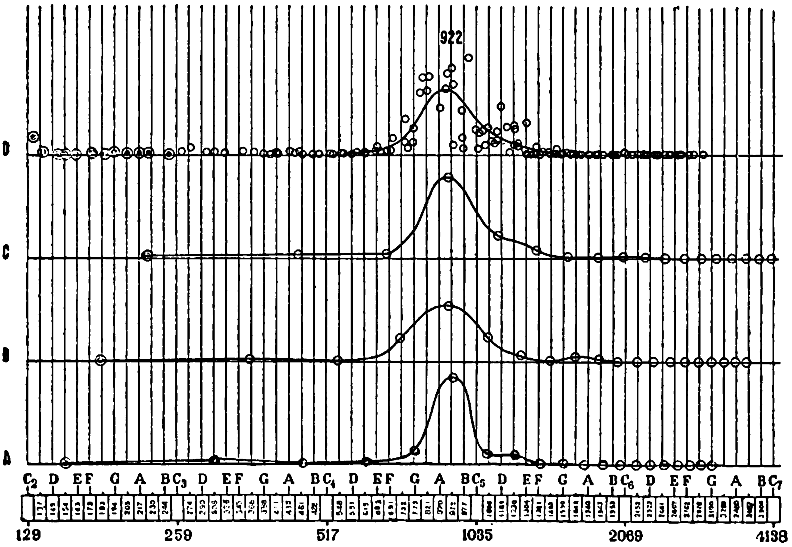


Fig. 33.

Samenvatting van Miller's analyses van *aa*-klanken.

Bij het uitspreken van de *aa* wordt de mond wijd geopend, althans men behoort dat te doen om duidelijk te spreken, en bij het zingen eerst recht. De tong ligt laag. De mondholte heeft dan een hoogen eigen toon. Men kan dien toon hooren, door in den open *aa*-stand de mondholte bij de mondhoeken aan te slaan. Het is deze toon, dien men hoort wanneer men de *aa* fluistert. Bij het fluisteren treden wrijvingswerveltjes op als de lucht langs de stembanden strijkt, en daardoor wordt de eigen toon der mondholte aangeblazen. Men herkent dezen toon als een *aa*.

Bij het spreken komen de stembanden in actie. De lucht moet door de tusschengelegen spleet stroomen, maar bij de trilling der stembanden (die men aan het strottenhoofd kan voelen) wordt de spleet telkens voor een oogenblik afgesloten. Daardoor is de luchtstroom een onderbroken stroom, een reeks van kleine snel op elkander volgende ontploffingen. Deze hebben een trilling opwekkende werking voor de mondholte. Wij verkeeren in het geval dat de mondholte, als een systeem dat trillen kan, wordt in beweging gebracht door een aandrijvende wisselende kracht. De mondholte zal reageeren met een opgewekte trilling, die de frequentie zal hebben van de opwekkende kracht. En indien deze niet enkelvoudig periodiek is, maar een aantal harmonische componenten in zich heeft, zullen deze elk voor zich in de mondholte een trilling opwekken met hun eigen frequentie, en met een sterkte die bepaald wordt door de relatie tusschen die frequentie en het resonantiegebied der mondholte. Dit resonantiegebied is tamelijk breed, omdat de trillingen der mondholte sterk gedempt zijn.

De intermitteerende luchtstroom die de trillende stembanden laten passeeren, heeft een bepaalde periode. Alleen de frequentie van deze periode, en veelvouden daarvan, dat zijn de frequenties der harmonische boventonen in den luchtstroom, zullen in de opgewekte trilling kunnen voorkomen. Niet echter de frequentie van de mondholte zelf. Het rigoureus periodiek openen en sluiten van den luchtweg door de stembanden laat geen speling voor het ontstaan van wrijvingswervels met een andere periode, waardoor, als bij het fluisteren, de mondholte zelf zou aangeblazen worden. Vandaar dat de frequentie der mondholte in den gezongen toon ontbreekt, tenzij er een zeker gebrek aan beheersching is van den luchtstroom, die ,,wilde lucht'' genoemd wordt en die een fraaien toon onmogelijk maakt.

Indien een bas een *aa* zingt op een grondtoon van 128 per sec, dan komt de grondtoon zelf haast niet te voorschijn. Het zijn de boventonen in de omgeving van 900 en 1000 per sec die in het bijzonder versterkt worden. De zevende en de achtste harmonische, ook nog de zesde en de negende, zullen in hoofdzaak den klank bepalen. Ons oor bepaalt de toonshoogte van den klank, door de verschiltonen tusschen die harmonischen, en hoort de hoogte van de voorhanden tonen in het typisch kenmerkende van den klank *aa*.

In de figuur 34 reproduceeren wij een opname, door Irving B. Crandall [1]) gemaakt van den klinker *aa*. De frequentie is ongeveer 117 per sec. Van de fijne kartelingen telt men ongeveer 32 pieken per periode. Dat zijn zeer hooge boventonen, die aan Miller's analyse ontsnapten; wij komen daarop terug. Ziet men van de fijne karteling af, dan is er nog een op en neer in de kromme, waarvan ik acht toppen meen te zien, met wisselende amplitude, die aannemelijk maakt dat er hier een zweving is tusschen de 8ste en 9de harmonische. Dat past goed bij Miller's analyse.

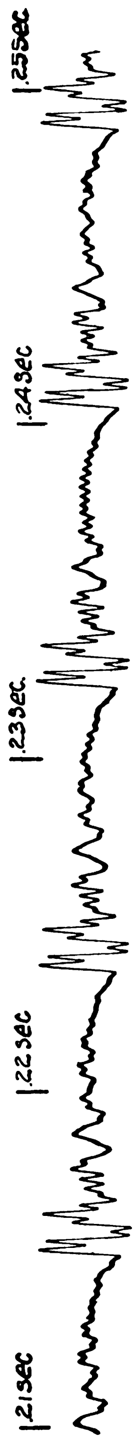


Fig. 34.
Crandall's phonogram van een *aa*-klank.

Indien wij de mondopening met de lippen kleiner maken, en door een lagen stand van de tong de holte zoo groot laten als zij was, dan wordt de eigen frequentie der mondholte lager. Wij hooren dit, wanneer wij fluisteren. Geeft de stem een toon in deze mondholte, dan worden in een ander resonantiegebied de boventonen versterkt: wij hooren een a̱ (van dak). Wordt de mond nog meer gesloten door vooruitbrengen der lippen, dan krijgen wij de o̱(o̱o̱)-klanken van bol en van boor, de *oo* van boon en tenslotte de *oe* van boek en van moe. Miller geeft voor de karakteristieke resonantiegebieden, die men „formant"-gebieden noemt, de figuur 35. Voor de helderste, meest open klinkende *aa* geeft hij hier een resonantiegebied bij 1050 per sec (c^3).

---

[1]) I. B. Crandall, *The sounds of speech*, The Bell System Technical Journal, IV, p. 586, 1925.

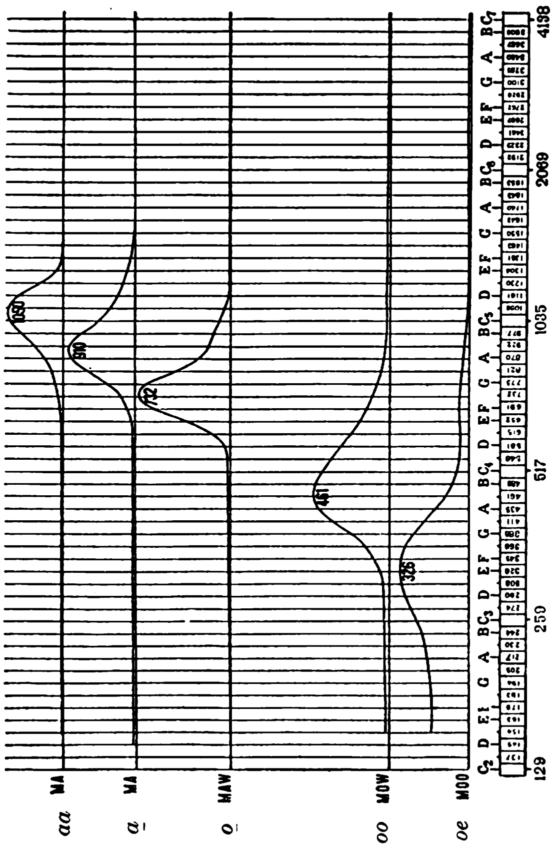


Fig. 35.
Formantgebieden volgens MILLER.

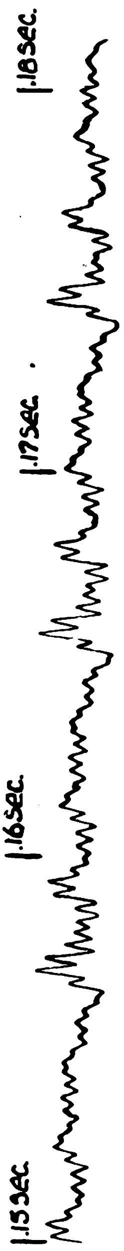


Fig. 36.
CRANDALL's phonogram van een *oe*-klank.

Zien wij naar een kromme die CRANDALL verkregen heeft (fig. 36) van de *oe* (uit boek), met een grondfrequentie 120 per sec, dan valt, behalve de zeer snelle rimpeling van een 24ste of 25ste harmonische, vooral de schommeling op van een vierde harmonische, die niet steeds met dezelfde amplitude plaats vindt, zoodat men vermoedt dat er ook een derde harmonische is, welke met de vorige tot zwevingen aanleiding geeft. Deze twee, met frequenties 360 en 480 per sec liggen iets meer naar den kant van 't resonantiegebied der *oo* dan de figuur van MILLER voor de *oe* van moe aangeeft.

Van den *aa*-stand uitgaande, kunnen wij de mondholte ook vernauwen door den rug van de tong naar het harde verhemelte

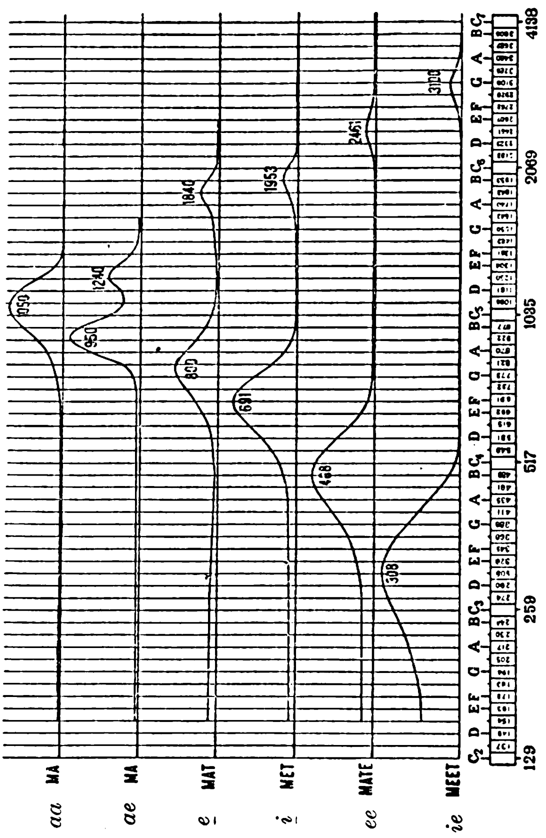


Fig. 37.
Formantgebieden volgens MILLER.

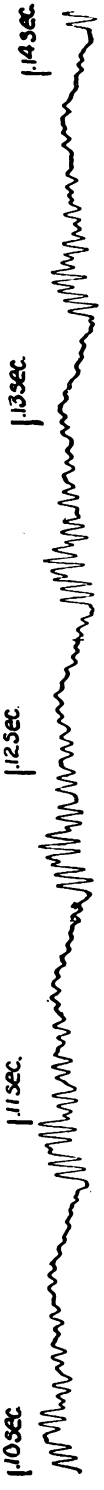


Fig. 38.
CRANDALL's phonogram voor *ie*.

te heffen. Wij krijgen dan een meer of minder uitgesproken verdeeling van de mondholte in twee deelen. Het gedeelte achter de tong, dat tot in den hals reikt, heeft een betrekkelijk groot volumen; althans het volumen is niet veel kleiner dan van de heele mondholte in den *aa*-stand. Die achterholte op zichzelf zou dus een lagere eigen toon hebben. — De mondholte vóór de tong echter heeft een klein volumen gekregen, en de opening kan nog tamelijk wijd zijn: deze vóórholte heeft dus een veel hoogeren eigen toon gekregen. Wij geraken nu in het geval van de gekoppelde holten, dat wij bespraken. De mondholte als geheel zal nu twee eigen frequenties hebben. Zij zal twee resonantiegebieden hebben, en er zullen boventonen versterkt worden die of in het eene, of in het andere gebied liggen.

Dat is ook de uitkomst van **Miller**'s analyse (fig. 37) voor de klinkerreeks van *aa* naar *ie* langs *ae* (waereld), *e* (ster, bel), *i* (pit, peer), *ee* (beet), *ie* (bier, biet). Naarmate men in de reeks verder komt, wordt het lage resonantiegebied lager, en het hooge hooger. Het verst uit elkander liggen zij bij de *ie*.

Het karakteristieke waarin de *ie* zich van de *oe* onderscheidt, is de versterkte aanwezigheid van de hooge boventonen in de omgeving van 3000 per sec. Indien men deze zou afsnijden, zou men uit de *ie* een *oe* maken.

Inderdaad heeft **Miller** een aantal harmonisch afgestemde orgelpijpen zoo laten samenklinken, dat men *ie* hoorde. Schakelde hij plotseling de hooge pijpen uit, dan bleef er *oe* over.

Bekijken wij de kromme, die **Crandall** geeft voor de *ie* op een grondtoon van de frequentie 124 per sec (fig. 38), dan zien wij inderdaad een hooge boventoon aanwezig, die hier gedurende een periode lang niet in dezelfde mate als bij de vorigen afneemt. Men telt 23 pieken in een periode, wij zullen met de 22ste, 23ste en 24ste harmonische te maken hebben, met frequenties van 2730 tot 2980 per seconde. Afgezien van deze karteling schommelt de lijn twee maal per periode op en neer: de tweede harmonische met een frequentie van 248 per sec, die wellicht wat onsymmetrisch gemaakt wordt door de derde harmonische, van 372 per seconde.

Behalve deze twee rijen van klinkers krijgt men een derde rij, indien men bij de verhoogde tongstanden ook de lippen sluit. Dat geeft ons *eu* (freule), *u* (dut, deur), *eu* (deun), *uu* (duur). Buiten deze twee rijen staan de typisch-hollandsche *ei* en *ui*. Van deze klinkers kan ik u geen opnamen of analysen toonen.

Van de halfklinkers *l*, *m*, *n*, *r*, *ng* heeft **Ferdinand Trendelenburg** ¹) opnamen gemaakt. De *r* vertoont natuurlijk een afwisselende sterkte, dat is het rollen van de *r*. Maar afgezien van die wisselende amplitude, die ons verbiedt de trilling zuiver periodiek te noemen, heeft toch elke periode nagenoeg denzelfden vorm. Hetzelfde is ook het geval bij de andere halfklinkers, al is **Tren-**

---

¹) F. **Trendelenburg**, Physik der Sprachlaute, Geiger en Scheel's Handbuch der Physik, VIII, p. 450, ook Wiss. Veröffentl. a. d. Siemens-Konz., III, 2, p. 43, 1924; IV, 1, p. 1, 1925.

DELENBURG niet geheel tevreden met de periodiciteit, vooral wat de fijne kartelingen betreft. In enkele gevallen echter was deze periodiciteit er wel. Ik ben geneigd te gelooven dat er bij de vorming van de halfklinkers slordigheid van den spreker een grootere rol speelt dan bij de klinkers. Ook bij deze heeft men in de fijnste details afwijkingen, die niet in elke periode terugkeeren. Het is zeer moeilijk, bijna onmogelijk, om de toonshoogte precies constant te houden. De frequentie schommelt alras met enkele procenten. Toch zou het pedanterie zijn te zeggen dat de klinkers niet periodieke trillingen zijn.

Het zou mij niet verwonderen, indien de analyse aan het licht zou brengen, dat de halfklinkers verschillende samenstelling hadden naar gelang van den klinker, of van den consonant, waar zij vóór of na komen, omdat in verband met die voorgangers of opvolgers wij zonder erg de mondholte nog in een vorigen stand hebben, of al voor een volgenden stand gereed maken, en zulks den klank beïnvloeden moet.

Bij de *s* zijn er frequenties tot 5800 per sec. TRENDELENBURG's kromme geeft den indruk dat er een zekere periodiciteit in is. Men hoort hier zonder moeite een groot verschil tusschen de *s* van soep of van sedert of van sier.

Bij den sisklank *sj* echter is er geen spoor van periodiciteit te herkennen in de opname van TRENDELENBURG. De gemiddelde frequentie schommelt volgens hem tusschen 3800 en 4000 per sec.

Wij willen nog een oogenblik stilstaan bij de vraag, of altijd de klank der stem uitsluitend harmonische boventonen bevat van den grondtoon. De eigen frequenties der mondholte staan tot elkander in geen harmonisch verband. Reeds in het geval de mond wijd open staat, als bij de *aa*, heeft de mondholte zelf nog wel boventonen, van welke althans één nog mee zal spelen in de klankvorming, en bij den gecompliceerden vorm der holte kan men niet verwachten, dat de frequentie van dezen boventoon harmonisch bij den grondtoon past. In geval de mondholte opgevat mag worden als een paar gekoppelde holtes, heeft men eveneens twee stellig niet harmonische frequenties. En hoezeer is dit beeld van slechts twee gekoppelde holtes van de werkelijkheid een schematische vereenvoudiging! Inderdaad is daaraan ook nog de neusholte gekoppeld, hetzij met een opening, hetzij door het zachte verhemelte heen. Ook zou men de keelholte nog als afzonderlijke holte moeten aanmerken, en voorts mag men ook de borstholte niet verwaarloozen.

Zullen de verschillende onharmonische eigen frequenties, die men in zulk een complex van holten heeft, niet aanleiding geven tot onharmonische componenten in de klanken?

In de eerste plaats is het duidelijk, dat in het gewone spreken zelden een of andere klank op bepaalde toonshoogte wordt aangehouden. Juist het wisselen van de toonshoogte bepaalt het verschil van beteekenis van bijvoorbeeld de vraag: „neen?" en de besliste weigering: „neen!" En wanneer er geen toonshoogte onveranderd wordt bewaard, kan er geen sprake zijn van harmonische samenstelling van den klank. Ook is er geen zanger, die strikt genomen erin slaagt om den toon volkomen strak op peil te houden. Naar de letter zouden dus altijd de klanken louter onharmonische bestanddeelen hebben.

Deze uitspraak gaat kennelijk verder dan de bedoeling kan wezen. Het zou zijn alsof men te kennen wilde geven dat aan een huis, in den meest kubistischen baksteenstijl, geen rechte lijnen of platte vlakken zouden te vinden zijn. De bedoeling van de vraag is een andere: of niet de onharmonische eigen frequenties door resonantie aanleiding konden geven tot disharmonische bestanddeelen in den klank? Op deze vraag moet men antwoorden, dat indien in den luchtstroom die door de stembanden intermitteerend wordt doorgelaten, een zuivere periodiciteit heerscht, indien m. a. w. uitsluitend harmonische bestanddeelen in de aandrijvende kracht voorkomen, er uitsluitend harmonische bestanddeelen van den klank in de resonantiegebieden kunnen worden versterkt. Hoe onharmonisch de eigen frequenties mogen zijn, de resonantiegebieden beslaan daarnaast een zekere breedte, en elke harmonische van den luchtstroom, die binnen die gebieden valt, wordt versterkt.

Het kan echter zeer wel zijn, dat er aan den luchtstroom iets hapert. Het kan zijn, dat de stembanden door gebrek aan oefening, of door te groote krampachtigheid, niet stabiel genoeg trillen, dan zullen er geen eigenlijk gezegd harmonische tonen zijn. Het kan ook zijn, dat de lucht met te groote onregelmatigheid door de stemspleet geperst wordt (wilde lucht), of met te groote kracht, zoodat er behalve de periodieke wervels die bij de geregelde stemwerking optreden, onregelmatig fluctueerende turbulenties optreden: dan merkt men aan de leelijkheid van het geluid dat er onharmonische tonen door de harmonische heenkomen, maar eerder primair aangeblazen, dan door resonantie. Hierin ligt het verschil tusschen een schreeuw en een krachtigen roep, het verschil ook tusschen angstgekrijt van een kind, waaraan wij hooren dat het in nood is, en een uit eigenzinnigheid aangeheven lawaai.

In zulke gevallen zal men stellig onharmonische bestanddeelen van den klank krijgen. Vaak zal een zanger bij zijn studies ook gelegenheid hebben op te merken, dat terwijl hij een gamma op een of anderen klinker zingt, een bepaalde hooge toon daar doorheen, op eenzelfde hoogte blijft klinken, ongeacht de stijgende of dalende lijn zijner muzikale figuur. Dat is dan zulk een onharmonische. Ik vermoed dat hij zal studeeren om dien onharmonischen gast tot zwijgen te brengen.

Bij de gereproduceerde krommen valt op, dat de karteling met hooge frequentie zoo kennelijk afneemt in amplitude tegen het einde der periode. Vele der krommen van CRANDALL vertoonen die eigenaardigheid, en ook vindt men dat in krommen van TRENDELENBURG, ofschoon niet bij alle. Dit detail maakt den indruk van een uitstervende trilling, die na aangeslagen te zijn, zeer snel afneemt. Inderdaad wordt ze in de krommen haast onmerkbaar in $^1/_{100}$ seconde. De onderstelling lijkt mij niet ongerijmd, dat inderdaad bij het openen van de stemspleet een abrupte luchtstoot een boventoon van de mondholte aanstoot, misschien enkele boventonen, die vrijwel uitgeklonken zijn, wanneer de volgende abrupte luchtstoot komt. Deze snel wegstervende hoogfrequente trillingen herhalen zich regelmatig en congruent in elke periode, zij vertegenwoordigen dus harmonische bestanddeelen, en bij de analyse zullen zij ook als superpositie van harmonische componenten voor den dag komen. Geheel in overeenstemming daarmede is trouwens de opvatting van de abrupt wisselende luchtstooten als eveneens een superpositie van vele hoogere harmonisch wisselende stroomvariaties. Door deze hoogere componenten, voor zoover zij binnen het resonantiegebied liggen, worden juist opgewekt, die hoogere harmonische componenten in de trilling, die door hunne superpositie de beweging geven, waarin wij een gedempt uitklinken zien van de aangeslagen anharmonische boventoon der mondholte.

In hoofdtrekken hebben wij nu de karakteristiek van een aantal klinkers leeren kennen. Van persoon tot persoon echter varieeren in detail de vormen der resonantiegebieden, vooral die met zeer hooge frequenties. Ja, ook bij eenzelfde persoon zullen deze voor verschillende hoogte van den geïntoneerden klinker, meestal uiteenloopen omdat dan vaak de tongwortel op een andere plaats komt. Bij coloratuurpassages zal een zanger echter moeten zorgen, dat het resonantiegebied niet door een verspringen van den keelstand abrupt verandert. De verschillende boventonen die met den grondtoon in hoogte congruent op en neer gaan, bepalen in hun onderlinge sterkteverhouding het gehalte van den klank. Deze onderlinge verhouding moet eveneens continu veranderen. Indien door een plotselinge verandering in vorm en ligging der resonantiegebieden abrupt de sterkteverhoudingen omgezet worden, schaadt dat aan de eenheid en fraaiheid van den zang.

Bij verschillende gemoedstemming, wanneer door verschillende spierspanning de mondholte wijder of nauwer gemaakt wordt, veranderen de resonantiegebieden, en daarmede de klank. Ook wisselt de gemoedstemming de spanning in de stembandspieren, en dat kan den rijkdom aan en sterkte van de boventonen in den intermitteerenden luchtstroom beïnvloeden. Blinden zullen aan de wisselingen in de fijne nuances en timbres der stemmen zeer veel kunnen hooren omtrent de stemmingen, karakters en bedoelingen hunner medemenschen, wier gelaatsuitdrukking zij niet kunnen zien. Dat alles deelt zich aan de lucht mede in het detail van de trillingen.

Wij zijn aan het eind onzer beschouwingen. Wij willen, geholpen door den heer G. TH. PHILIPPI, besluiten met een demonstratie der geluidstrillingen door middel van een paar spiegeltjes, die wij draaibaar op papierbandjes bevestigd hebben aan den trillenden papierkegel van een luidspreker, dien onze vrienden te Eindhoven te onzer beschikking gesteld hebben. Een lichtbundel die via deze spiegeltjes door een draaienden spiegel op het scherm een loopende lichtvlek werpt, teekent daar vergroot voor u af de trillingen, die uw oor tegelijkertijd hoort als het muziekstuk, uitgevoerd door de instrumenten, die u aan den klank herkent.

SLOT.

INHOUD.

Bladz.

I. **Akoestiek in de open lucht** 1
Scheepsroeper 1
Tribune en heuvelhelling 2
Amphitheater 2
Geluidsvoortplanting 3

II. **De nagalm in zalen** 5
Wezen en definitie van den nagalm 6
SABINE's formule 8
Absorptiecoëfficiënten 10
Specifieke eischen voor verschillende doeleinden 10
Opstelling van absorbentia 13

III. **Focus en echo** 15
Reflecties aan gekromde wanden 15
Afzonderlijke echo 19
Caissonneering 21

IV. **Gerichte geluidkaatsing** 22
Omzetting van den nagalm in nuttige geluidsversterking . . . 22
Wanden als geluidkaatsers 22
Zoldering als geluidkaatser 24
Klankkaatser 26
Luidsprekers 30
Plaatsing en omgeving van een kansel 32
Astigmatische geluidsbundels 35

V. **Klankanalyse** 36
Samenstelling van trillingen 36
Ontleding van periodieke bewegingen 38
Harmonische boventonen 40
MILLER's phonodeik 41
Fluit, viool, klarinet en hobo 43

VI. **De menschelijke stem** 47
Klankholten 47
Gekoppelde holten 49
Resonantie als gedwongen trilling 50
De klinker *aa* 54
De klinkers *a̰*, *o̰*, *oo*, *oe* 56
De klinkers *ae*, *ḛ*, *ḭ*, *ee*, *ie* 58
Halfklinkers en sisklanken 59
Harmonische boventonen 60
Persoonlijk timbre 62

SUR LA FORME D'UN RÉFLECTEUR DU SON

PAR

M. NUYENS et G. TH. PHILIPPI.

Dans certaines églises et auditoires il serait préférable de s'arranger qu'on entende mieux l'orateur.

En un point déterminé de la salle la compréhensibilité de l'orateur dépend du rapport entre le son utile et nuisible. Par le son utile en un point déterminé nous entendons aussi bien le son qui provient directement de l'orateur que celui qui a été réflecté par certains murs, à condition que l'intervalle de temps entre les deux moments d'observation de ces deux sons soit plus petit que le plus petit intervalle dont le commencement et la fin peuvent être observés séparement par l'oreille. Nous appellerons sons nuisibles ceux qui mettent un temps plus long pour atteindre l'oreille; ces sons proviennent soit de la réflexion sur les murs se trouvant à une grande distance de l'orateur, soit de l'entassement du son dans certaines parties de la salle. Ordinairement ces sons nuisibles sont indiquées par le nom ,,sons mourants".

Il s'agit donc de rendre le rapport entre le son utile et nuisible le plus favorable possible.

On peut rendre plus grande l'énergie du son utile au dépend du son nuisible en plaçant derrière l'orateur un miroir réflectant le son dans l'auditoire. Ceci peut être realisé en prenant soin que les ondes réflectées ne se propagent pas en hauteur. Ces ondes doivent donc être des planes ou des cylindres à axe vertical.

Si on veut que les ondes réflectées soient planes il faut que le réflecteur du son soit une paraboloïde, la bouche de l'orateur se trouvant au foyer. La hauteur et la largeur d'un tel miroir limitent la hauteur et la largeur des ondes. Si donc on veut atteindre toute la salle il faudra donner au mur derrière l'orateur la forme d'une paraboloïde de révolution. Ce qui serait difficile à exécuter.

En employant une surface réflectante plus petite, ce miroir ne pourra plus avoir la forme d'une paraboloïde si on veut atteindre tout le public. Pour cette cause on ne pourra pas faire usage d'ondes planes.

Pour limiter quand même les ondes en hauteur, il est préferable d'employer pour ondes réflectées des cylindres. Les plus simples sont des cylindres de révolution à axe vertical.

Ce qui est nécessaire pour cela nous l'expliquerons au moyen de la figure 1. La source sonore soit placée en O. Les sphères B_1 et B_2 représentent des surfaces d'ondes primaires à différents moments. Soient P et Q des points de la surface inconnue, C_1 et C_2 les surfaces d'ondes réflectées (cylindres admettant la verticale O^1R comme axe). Abaissons de P et Q des perpendiculaires sur O^1R. Les pieds sont respectivement P^1 et Q^1, les points de percée avec C_2 sont les points A et B.

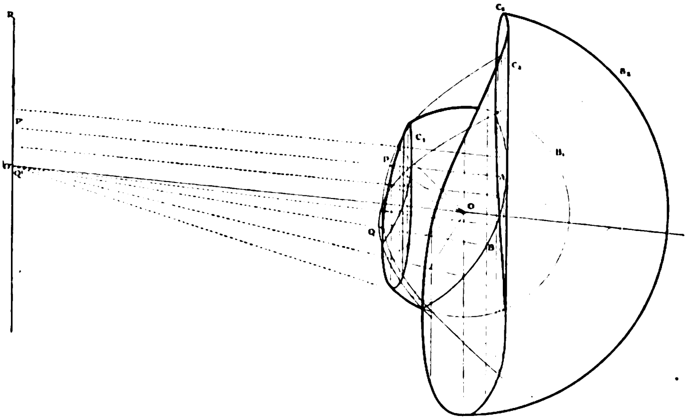


Fig. 1.

Si on veut satisfaire aux conditions il faut:

$$AP' = BQ',$$

$$OP + PA = OQ + QB,$$

ou bien

$$P'P - OP = Q'Q - OQ.$$

Pour un point quelconque P de la surface il faut avoir

$$P'P - OP = \text{constante}. \tag{1}$$

En d'autres mots, la surface réflectante est le lieu géométrique des points pour lesquels la différence des distances à un point fixe et à une droite fixe est constante. Cette définition nous permet de déterminer son équation.

Prenons le point O comme origine d'un système de coördinées rectangulaires. OZ est la verticale en O dirigée vers le haut, OX l'axe focal dirigé vers le public, en d'autres mots la perpendiculaire abaissée de O sur la droite fixe donnée ($O'O$ dans la figure 39). Soient a la distance $O'O$ et b la constante définie par la formule (1). Il est facile de voir qu'il faut $a > b$ si on veut exclure les surfaces imaginaires. L'équation de la surface devient:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x+a)^2 + y^2} - b, \tag{2}$$

ou bien:

$$(z^2 - 2ax - a^2 - b^2)^2 = 4b^2 \Big[(x + a)^2 + y^2\Big]. \tag{3}$$

Pour se représenter la forme de la surface, faisons une section avec le plan vertical XOZ. Nous obtenons les deux paraboles suivantes:

$$z^2 - 2\,x\,(a \pm b) - (a \pm b)^2 = 0.$$

Coupons maintenant au moyen d'un plan horizontal arbitraire $z = h$. On obtient:

$$4(a^2 - b^2)\,x^2 - 4b^2y^2 + 4a\,(a^2 - b^2 - h^2)\,x + (a^2 - b^2)^2 - \\ - 2\,(a^2 + b^2)h^2 + h^4 = 0. \tag{4}$$

Les coefficients des termes du second degré nous montrent que la section est une hyperbole dont les axes sont parallèles aux axes des cöordinées OX et OY. Puisque ces coëfficients ne dépendent pas de h nous voyons immédiatement que l'angle des asymptotes est indépendant de h. Le cosinus du demi-angle des asymptotes est égal à b/a.

Dans le cas particulier que $h = 0$, ce qui veut dire que nous coupons la surface avec le plan horizontal XOY à la hauteur de la bouche, nous obtenons comme section l'hyperbole

$$4\,(a^2 - b^2)\,x^2 - 4b^2y^2 + 4a\,(a^2 - b^2)x + (a^2 - b^2)^2 = 0, \quad (5)$$

dont le centre a les cöordinées:

$$x = -\frac{a}{2},\ y = 0, \quad z = 0, \quad (6)$$

tandis que les foyers coïncident avec les points O et O'.

En égalant à zéro les dérivées partielles de (4) nous voyons que le centre de l'hyperbole qui se trouve dans le plan horizontal à la hauteur $z = h$ a pour cöordinées:

$$x = -\frac{a}{2}\,\frac{a^2 - b^2 - h^2}{a^2 - b^2},\ y = 0, z = h. \quad (7)$$

Il s'ensuit que le lieu géometrique des centres des hyperboles (4) que l'on obtient en coupant la surface réflectante par les plans horizontaux avec le paramètre h comme hauteur au dessus du plan XOY, est la parabole:

$$az^2 - 2\,(a^2 - b^2)\,x - a\,(a^2 - b^2) = 0. \quad (8)$$

Le sommet de cette parabole est le point dont les coordinées sont données par (6). Son ouverture est dirigée du côté des X positifs.

On peut se donner une idée de la surface en se représentant qu'elle est engendrée par une hyperbole (4), qui varie avec la hauteur de son plan. Les asymptôtes se déplacent parallèlement à eux-mêmes, le centre décrit la parabole (8). Ces hyperboles diffèrent donc seulement par les distances des foyers. Il est facile de voir que chacun de ceux-ci décrit également une parabole. Nous voyons donc que la surface se compose de deux nappes. Chaque branche de l'hyperbole génératrice décrit une des nappes.

En opérant de la manière suivante on peut se donner aussi une idée de la forme de la surface. Coupons la surface par un faisceau de plans ayant comme axe l'axe $O'R$ des ondes réflectées.

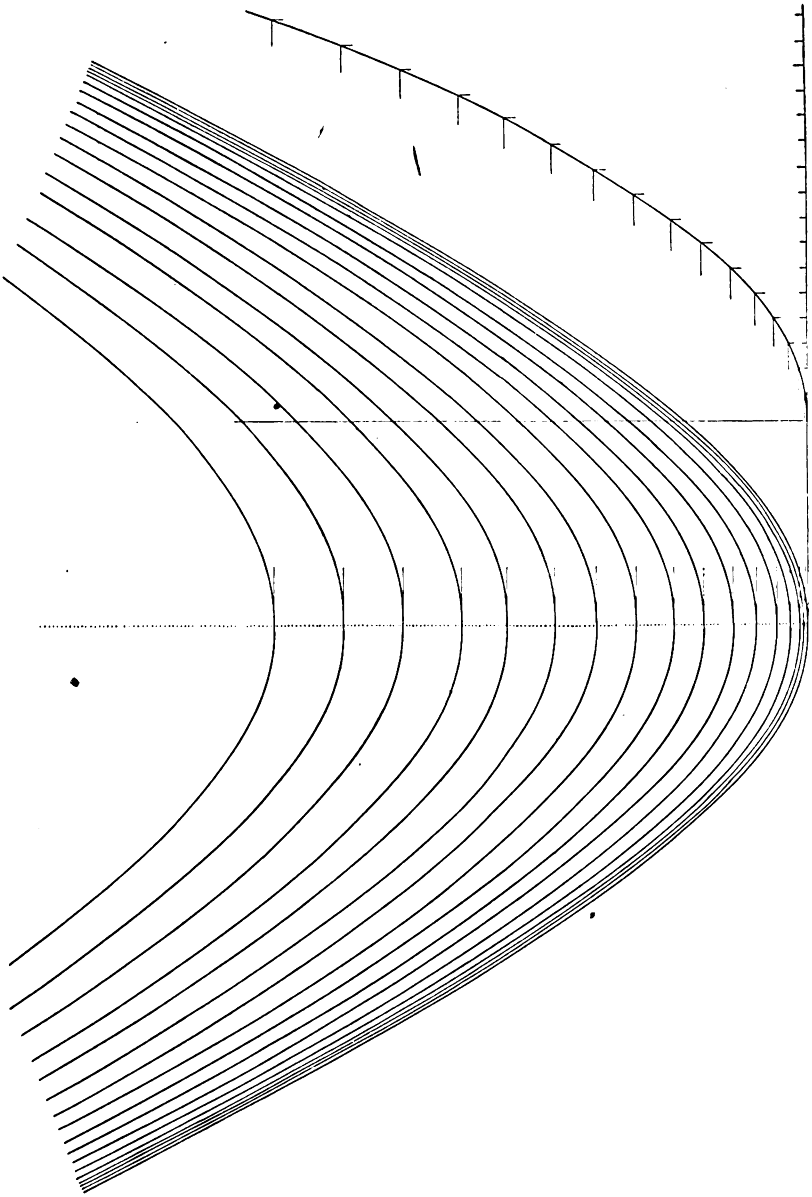


Fig. 2.

Ce faisceau est defini par l'equation $y = \lambda\,(x + a)$ dans laquelle λ est un paramètre variable. Nous obtenons pour chacun de ces plans une section définie par une équation du quatrième degré. Cette équation peut être décomposée en deux autres du second degré:

$$z^2 - 2x\left[a \pm b\sqrt{1+\lambda^2}\right] - \left[a^2 + b^2 \pm 2ab\sqrt{1+\lambda^2}\right] = 0. \quad (9)$$

Cette équation constitue l'équation de deux systèmes de paraboles ayant leur ouverture du coté des X positifs. Chacune des nappes de la surface peut donc être aussi engendrée par les paraboles (9). La partie seule qui réfléchit les ondes dans un angle inférieur à π, vient en compte pour nous. Celle-ci est la partie décrite par la parabole (9) prise avec les signes moins.

Dans la figure 2 nous avons representé d'une pareille nappe la parabole dans un plan de symétrie vertical et un certain nombre d'hyperboles horizontales à égale distance verticale de 10 cm, les unes au dessus des autres. L'angle des asymptôtes est 45°, $a = 375$ cm, $b = 345$ cm.

En modifiant l'angle constant du système des asymptôtes on peut limiter en largeur la propagation du son dans l'auditoire.

En combinant un certain nombre des surface décrites dans ces alinéas on peut aussi réfléchir le son dans différentes directions. Pour fixer les idées nous considérons le cas d'une église possédant une nef et deux bas-côtés (fig. 3). Il faut donc diriger le son dans

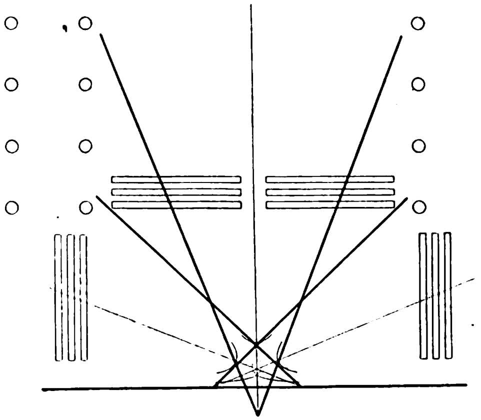


Fig. 3.

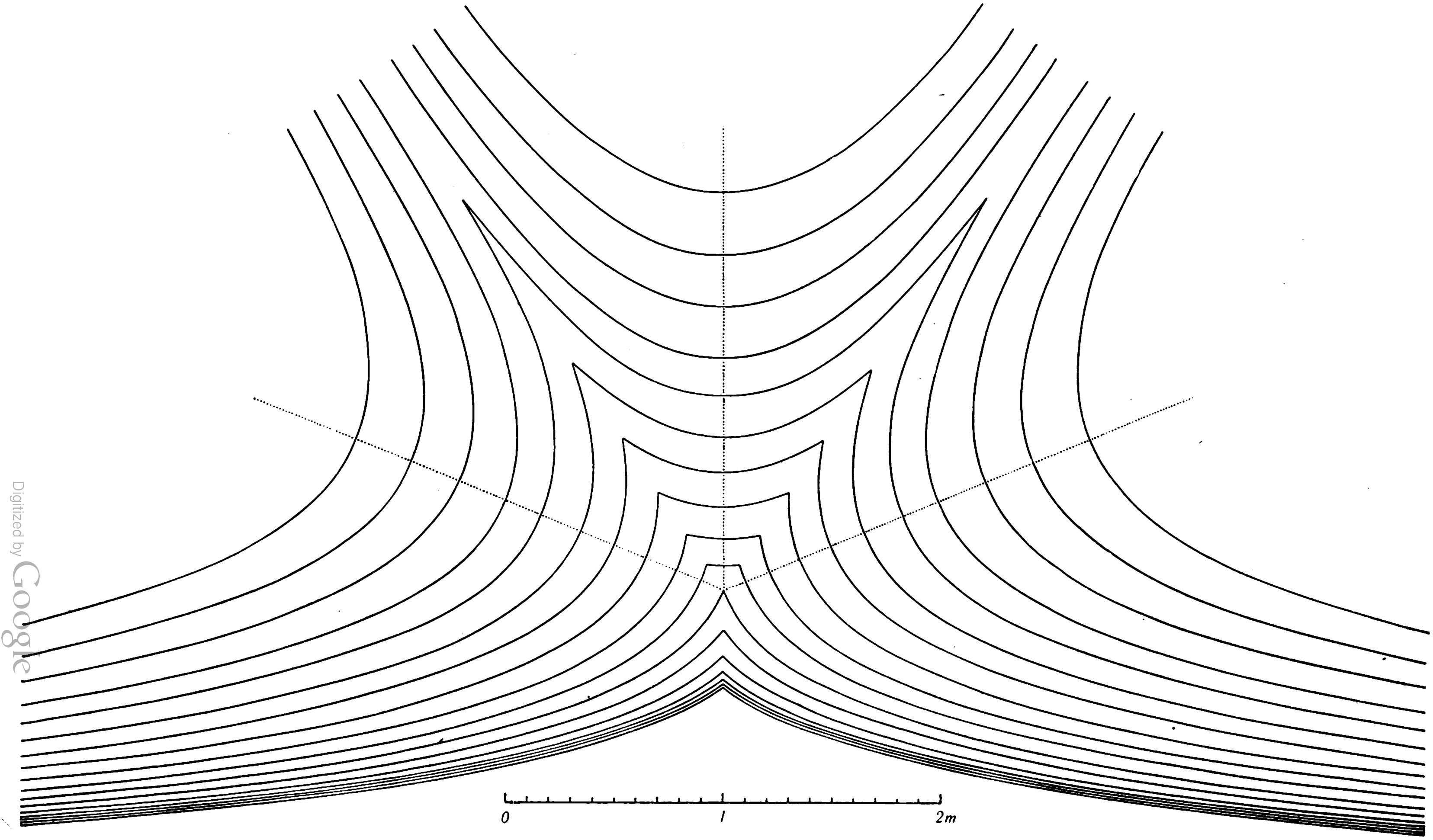


Fig. 4.

trois directions. Il s'ensuit que dans ce cas il faut réunir trois surfaces. Dans un plan horizontal se trouvent donc trois hyperboles Nous les plaçons de telle façon que dans le plan à la hauteur de la bouche trois foyers de ces hyperboles coincident. De chacune des hyperboles extérieures part une asymptôte parallèlement au mur au fond de l'église. Le plan de symétrie vertical de la partie centrale est perpendiculaire à ce mur. Pour la clarté nous avons représenté dans la figure 4 des sections horizontales de cette surface à trois parties, comme nous avons procédé dans la figure 2. Les dimensions de chacune de ses parties sont égales à celles de figure 2.

Nous y tenons de remercier Monsieur le Professeur **Fokker** pour les conseils précieux qu'il a bien voulu nous donner.

Aus den Beständen der Niedersächs. Staats- und Universitätsbibliothek ausgeschieden
Göttingen, den 18. AUG. 1966

ARCHIVES

DU

MUSÉE TEYLER

SÉRIE III, VOL. VII

FASCICULE 2

A. D. Fokker, On the construction of sound reflectors............ 73
A. D. Fokker and M. J. O. Strutt, Measurements on the acoustic efficiency of specially designed sound reflectors (with 3 plates).... 77
A. D. Fokker, Krachten en Bewegingen (Zaterdagmiddagvoordrachten) 89

LA HAYE
MARTINUS NIJHOFF
1930

ON THE CONSTRUCTION OF SOUND REFLECTORS

BY

A. D. FOKKER.

We want to reflect a speech into an audience in such a way that we prevent the spreading of the sound waves in upward directions where they would wander astray through vaulted spaces and return as a troublesome reverberation. In sideway directions they must be allowed to spread so as to cover the audience. We therefore require a reflecting surface which shall reflect spherical waves, produced by a point source, as circular cylindrical waves. The analytical discussion of the properties of such a surface has recently been given by Messrs NUYENS and PHILIPPI [1]). In order to find possibilities of actual construction we want to investigate the required surface from the geometrical point of view.

Consider the momentary position of the reflected cylindrical wave front. If we trace back along the reflected rays constant distances, we shall get a cylindrical surface again. If we trace back the distance covered by the sound wave before and after the reflection, from the source until its present position, we shall get a cylindrical surface, which we will call the image of the source in the reflector. Indeed, if we should substitute for the reflector a great many plane facets tangent to it, then the various images of the source focus, formed by these facets, would lie together on the cylindrical surface in question. We suppose the axis of this image to be vertical. Then all reflected rays will be horizontal. The pencil of reflected rays, proceeding from a vertical generatrix of the image, will form a vertical plane, passing through the axis of the image.

The image has to be a vertical circular cylinder. The reflecting surface must be the envelope of the planes, normally bisecting the distances from the focus to the points of the image. First, take any vertical generatrix of the image. The envelope of the planes, normally bisecting the distances from its points to the focus will be a horizontal parabolic cylinder. Evidently this parabolic cylinder will be tangent to the reflector in those points, where it is cut by the pencil of reflected rays, i. e. by the vertical plane through the axis of the image and the generatrix considered. Thus we conclude that the reflector contains parabolae in vertical planes passing through the axis of the image.

---

[1]) M. NUYENS et G. TH. PHILIPPI, *Sur la forme d'un réflecteur du son, Archives du Musée Teyler*, VII, p. 65, 1929; in dutch *Physica*, X, p. 19, 1930.

Secondly, consider any two such horizontal parabolic cylinders, corresponding to two vertical generatrices of the image, and try to specify their intersection. Realizing, that each of them is the locus of points equidistant from the focus and from their directrix, we conclude that their intersection must be contained in the locus of points equidistant from the two generatrices of the image involved. Thus the two parabolic cylinders intersect in a plane curve, in a plane bissecting the distance between the generatrices and again passing through the axis of the image.

Thirdly, take the circular section of the image by a horizontal plane through the focus. The envelope of the planes, normally bisecting the distances from the focus to the points of this circle will now be a vertical cylinder, having as a normal section the hyperbola determined by the focus and the circle considered as directrix. The other focus of this hyperbola will be in the centre of the circle, and thus on the axis of the image.

Next, let us imagine a number of horizontal parabolic cylinders, tangent to the reflector, and let them be intersected by any two horizontal planes in horizontal straight lines. Let us project the mutual intersections of the parabolic cylinders on a horizontal plane (fig. 1, below). We shall get a pencil of straight lines passing through a common point: in fact, through the projection of the axis of the image. The projection on the same plane of the horizontal straight intersections will give two parallel sets of lines. Moreover, these two broken lines will be similar, their centre of homology will be in the projection of the axis of the image. The envelopes of these broken lines will be similar as well, with a common centre of homology, and thus we conclude that the horizontal plane sections of the reflector must be similar to the horizontal plane section through the focus: they must be hyperbolae and have their backward focus points in the axis of the image. Their asymptotes must be parallel, and as their vertices lie on a vertical parabola, they must have their front focus points on a parabola as well.

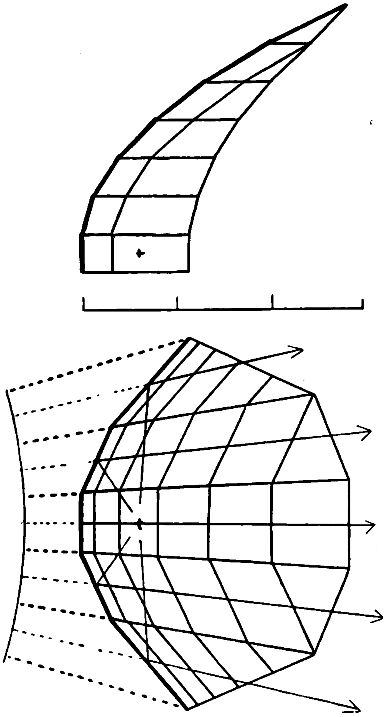


Fig. 1.

Approximation of hyperbolic-parabolic reflector by tangent plane strips. The horizontal intersections are in equidistant horizontal planes. The sloping intersections are in vertical planes through the axis of the image, with equal angles between pairs of neighbouring planes.

The reflector surface is determined, if the focus, the centre of the image, and the vertex of the surface are given. These data must be chosen in accordance with the requirements of the special case under consideration.

If the vertex bisects the distance between the focus and the centre of the image, then the reflector becomes a simple straight horizontal parabolic cylinder. If the centre of the image is removed to infinity, the reflector becomes a paraboloid of revolution.

In case the reflector has to be constructed of wood, which cannot be given a double curvature, the ideal form will be efficiently approximated by a series of parabolic zones. We can select on the image cylinder a number of, say, five generatrices, the middle one nearest the focus in the plane of symmetry (fig. 1). If then we draw the tangents in the horizontal plane through the focus, and if we draw, for the inner-most parabolic cylinder the projections of the horizontal lines of equal vertical spacing, then we can from them immediately draw the projections of the horizontal straight lines belonging, in the same vertical spacing, to the neighbouring paraboloïds.

On these principles my brother Mr. J. P. Fokker, architect, in Wassenaar, designed the sound reflectors for two chairs.

One chair has two simple parabolic reflectors (fig. 2 and pl. I). The upper reflector has a distance between focus and vertex of 60 cm. It is inclined so as to send the central reflected rays downward under an angle of 12 degrees. The lower reflector has a focal distance of 30 cm. It does not reach beyond the perpendicular beneath the focus. It terminates in a bar. It reflects the rays in horizontal directions. The length of the reflector was 4,5 m.

The other chair has two reflectors also (pl. II). The lower reflector is a simple parabolic cylinder with focal distance of 30 cm. It is cut by vertical planes, one through the focus and the others as required to afford a passage to the speaker. The upper reflector consists of five zones. The central zone again has a focal distance of 60 cm. The figure 1 gives the relative position of the other zones. The sideward spreading of the reflected rays is 35°. The chair as a whole had an inclination of 1 in 10.

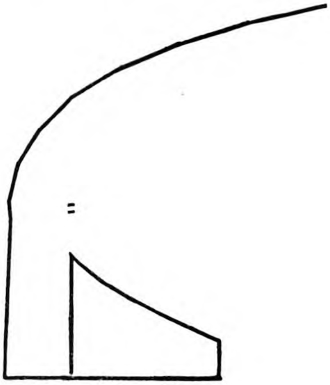


Fig. 2.

Cross section through an approximation of straight parabolic reflector by horizontal tangent strips. The axis of the upper parabola makes an angle of 12° with the horizontal. The lower parabola has a horizontal axis.

These chairs, by the courtesy of the Churchwardens, could be tested in the Great St. Bavo's Cathedral in Haarlem [1]). The ordinary pulpit gave a range of intelligibility of speech of 21 m. The straight parabolic chair gave a range of 36 m. The hyperbolic parabolic chair gave a range of more than 65 m; in fact the space available in the church was not sufficient to reach the limit of intelligibility.

---

[1]) Fokker and M. J. O. Strutt, *Archives du Musée Teyler*, VII, p. 77, 1930.

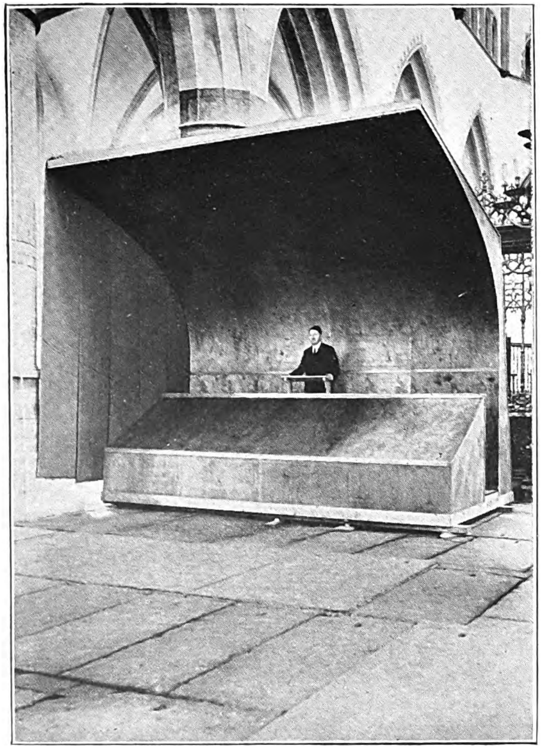


Plate I.

Straight parabolic sound-reflector.

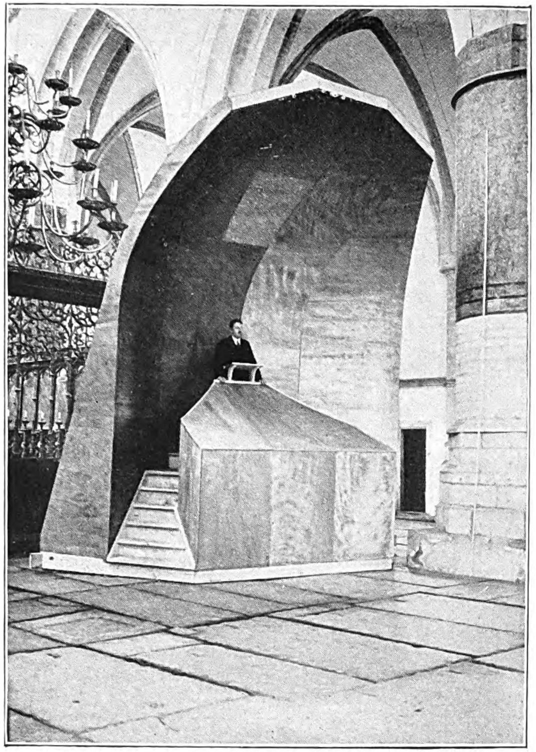


Plate II.

Hyperbolic parabolic sound-reflector.

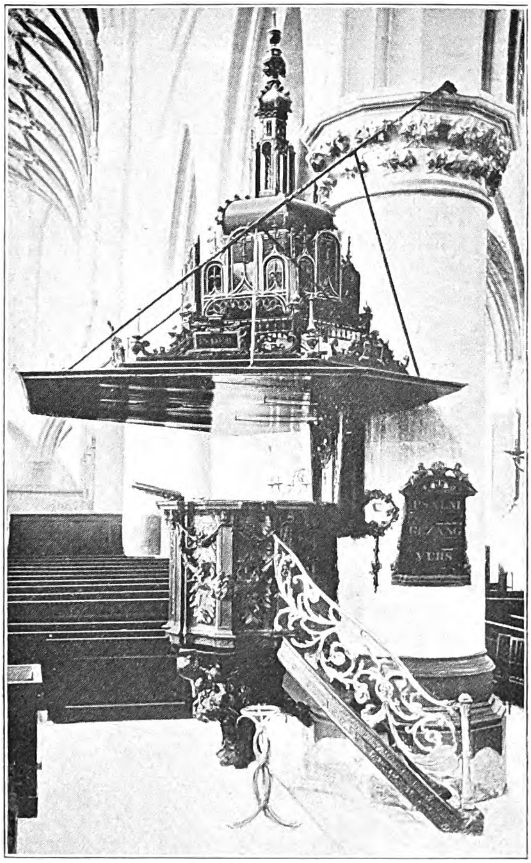

PSALM
GEZANG
VERS

Plate III.

Pulpit at point P of fig. 11.

MEASUREMENTS ON THE ACOUSTIC EFFICIENCY OF SPECIALLY DESIGNED SOUND-REFLECTORS

BY

A. D. FOKKER and M. J. O. STRUTT.

I. Introduction.

As was previously ¹) described, the first author has constructed sound-reflectors, for use in churches and other public buildings, the design of which started from HUYGENS' principle. Two of these reflectors, one of straight-parabolic, the other of hyperbolic-parabolic shape were erected in the Bavo Cathedral at Haarlem, Nederland. Plates I and II (p. 76) show the two reflectors set up as used in the measurements described here after. Reflector 1 consisted of two parabolic cylinders with common focal line. The lower had a focal distance of 30 cm, and the axis of the parabolic section was horizontal. The upper had a focal distance of 60 cm; the axis of its cross section made with the horizontal an angle of 12 degrees downwards. The lower part of reflector 2 was a parabolic cylinder, focal distance 30 cm. The upper part consisted of five zones, each a parabolic cylinder, with common focus, in horizontal section tangent to a hyperbola as described in the paper cited. The central vertical parabola had a focal distance of 60 cm. The whole reflector was inclined so as to send the rays in the plane of symmetry downwards at an angle of about 6 degrees.

The object of our measurements was twofold. In the first place we wished to see, whether the intensity of sound, with given constant source, was considerably increased in the forward direction by using the reflectors. This can be seen by measuring the sound-intensity at different places in the church, using a steady source of constant pitch, one time with the source before either of the reflectors and again with the source put up freely in the building. Measurements of this type will be described in sections II and III.

---

¹) A. D. FOKKER, *On the construction of sound-reflectors; Archives du Musée Teyler,* VII, p. 73, 1930.

But these measurements can not give exhaustive evidence on the efficiency of the reflectors when used e.g. for speach. Here we have to discern between the sound arriving directly from the speaker to the hearer, and the sound arriving at the hearer after reflections at the walls, etc. This latter sound adds to the intelligibility of speach only if it arrives at the hearer within 0.06 seconds after the direct sound, otherwise it interferes with the speach as a disturbing echo or as reverberation. Researches of this type have been carried out at the Philips' laboratory by Prof. C. Zwikker [1]). We essentially followed his method in our measurements of intelligibility. This method simply consists in measuring the distances from the speaker, in different directions, at which the speach is just intelligible. After at little practice this point can readily be determined and results obtained by different experimenters agree fairly well. Measurements of this type will be described in section IV of this paper.

II. Apparatus for intensity measurements.

The apparatus used was of the type, developed by the second author at the Philips' Laboratory for acoustic researches. It consists of an emitting and a receiving part.

The emitting part consists of a sound-generator, an amplifyer, a loudspeaker and a device for measuring the emitted intensity. The sound-generator, essentially designed at the Philips' laboratory by Mr. Dijksterhuis contains a tuning fork, connected to a circuit having negative resistance, so that the fork-oscillations are set up and maintained automatically. Fig. 1 gives the scheme of this generator. By using different tuning forks, the pitch of sound can be varied from 100 to about 1000 cycles per second. For acoustic measurements of many types, it is desireable not to work with a pure pitch, but to apply a „wobble". This causes a rapid shift of the interference pattern in rooms, and so, by using a meter of slow adjustment behind the receiver, no disturbing interferences are measured. This wobble was in our case obtained by applying 220 Volts 50 cycles to the primary P of fig. 1. By this alternating tension, the anode potential of the valve II varies 50 times per second between 100 and 200 Volts.

---

[1]) C. Zwikker, *De Ingenieur*, 1929, No. 13.

The resistance of this valve varies with the same frequency and hence the tension at the output transformer VII of our generator has a part proportional to $\sin(2\pi 50t)\ \sin 2\pi\nu t$, where t is the time in seconds and ν the natural period of the tuningfork. In our measurements ν was 435 cycles per second. This tension is magnified by a 50 Watt amplifyer of commercial Philips type. Between the output of this amplifyer and the loudspeaker a thermocouple, of commercial Philips type, max. 20 mA, was inserted. The thermotension was measured by a **Hartmann-Braun** mV-meter max. 17 mV and having 1000 Ohms. The loudspeaker was of the so-called electromagnetic type. We have previously measured the amplitude at different places of the (very stiff) cone of this loudspeaker as a function of the current through the loudspeaker essentially using **Bragg**'s method [1]. One of these curves is given in Fig. 2. We conclude, that the current through the loudspeaker is exactly proportionnal to the amplitude of sound. Fig. 3 schematically gives the sound-emitting arrangement.

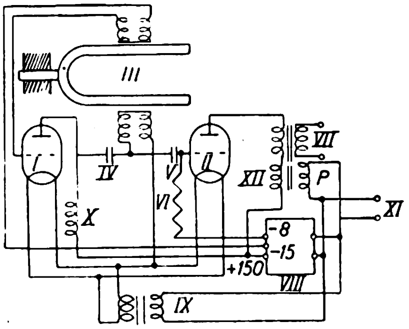


Fig. 1.
Tuning-fork-generator.

I. Valve type **Philips** B 405.
II. Valve type **Philips** A 415.
III. Interchangeable tuningfork.
IV. Condenser 0,01 μF.
V. Condenser 0,005 μF.
VI. Resistance 1.000.000 Ohm.
VII. Output transformer **Philips** 4003
VIII. Plate-tension apparatus **Philips** 3003.
IX. Filament transformer **Philips** 4009.
X. Choke-coil about 1 Henry.
XI. A. c. supply 220 Volts 50 cycles.
XII. Modulation-transformer **Philips** 4003.

The receiver has a loudspeaker of exactly the same type as used with the emitter, serving as a microphone. It is superior to coal-microphones by its constancy and to condenser-microphones by its simplicity and its sensitivity. Behind the microphone a microphone-amplifyer, of commercial **Philips**' type was used. The output of this amplifyer, was connected to a valve, used as rectifier, and a Hartmann-Braun meter as described above. We put the meters of emitter and receiver close together, so as to have an easy and constant control of experimental conditions. Fig. 4 schematically gives the receiving apparatus.

---

[1] W. **Bragg**, *Journal Scientific Instruments*, Vol. 6, p. 196, 1929.

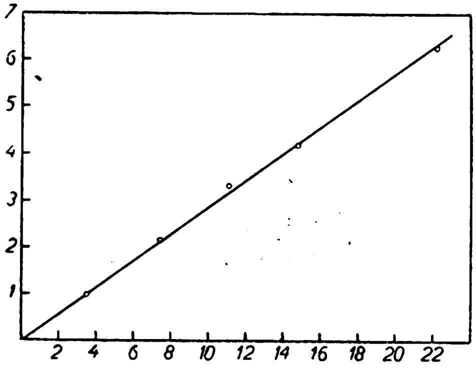


Fig. 2.

Vertical axis: amplitude of centre of loudspeakercone in microns; horizontal axis: a. c. through loudspeaker-system in milliamperes at 500 cycles.

The loudspeakers, used as emitter and receiver, have pronounced directive properties, as is illustrated by the diagram of fig. 5 obtained with a loudspeaker of this type by Prof. Zwikker in the open air with 440 cycles per second at 10 m distance, giving the emitted intensity of sound as a function of the direction.

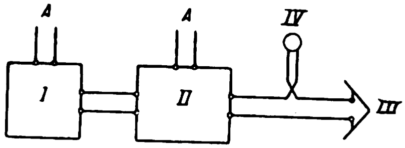


Fig. 3.

Schematic diagram of sound-emitter.

I. Tuning-fork-generator of fig. 3.
II. 50 Watt amplifyer type Philips 2761.
III. Loudspeaker.
IV. Millivoltmeter connected to thermocouple.
A. 220 Volts 50 cycles a. c. supply.

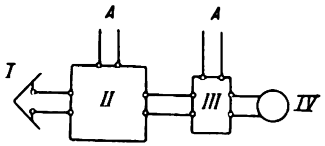


Fig. 4.

Schematic diagram of sound-receiving apparatus.

I. Loudspeaker serving as microphone.
II. Amplifier type Philips 2780.
III. Rectifier.
IV. Milliamperemeter.
A. 220 V 50 cycles a. c. supply.

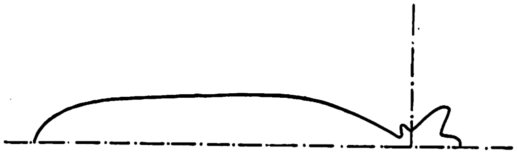


Fig. 5. Intensity distribution of emitting loudspeaker.

III. Results of intensity-measurements.

Fig. 6 gives a diagram of the church. The straight-parabolic reflector of Plate I was placed at 1, the hyperbolic-parabolic reflector of Plate II at 2. The emitting loud-speaker was put first in the focal line of 1, then in the focus of 2 and finally at the point 3, about 3 meters above the floor, between the reflectors. The foci of these reflectors also were about 3 meters above the floor.

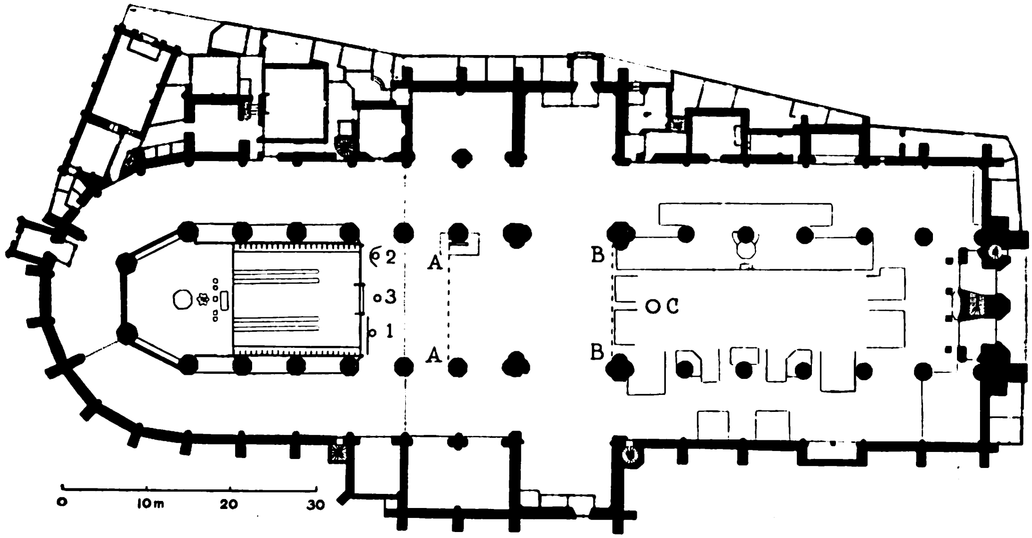


Fig. 6.

Diagram of church-floor.

We put a wire between the points A A of fig. 6, about 1,50 meters above the floor. Seats, etc. were left in place (empty). In the same way a wire was stretched between the points B B of fig. 6. By means of a gear, the microphone, attached to a sliding suspension, could easily be moved to and fro along the wire between the points A A and again between the points B B. Finally we set up a device, permitting to elevate the microphone in a vertical line at the point C of fig. 6 from the floor to about 22 meters above it. The height of the ceiling at this point was about 30 meters.

The series of measurements obtained with the loudspeaker at 1, 2 or 3 will be denoted by these numbers respectively. Also we shall denote the observations, obtained with the microphone sliding along A A by the letter A, those with the microphone sliding along B B by the letter B and finally those, in which the microphone was elevated vertically by the letter C. Hence we have nine combinations in total: 1A, 1B, 1C, 2A etc, each combination denoting a whole series of measurements. We generally measured the intensity of sound at intervals of 1 meter, the distances in the series having the letters A and B being reckoned from the lower points A and B of fig. 6 respectively. In the series, having the letter C we reckoned the distance from the floor of the church upwards.

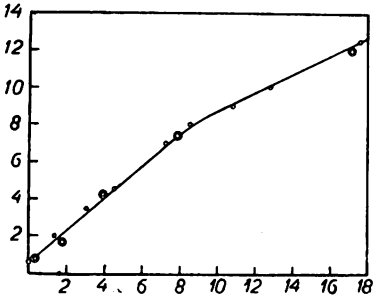


Fig. 7.

Check curves
vertical axis: receiving-meter-reading.
horizontal axis: emitter meter-reading.
one circle: at beginning of measurements.
two circles: towards end of measurements.

Owing to various noises from the streets, measurements could not be started until after midnight. From then till 5 o'clock about 200 readings were taken.

At the beginning and towards the end of this time the receiving-meter-reading was checked to relative intensity of sound by varying the current through the loudspeaker, as measured by the meter connected to the thermocouple, using the direct current check-curve of this couple. The two curves, thus obtained, are given in fig. 7. We conclude, that our apparatus was fairly constant during the night. This may be ascribed to its being wholly fed by the local alternating current (220 Volts 50 cycles) supply, the tension of which varies little at night-time.

Figs. 8, 9 and 10 contain the results of our intensity-measurements, denoted as was described above.

Graph 1A shows a maximum intensity at the left part, gradually sinking to a small amount at the right as may be expected from the side screen at the right of the straight parabolic reflector (not shown in Plate I)[1]. Graph 2A has a maximum at the right part, corresponding to the beam, emitted by the hyperbolic reflector, coming from the right (see fig. 6). Finally, graph 3A, in which no refelector was used, shows a maximum intensity in the centre, this being due to the minimum of the distance in that point, in addition to the directive properties of the loudspeaker in use (C. Zwikker, l. c.). As a peculiarity, we have in this graph a

---

[1] During the measurement a screen, similar to that shown in Plate I, was hung at the right side too. It was removed when the photograph was taken.

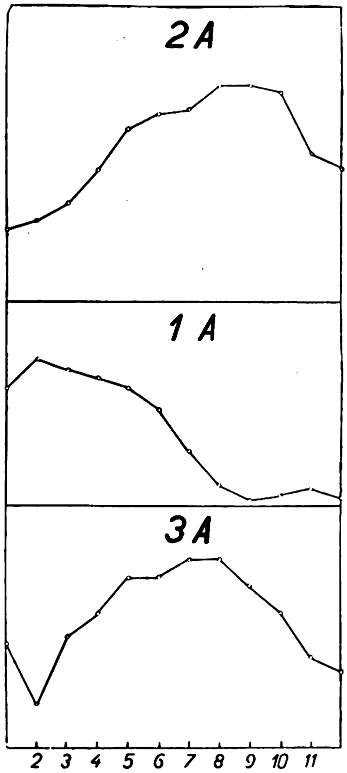


Fig. 8.

Vertical axis: intensity of sound; all curves same scale;
Horizontal axis: distance from the lower point A of fig. 6 in meters along line A A.

Curve 1 A: loudspeaker at point 1.
Curve 2 A: loudspeaker at point 2.
Curve 3 A: loudspeaker at point 3.

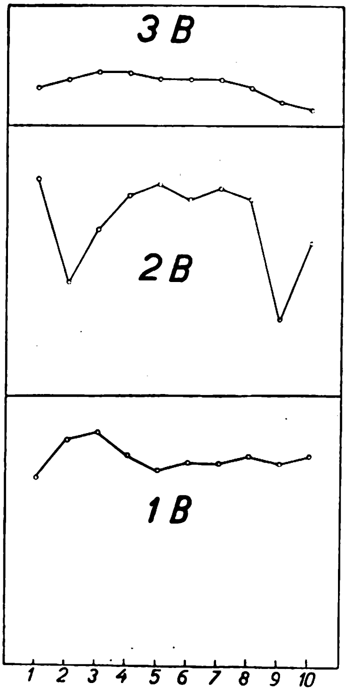


Fig. 9.

Vertical axis: intensity of sound; all curves same scale;
Horizontal axis: distance from the lower point B of fig. 6 along line B B in meters.

Curve 1 B: loudspeaker at point 1.
Curve 2 B: loudspeaker at point 2.
Curve 3 B: loudspeaker at point 3.

minimum at the left end, which occurs again in graph 2B and may be ascribed to the interference or diffracting pattern near the church pillars, close to which these points have been measured. The missing of these minima in graphs 1A, 2A, 1B and 3B may be due to a shift in the interference pattern owing to the change in direction of the incident waves from different origins, and partly to slight differences in the place of the microphone when measuring these curves as compared with the curves 3A and 2B. These slight differences do not cause appreciable effects remote from any pillars, but they may influence interference effects close to these pillars. The minima are, of course, secondary effects; without importance for our purpose.

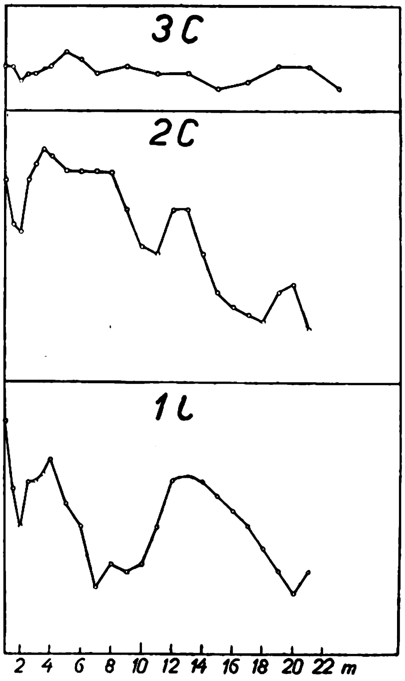


Fig. 10.

Vertical axis: intensity of sound; all curves same scale;
Horizontal axis: distance from church floor vertically upwards at point C of fig. 6 in meters.

Curve 1 C: loudspeaker at point 1.
Curve 2 C: loudspeaker at point 2.
Curve 3 C: loudspeaker at point 3.
All curves of figs. 8, 9 and 10 have same scale as regards intensity of sound.

It is seen from the graphs A, that very close to the source, as they were measured (see fig. 6), the reflectors have no marked effect on the intensity of sound. This changes, when we are at a greater distance from the source, as may be seen from graphs B and C, where the curves 3B and 3C corresponding to *no* reflector, show a much smaller intensity than the other curves, taken *with* reflectors.

It is interesting to see from the curves 1C, 2C and 3C, that about 2 meters from the church floor the intensity has a minimum. This cannot be due to the reflectors, as all three curves show the same feature. The reason is to be found in the reflecting action of the floor, causing an interference effect of incident and reflected waves. From the dimensions of the church and reflectors we see that, in the mean, the sound rays will here have an inclination downwards of 1 in 10. Thus the waves reflected from the stone floor will be in a phase opposite to the incident wave at a height of about 10/4 wavelengths. The wavelength varied from 70 to 90 cm. Thus a silent region may be expected between the heights of $1^3/_4$ and $2^1/_4$ m.

The straight parabolic reflector, extending in height from $2^1/_2$ to $4^1/_2$ m, sends its beam of soundwaves downwards with an inclination, roughly speaking, of 1 in 5. After the reflection by the floor this beam rises, and after reflection by the back wall of the church arriving at the measuring line C it will have travelled about 100 m and, if free from diffraction, would extend from $15^1/_2$ to $17^1/_2$ m in height. This might explain the second maximum of curve 1C.

Again, the other reflector, from 3 to 5 m high, sends its beam down 1 in 10. After the same reflections this beam would extend in height from 5 to 7 m. This might account for the thickness of the first maximum in curve 2C.

The intensity maxima at greater heights may be due to special reflections from the ceiling.

Of course it should be borne in mind, that we meet in our measurements a system of stationary waves, i. e. a system of stationary vibrations, proper to the church as a whole. However, in reasoning as we did, we assume that such states of vibration will be excited by the sound emitter as will produce by their superposition a distribution of energy, more or less corresponding to the distribution of the sound beams by the reflectors.

In general, we conclude from our intensity measurements that:

1. at small distances (about 10 m with 435 cycles) the reflectors give no marked increase of intensity in the forward direction;
2. at greater distances (say 30 m with 435 cycles) they increase the intensity in the forward direction by a factor 4 or 5.

IV. Intelligibility-Measurements.

A speaker took place first before the straight parabolic reflector (point 1 of fig. 6), then before the hyperbolic-parabolic reflector (point 2 of fig. 6). While the speaker read some text at medium and about constant loudness, four observers walked in the directions, indicated in fig. 11. After a little practice a criterium could be formed, giving the level of intelligibility for speach. Now each of the observers measured the distance of the point, where he found speach only just intelligible, from the speaker. Recordings of different observers agreed within a few percents. In fig. 11 we have summarized the results, the lenghts of the lines in different directions giving the distances, where speach was just intelligible. The hyperbolic-parabolic reflector of plate II rendered speach intelligible throughout the whole available length in the church being 65 m. With the straight parabolic reflector of plate I the intelligibility-radii were from 33 to 37 m.

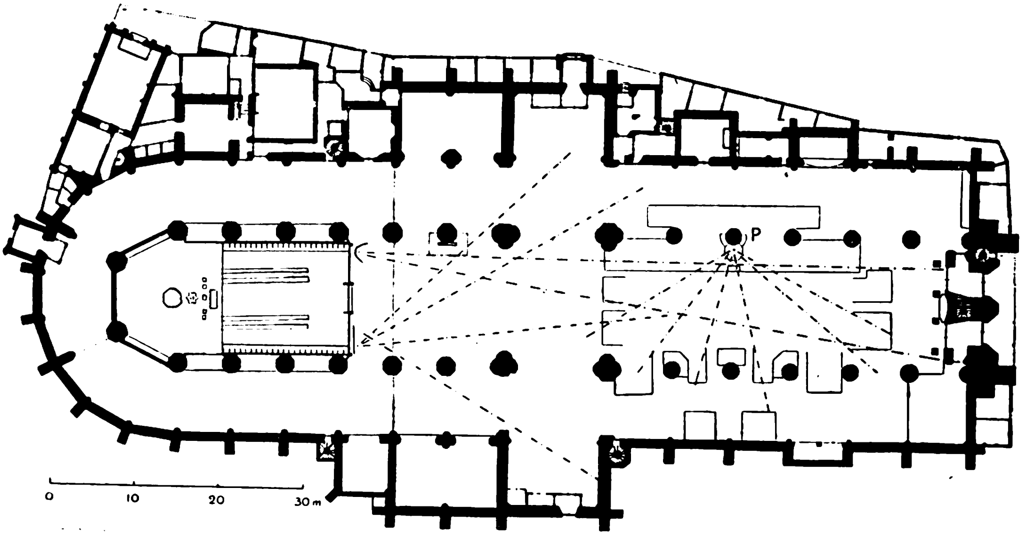


Fig. 11.

Diagram giving intelligibility radii for speach (lenght of dotted lines) for reflectors and pulpit (at point P).

In the church, a pulpit of common type (plate III) was also tried in this way. Its place is indicated by the point P of fig. 11. As can be seen from this figure the intelligibility-radii of this pulpit were from 18 to 23 m in the forward direction.

We conclude from our intelligibility measurements, that the intelligibility-radius for speach is increased about two- or threefold, as compared to the radius without any reflector or even with a common pulpit.

Our thanks are due to Dr. N. W. Doorn, Mr. E. Kaupa, e. i., nd Mr. N. S. Markus for their assistance during the measurements.

V. Summary.

Sound reflectors of straight parabolic and of hyperbolic-parabolic type and special design were set op in the Bavo Cathedral of Haarlem, Holland. By these reflectors the intensity of sound in the forward directions at about 40 wavelengths distance, was increased by a factor 4 or 5, as compared to the same emitting source without reflector. At distances smaller than 15 wavelengths no considerable increase of intensity in the forward direction was found. Intelligibility-measurements with common speach showed that the reflectors increased the intelligibility radius by a factor 2 or 3 as compared with a common church pulpit.

Teyler's Physical Laboratory, Haarlem, Holland.
Physical Laboratory of Philips' Glowlampworks
Ltd., Eindhoven, Holland.

July 1930.

INHOUD.

Blz.
I. **Stilstand en evenwicht** 89
Evenwicht in laagst mogelijken stand 89
Gewicht en massa 90
Gemiddelde massahoogte 91
Laagste stand zwaartepunt 91
Hefboom 92
Vloeistofoppervlak 93
Zinken en drijven 93
Simon Stevin's ketting 93
Evenwicht van drie krachten 95
Stationaire massahoogte 95
Arbeidsvermogen 96

II. **Valbewegingen** 97
Hellende vlakken 97
Wrijvingsvrije horizontale beweging en vrije val 100
Slingerbeweging 101

III. **Krachten en bewegingsveranderingen** 104
Kracht en verandering van hoeveelheid van beweging . . . 104
Versnelling en gewichtsverandering 105
Gewichtsrichting bij vrije versnelling langs hellend vlak. . . 106
Vrije en gedwongen schommeling 107
Formuleering der bewegingswet 108
Middelpuntvliedende kracht 108
Zwaarte en traagheid 110
Kracht van Coriolis 111
Proef van Foucault, dwarsverhang in stroomen, de wet van Buys Ballot 113
Getijdekrachten 114

IV. **Behoud van energie en van hoeveelheid van beweging** 115
Behoud van massahoogte 115
Kracht door waterstraal 117
Actie en reactie, voorbeelden 117
Omkeerbare botsing 118

V. **Draaiingen** 122
Versnelling om een as en belasting 123
Traagheidsmoment en schommeltijd 124
Traagheidsmoment en massaplaatsing 126
Rolling langs hellend vlak 127
Behoud van draaiïng 128
Maat voor hoeveelheid van draaiïng 129
Koppel tot het omleggen van draaiend wiel 130
Gyrostaat, tol, diabolo 131
Gyroscoop 131

KRACHTEN EN BEWEGINGEN

ZATERDAGMIDDAGVOORDRACHTEN IN TEYLER'S STICHTING
OP 16, 23 EN 30 NOVEMBER 1929

DOOR

A. D. FOKKER

Onze eerste ervaring is, dat alle lichamen, die wij in beweging gebracht hebben, na korter of langer tijd tot stilstand komen. Voorbeelden zien wij in een slinger, in een bol die in een kom rolt, in rollende schijven. Naarmate de lichamen gladder zijn, duurt de beweging langer, en het laat zich denken, dat bij volkomen afwezigheid van wrijving de beweging niet zou ophouden. In feite echter houden de bewegingen, die wij kennen, op.

I. Stilstand en evenwicht.

Het tweede feit uit onze ervaring is, dat een enkel lichaam tot stilstand komt in den laagst mogelijken stand, dien het bereiken kan. Een stuk lood, dat excentrisch bevestigd is aan twee cirkelvormige bordpapieren schijven, die op hun kant kunnen rollen, beschrijft bij dit rollen een gegolfde lijn, die wij op een, naast de rollende schijven opgestelde, met poeder bedekte, glazen plaat door het lood zelf kunnen doen afteekenen. Het lood komt tot stilstand in het laagste punt van een holte dier lijn. Ook indien de schijven op een hellend vlak rollen, kan zoo'n holte nog een laagste punt hebben (fig. 1). Daarheen rolt het stuk lood, al zouden de schijven daartoe paradoxaal tegen de helling moeten oprollen.

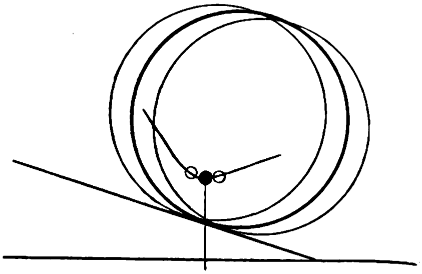


Fig. 1. Excentrisch bezwaarde bol in evenwicht op hellend vlak. Bij rolling zoowel naar beneden als naar boven komt het lood hooger te liggen.

Dat de lichamen omlaag streven weten wij ook uit andere ervaring: wij gevoelen het, indien wij een lichaam ondersteunen. Wij moeten een kracht uitoefenen om een ivoren bol aan een koord te dragen. De kracht waarmede die bol aan het koord trekt, noemen wij zijn gewicht. Het ligt voor de hand, te stellen, dat de kracht waarmede de bol op de tafel drukt, als hij erop ligt, even groot is. Wij gevoelen ook, dat de gezamenlijke kracht, waarmede twee gelijke bollen aan onze hand trekken, grooter is dan de kracht van één bol. Wij zijn niet in staat, een preciese vergelijking te treffen, maar het ligt voor de hand, te definieeren, dat het gezamenlijk gewicht van twee gelijke bollen van dezelfde stof twee maal zoo groot is als dat van één enkele, en in het algemeen, dat het gewicht van een lichaam evenredig is aan de hoeveelheid stof, die het bevat. Wij kunnen hoeveelheden stof slechts rechtstreeks vergelijken wanneer zij van denzelfden aard zijn, beide ivoor, of beide staal. De vergelijking moet dan geschieden door meting van de volumina dier hoeveelheden. Later, wanneer wij geleerd zullen hebben met weegschalen gewichten, dat zijn krachten, met elkander te vergelijken, zullen wij omgekeerd de hypothese kunnen stellen, dat de hoeveelheden stof evenredig zijn aan de gewichten. Een verder uitgewerkte hypothese stelt dat, hoe verschillend ook, de lichamen alle opgebouwd zijn uit een zelfde soort van deeltjes: de protonen en de hen elektrisch neutraliseerende elektronen, zoodat een hoeveelheid stof beteekent een aantal van protonen en elektronen. Inplaats van hoeveelheid stof zeggen wij voortaan met een kunstterm: massa.

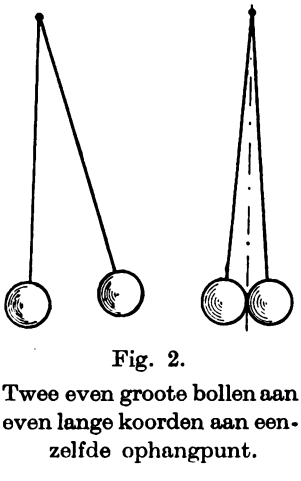


Fig. 2.
Twee even groote bollen aan even lange koorden aan eenzelfde ophangpunt.

Voorbeelden. Een bol hangt aan een koord in zijn laagsten stand. Een tweede bol worde, met een koord van dezelfde lengte, aan hetzelfde ophangpunt bevestigd. De tweede bol vindt in den, ook voor hem, laagsten stand, den anderen aanwezig. Hoewel hij weliswaar den laagsten stand zelf niet kan bereiken, dringt hij althans den ander uit dien stand weg. —

Tusschen twee bordpapieren cirkelschijven zijn twee stukken lood excentrisch bevestigd. Geen van beide stukken kan den voor hem laagsten stand bereiken. — Op de uiteinden van een hoepelvormige metalen wip zijn twee koperstukken gezet. Geen van beide kan omlaag zonder het andere omhoog te dwingen.

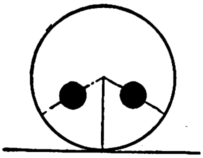


Fig. 3.

Twee even groote loodstukken op gelijken afstand van schijfmiddelpunt.

Indien de twee concurreerende massaas even groot zijn, kan men gissen, dat hun streven naar de laagte gelijke uitwerking zal hebben. Inderdaad blijkt dat de stilstand, dat is hun evenwicht, bereikt wordt in een constellatie, waarbij beide even hoog zijn, en symmetrisch gelegen ten opzichte van het ophangpunt of steunpunt (fig. 2 en 3).

Indien de gekoppelde massaas ongelijk zijn, kan men gissen dat het evenwicht bereikt wordt, wanneer de gezamenlijke massaas, als geheel genomen, zoo laag mogelijk zijn, en als die hoogte der massaas, als geheel genomen, definieeren hun gemiddelde hoogte. Bevinden zich twee grammen op een hoogte van drie centimeters, en vijf grammen op een hoogte van tien centimeters, dan hebben de 7 g een gezamenlijke massahoogte van 56 g cm, en de gemiddelde hoogte is 8 cm. Een punt, dat de gemiddelde hoogte van twee massaas aangeeft, vindt men op hun verbindingslijn: dat punt namelijk, hetwelk die verbindingslijn verdeelt in stukken, omgekeerd evenredig aan de massaas die men aan hun uiteinden vindt. Dit gemiddeldemassapunt heet zwaartepunt.

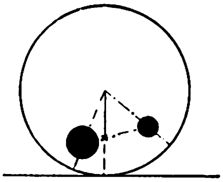


Fig. 4.

Twee ongelijke loodstukken op gelijken afstand van schijfmiddelpunt. Zwaartepunt zoo laag mogelijk, boven steunpunt.

Onze gissing, dat gekoppelde massaas tot evenwicht komen wanneer de totale massahoogte zoo gering mogelijk, d. i. het zwaartepunt zoo laag mogelijk is, stellen wij op de proef. Op de kartonnen schijven teekenen wij het zwaartepunt der ongelijke stukken lood en inderdaad blijkt: in den evenwichtsstand ligt het zwaartepunt boven het steunpunt (fig. 4). Wij meten (aan de koorden) hoeveel de aan eenzelfde punt opgehangen ongelijke bollen elkander uit den laagsten stand opzij dringen: het blijkt dat hun zwaartepunt recht onder het ophangpunt ligt (fig. 5).

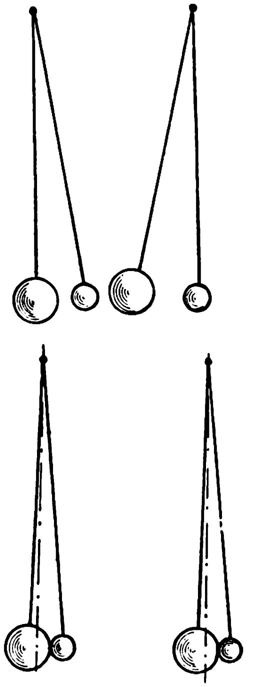


Fig. 5.

Twee ongelijke bollen equidistant aan eenzelfde ophangpunt. Zwaartepunt zoo laag mogelijk, onder ophangpunt.

Omgekeerd gissen wij, indien eenige massaas zoo met elkander gekoppeld zijn, dat bij een of andere verschuiving altijd de eene juist zooveel massahoogte wint als de andere verliest, dat zij niet in beweging zullen komen. Wij kunnen twee massaas aan een hefboom ophangen. Inderdaad houden zij elkander in evenwicht indien, overeenkomstig de genoemde voorwaarde, de producten van massa en hefboomsarm aan elkaar gelijk zijn.

Den hefboom hangen wij in zijn steunpunt op aan een derde koord, dat over een schijf loopt en een derde massa draagt. Onze evenwichtsvoorwaarde vereischt dat deze derde massa gelijk is aan de som der beide vorige vermeerderd met de massa van den hefboom zelf.

De koorden, waaraan de massaas hangen, brengen ons de krachten in beeld, die zij uitoefenen. Zonderen wij de kracht af, die op den onbelasten hefboom moet werken om te beletten dat hij valt, dan ligt in het voorgaande besloten, dat de op den hefboom werkende evenwijdige krachten elkander in evenwicht houden, indien *a*. de som der krachten in eene richting de krachtensom in de tegengestelde richting opheft, en *b*. ditzelfde het geval is voor hunne momenten om een willekeurig punt. Moment om een punt noemen wij het produkt van den loodrechten afstand (van dat punt tot de kracht) met de kracht.

Ook de vloeistoffen komen tot stilstand, wanneer de massaas, als geheel genomen, zoo laag mogelijk zijn. Dit uit zich in den stand van het vloeistofoppervlak, zoowel in een ongebroken waterspiegel als in de niveau's van communiceerende vaten. Geen van de waterdeeltjes aan het oppervlak ligt verder in de richting van het werkende gewicht dan zijn buurman. Het oppervlak staat overal loodrecht op de richting van dat gewicht.

Indien door middel van verplaatsing door een hevel de watermassaas, als geheel genomen, lager kunnen komen, zullen zij daardoorheen stroomen, ook al moest het voor afzonderlijke waterdeelen aanvankelijk omhoog gaan.

Laten wij een vast lichaam onder water los, dan wordt het antwoord op de vraag naar wat er geschieden zal beheerscht door de vraag: hoe komen de massaas zoo laag mogelijk? Indien een steen zich naar beneden verplaatst, moet een even groot volumen van het water even ver omhoog gedrukt worden. Is de massa daarvan geringer dan die van het lichaam, zoo neemt de totale massahoogte af, en de steen zal verder zinken. Is het echter een blok hout, dan is de massa van het even groot volumen water grooter, de totale massahoogte neemt af wanneer het hout omhoog stijgt totdat het, drijvende, nog een eind boven water steekt, en wel zoover dat het nog ingedompelde volumen, met water gevuld, d. i. het verplaatste water, evenveel massa heeft als het houtblok.

In het klassieke voorbeeld van Simon Stevin, een ketting zonder eind, die over een horizontalen driezijdigen balk hangt (fig. 6), komt evenmin door verschuiving een verlaging der massaas. De ketting hangt in evenwicht, ook al zou wrijving ontbreken, en indien het ondervlak van den balk horizontaal is, kunnen wij het daarbeneden hangende deel afsnijden zonder het evenwicht te storen van de op de hellende zijvlakken liggende kettingstukken.

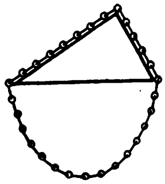


Fig. 6.
Simon Stevin's ketting.

Simon Stevin beredeneerde aldus het evenwicht van gekoppelde massaas die op hellende vlakken steunen, wanneer zij evenredig zijn met de kortste afstanden, in die vlakken, van een punt der tweevlaksribbe tot eenzelfde horizontaal vlak. Indien wij hellingsverhouding noemen de verhouding eener hoogte en de kortste lijn, waarlangs men in een vlak tot die hoogte kan stijgen, kunnen wij zeggen dat de massaas in evenwicht evenredig met de hellingsverhoudingen der vlakken zijn.

Stel het eene der twee vlakken verticaal, en wij kunnen **Stevin**'s uitkomst op de proef stellen door een rol met de massa 5 hg, liggend op een vlak met een hellingsverhouding 3 : 5, verwezenlijkt door een driezijdig houtprisma met zijden in de verhouding 3 : 4 : 5, in evenwicht te houden door een koord, hetwelk, evenwijdig aan dit vlak, over een schijf gespannen wordt door een hangende massa van 3 hg (fig. 7). Wij verifieeren tevens, dat de rol van 5 hg, om 3 cm lager te komen, de massa van 3 hg over 5 cm moet optrekken. Verplaatsing verandert dan ook niets aan de totale massahoogte.

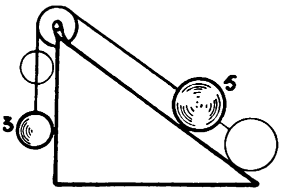


Fig. 7.

De beteekenis van het hellende steunvlak is geen andere, dan dat het de bewegingsmogelijkheid der rol beperkt. Ditzelfde bereikt men door aan de rol een koord te bevestigen en dit loodrecht op het steunvlak vast te houden (fig. 8). Schuif het steunvlak weg, en de rol beweegt niet.

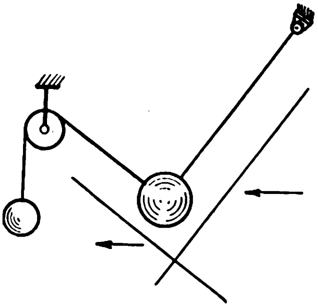


Fig. 8.
Hellend vlak vervangen door gespannen koord.

Het tweede koord is nu gespannen. Met welke kracht? Men passe toe wat men over de spanning van het eerste koord leerde. Immers, wij vervangen nu omgekeerd het eerste koord door een steunvlak loodrecht daarop, d. i. thans met een hellingsverhouding 4 : 5, dat evenwijdig is aan het tweede koord. Het blijkt dat de rol in evenwicht blijft. Op dit steunvlak echter kan de rol van 5 hg stil blijven liggen, wanneer aan het touw over een schijf een massa van 4 hg hangt (fig. 9).

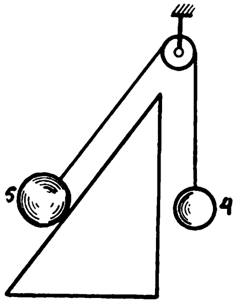


Fig. 9.

Ziedaar nu de mogelijkheid om een rol van 5 hg op te hangen aan het knooppunt van twee koorden, die, onderling loodrecht, gespannen worden door massaas van 3 en van 4 hg. Wij constateeren het evenwicht van drie krachten, waarvan een tegengesteld gelijk is aan de diagonaal van den rechthoek op de beide andere beschreven (fig. 10). Algemeener: drie krachten in eenzelfde knooppunt houden elkander in evenwicht, wanneer ze de drie zijden van een driehoek vormen (en alle den driehoek òf rechts, òf links laten).

Verplaatsing uit den evenwichtstand laat aanvankelijk de totale massahoogte der spannende massaas onveranderd. Bij grootere verplaatsingen echter neemt die noodgedwongen toe. Laten wij de massaas los, dan schommelen zij om den evenwichtstand heen, om tenslotte daarin tot stilstand te komen.

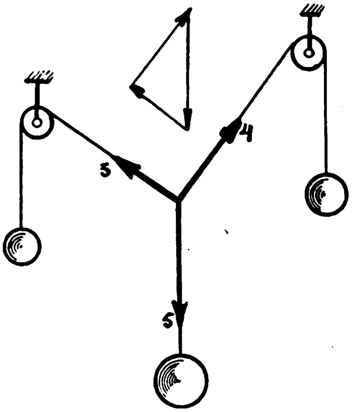


Fig. 10. Krachtendriehoek.

Alle statische werktuigen, waarvan de hefboom en het hellende vlak de eenvoudigste zijn, dienen ons om met behulp van kleine krachten, d. i. met de gewichten van kleine massaas, groote massaas omhoog te brengen, of om groote krachten, eventueel met behulp der wrijving, door kleine krachten in evenwicht te houden. Den arbeid, dien wij doen moeten om een last omhoog te brengen, meten wij door de grootte van de massa en door de hoogte waartoe ze geheven wordt. Wij brengen massahoogte voort, door arbeid te doen.

Wanneer wij door onze inspanning, door onzen arbeid, massahoogte hebben gecreëerd, kunnen wij later profijt trekken van den arbeid, dien de opgeheven massaas voor ons kunnen doen. Wij spreken daarom van massahoogte als van arbeidsvermogen.

Zoodra wij in de statische werktuigen koppelingen van massaas zien, is het duidelijk, dat wij door deze te gebruiken nimmer arbeid kunnen winnen, omdat door de beweging van de in evenwicht gekoppelde massaas nimmer aan de eene zijde meer massahoogte kan worden gewonnen dan aan de andere zijde wordt prijsgegeven.

Wanneer in communiceerende vaten, in de beenen van een U-vormige buis bijvoorbeeld, het water niet even hoog staat, is er nog een overschot van massahoogte, vergeleken bij den evenwichtstand. Indien het hoogteverschil $2h$ cm is (fig. 11), en de doorsnede der beenen een oppervlak s cm^2 heeft, kan er een massa hs g uit het eene been h cm lager plaats vinden in het andere been. Er is dus een beschikbare massahoogte sh^2 gcm. Dit heet arbeidsvermogen van plaats.

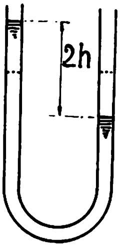


Fig. 11.

Indien een bolmassa van m g aan een slinger van l cm uit den evenwichtstand opzijgetrokken wordt, zoodat de koorde onder het uitwijkingsboogje, d. i. de afstand uit den evenwichtstand, k cm is (fig. 12), dan is de stijghoogte $k^2/2l$ cm. De beschikbare massahoogte is dus $m\,k^2/2l$ gcm. Bij zeer kleine uitwijkingen verschilt de koorde k verbazend weinig van het boogje. Wanneer massaas evenwichtstanden verlaten, om welke zij kunnen schommelen, is hun arbeidsvermogen van plaats (althans aanvankelijk, en bij benadering) evenredig met de tweede macht van de grootte der verplaatsing.

Om een slinger een uitwijking te geven door een kracht, die steeds recht van het evenwichtspunt af, in de richting der uitwijking werkt, hebben wij een kracht noodig, die met het gewicht en met de spanning in het slingerkoord een (gelijkbeenigen) driehoek vormt, gelijkvormig aan den driehoek tusschen den weggetrokken slinger en zijn evenwichtstand (fig. 12). Dus moet de wegtrekkende kracht steeds evenredig zijn aan de uitwijking.

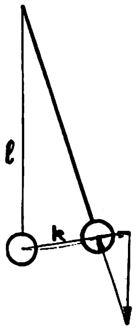


Fig. 12.

Eenzelfde evenredigheid vinden wij bij de kracht, die een veer elastisch uitrekt of een staaf elastisch doorbuigt. Een elastisch gespannen veer kan ook arbeid doen. Daarbij spreken wij eveneens van arbeidsvermogen, ditmaal elastisch. Ook dit elastische arbeidsvermogen zal evenredig zijn met de tweede macht van de grootte der verplaatsing, juist als bij den slinger. Het is een equivalent van massahoogte. Hangen wij een massa aan een veer, dan zal zij na schommelingen tot stilstand komen op een plaats, waar de som van haar eigen massahoogte, d. i. haar arbeidsvermogen van plaats, en van het elastisch arbeidsvermogen der veer zoo klein mogelijk is.

II. Valbewegingen.

Voor zoover wij de lichamen het niet beletten, uit zich hun streven naar beneden hierin, dat zij zich in beweging stellen. De vrije val gaat zoo snel dat wij hem niet goed kunnen bestudeeren. Wij kiezen in stede daarvan de beweging langs hellende vlakken, zoo onbelemmerd mogelijk. Een plank op kleine wielen met glasplaat schiet, door een hamerslag gedreven, langs het hellend vlak omhoog, keert om, en rolt weder terug.

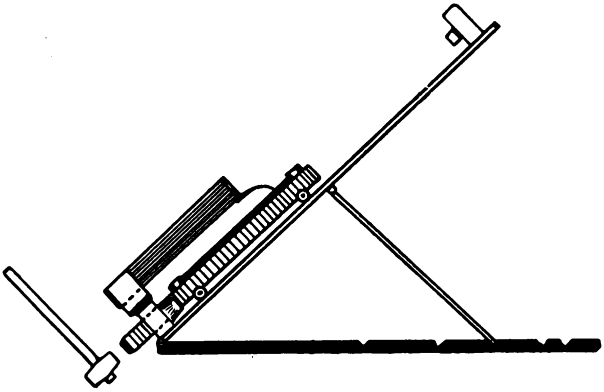


Fig. 13.

In 5 standen stelbaar hellend vlak, met wagentje, glasplaat en trilstift. Twee gelijke trilveren zijn op een brug bevestigd, die over den staart van het wagentje staat, waartegen geslagen wordt.

Deze beweging wordt geregistreerd doordat een aan een veer heen en weer trillende stift in een dun, bestoven vaseline-laagje op de glasplaat een golflijn schrijft (fig. 13). Midden tusschen de toppen en dalen dezer lijn trekken wij een rechte (fig. 14). De snijpunten met de golflijn bepalen de standen der slede op de oogenblikken, dat de veer door haar evenwichtstand heenging.

Voor zoover wij zien kunnen, trilt de veer altijd even vlug heen en weer. Haar periode zij τ sec. Nemen wij de genoemde snijpunten om den anderen, dan kunnen wij door het uitmeten hunner ligging den stand der beweging op equidistante tijdstippen bepalen.

Er zijn twee takken: die der stijgende en die der dalende beweging. Beide meten wij uit, afzonderlijk.

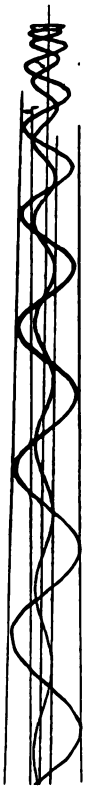


Fig. 14.

Bewegingslijn. Vertraagde tak (groote uitslagen) en versnelde tak.

EERSTE TAK.

tijdstip	wegpunt	gemidd. snelh.	versnelling
	mm	$\frac{mm}{\tau sec}$	$\frac{mm}{\tau^2 sec^2}$
0	52.6		
		3.8	
τ	56.4		2.7
		6.5	
2τ	62.9		2.4
		8.9	
3τ	71.8		2.5
		11.4	
4τ	83.2		3.4
		14.8	
5τ	98.0		2.2
		17.0	
6τ	115.0		2.5
		19.5	
7τ	134.5		

tijdstip	wegpunt	gemidd. snelh.	versnelling
	mm	$\frac{mm}{\tau sec}$	$\frac{mm}{\tau^2 sec^2}$
½τ	54.3		
		5.1	
1½τ	59.4		1.7
		7.8	
2½τ	67.2		2.3
		10.1	
3½τ	77.3		3.1
		13.2	
4½τ	90.5		2.4
		15.6	
5½τ	106.1		3.3
		18.9	
6½τ	125.0		2.4
		21.3	
7½τ	146.3		

TWEEDE TAK.

tijdstip	wegpunt	gemidd. snelh.	versnelling
	mm	$\frac{mm}{\tau sec}$	$\frac{mm}{\tau^2 sec^2}$
0	52.0		
		2.6	
τ	54.6		2.2
		4.8	
2τ	59.4		1.2
		6.0	
3τ	65.3		1.8
		7.8	
4τ	73.3		1.7
		9.5	
5τ	82.8		1.5
		11.0	
6τ	93.8		1.6
		12.6	
7τ	106.4		1.6
		14.2	
8τ	120.6		

tijdstip	wegpunt	gemidd. snelh.	ver-snelling
		$\frac{mm}{\tau sec}$	$\frac{mm}{\tau^2 sec^2}$
$\frac{1}{2}\tau$	53.5		
		3.3	
$1\frac{1}{2}\tau$	56.8		2.4
		5.7	
$2\frac{1}{2}\tau$	62.5		1.3
		7.0	
$3\frac{1}{2}\tau$	69.5		1.5
		8.5	
$4\frac{1}{2}\tau$	78.0		2.0
		10.5	
$5\frac{1}{2}\tau$	88.5		1.4
		11.9	
$6\frac{1}{2}\tau$	100.4		1.5
		13.4	
$7\frac{1}{2}\tau$	113.8		1.6
		15.0	
$8\frac{1}{2}\tau$	128.8		

De wegen in de opvolgende gelijke tijdsdeelen zijn ongelijk. Wij zien hoeveel de gemiddelde snelheden veranderen in de opvolgende etappes. De stappen in de snelheid blijken ongeveer gelijk te zijn.

Hetgeen er ontbreekt aan het gelijkmatig toenemen (of afnemen) der gemiddelde snelheid schrijven wij toe aan fouten in de waarneming, en wij vertrouwen dat de beweging is een eenparig versnelde, resp. eenparig vertraagde beweging.

Wij vinden niet dezelfde waarde voor de snelheidsverandering bij de twee takken der golflijn. Bij de eene is deze 2.6 mm/τ^2 sec^2, bij de andere 1.7 mm/τ^2 sec^2. Dit geeft ons het middel, om te onderscheiden in welke tak de opgaande beweging geregistreerd is. Bij deze werkten de zwaarte en de wrijvingsrest samen om de beweging te vertragen. De tak, uit welken wij de grootste snelheidsverandering aflezen geeft dus de opgaande, vertraagde beweging; de andere geeft de versnelde. Trouwens, ook aan de golfuitslagen kunnen wij zien, welke de dalende tak is: die nl. met de kleinste golfuitslagen.

De halve som der beide versnellingswaarden geeft de versnelling die de beweging zou hebben indien de wrijving kon worden vermeden.

Indien de beweging werkelijk eenparig versneld is, kunnen wij ook de gemiddelde snelheden in langere tijdperken, tusschen 0 en 4τ, tusschen τ en 5τ, tusschen 2τ en 6τ, enz. meten, en de gemiddelde snelheid tusschen 0 en 4τ vergelijken met die tusshcen 2τ en 6τ, de gemiddelde snelheid tusschen τ en 5τ vergelijken met die tusschen 3τ en 7τ. Zulk een verwerking verkleint den invloed van meetfouten in de afzonderlijke gevallen, en het gemiddelde tusschen de aldus gevonden versnellingen geeft de beste waarde, die uit de aflezingen kan worden afgeleid. Uit de gegeven metingen levert deze methode resp. 2.7 en 1.6 mm/τ^2 sec^2.

Doordat het niet goed mogelijk is, de periode van de veer nog verder te verdeelen, kunnen wij slechts een grof beeld van de beweging in onze aflezingen reproduceeren. Wij zouden een veer kunnen nemen, die zeg vijf maal zoo snel trilt. Dan zouden de stapjes, waarmede de vijfmaal kortere wegen in de vijf maal kortere perioden toenemen, vijfentwintig maal kleiner zijn. Wij zouden dan ook den weg zooveel maal nauwkeuriger moeten meten.

In een figuur (fig. 15), waarin de wegen in opvolgende tijdsdeelen als strookjes op elkaar gestapeld worden, gaat de kartelrand naderen tot een lijn, die de gestadige eenparige toeneming der snelheid in den tijd in beeld brengt.

Met behulp dezer figuur verkrijgen wij de betrekking tusschen den weg, afgelegd, en den tijd, verloopen sinds het tijdstip van stilstand en omkeering der beweging:

$$s = \tfrac{1}{2}\, at^2,$$

waarin a de versnelling beteekent.

Wij varieeren de helling, en bepalen de (wrijvingsvrije) versnellingen langs de vlakken met helling van 20°, 30°, 40°, 50°, 60°. Deze bedragen resp, 2.1, 3.3, 4.0, 4.8 en 5.3 mm/τ^2 sec^2.

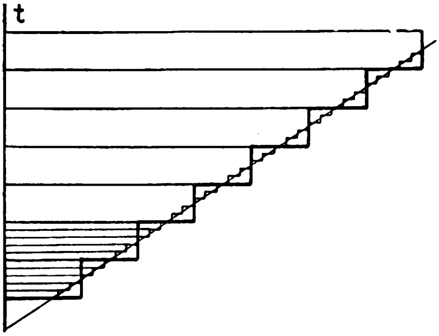


Fig. 15.
Wegen in opvolgende tijdselementen als strooken boven elkaar gelegd. Uit de figuur vindt men het begintijdstip der beweging.

In een figuur deze waarden uitzettende tegen de hellingsverhoudingen (sinus van den hellingshoek, fig. 16), zien wij het verband tusschen de versnellingen en de hellingsverhoudingen: lineair.

Uit dezen samenhang extrapoleeren wij naar de versnelling bij een helling nul:

De wrijvingsvrije beweging op een horizontaal vlak gaat onversneld, met eenparige snelheid, voort.

Ook extrapoleeren wij naar de versnelling bij een helling van 90°, d. i. naar de versnelling van den vrijen val: 6,25 mm/τ^2sec^2 in onze maat, in het CGS-stelsel 980 cm/sec^2.

De lengte der koorden, die van den omtrek van een verticalen cirkel getrokken worden naar het laagste punt van den cirkel, zijn evenredig met hun hellingverhoudingen. Deze immers zijn gelijk aan de verhouding der koordhelften tot den cirkelstraal. De versnellingen der valbewegingen langs die koorden zijn dus ook evenredig met hun lengten. Dus worden zij alle in denzelfden tijd doorloopen. Dit is eene stelling van Galilei.

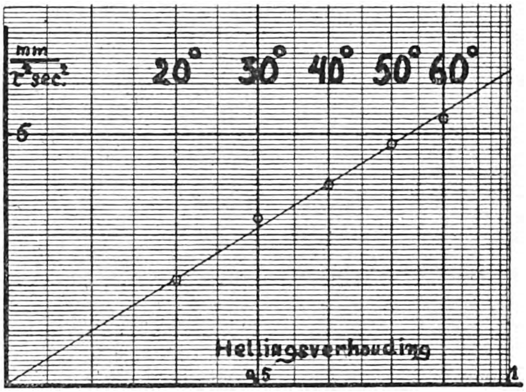


Fig. 16.

Vergelijking van hellingsverhoudingen en wrijvingsvrije versnellingen, op sinuspapier.

De droppels van een waterstraal voeren een vrije valbeweging uit. Wij laten den straal vlak langs een bord spuiten en teekenen zijn vorm, dat is de baan der druppels. Wij verifieeren dat deze een parabool is, en dat men daarvan kan rekenschap geven door de onderstelling, dat de waterdruppels tegelijk een horizontale eenparige beweging hebben en een verticale eenparig versnelde, die elkander niet storen, doch tezelfdertijd worden uitgevoerd.

Een valbeweging langs een hellende lijn van voorgeschreven veranderlijke helling en dus met wisselende versnelling is de slingerbeweging. Merkwaardige eigenschap van de slingerbeweging is, dat de slingertijd uitsluitend afhangt van de lengte, en niet van den slingeruitslag — indien althans deze laatste niet te groot is, zoodat men het verschil in lengte van de doorloopen bogen en de bijbehoorende koorden mag verwaarloozen.

Wij hangen in een rechte lijn twintig even lange slingers op, en brengen ze, op een rechte lijn, uit den evenwichtstand: den eersten bijna niets, den twintigsten meer. Laten wij ze gezamenlijk tegelijk los, dan slingeren zij in het gelid, en blijven dit bewaren (fig. 17).

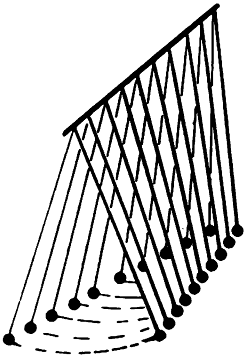


Fig. 17.

Tantochronie van even lange slingers.

Om dit te begrijpen, moeten wij in gedachten de ongelijke slingerbanen elk in duizend gelijke deelen verdeelen, en ons voor oogen stellen, dat niet alleen de overeenkomstige stukjes der verschillende banen, maar ook derzelver hellingsverhoudingen, die de versnelling bepalen, evenredig zijn met de totale baanlengte. Indien de overeenkomstige stukjes door de slingers doorloopen worden met snelheden, die evenredig zijn met de baanlengten, zullen alle twintig in denzelfden tijd doorloopen worden. In dien tijd zullen alle snelheden aangroeien met bedragen, die zich verhouden als de baanlengten. De twintig snelheden zullen dus onder elkander steeds dezelfde verhouding bewaren, zij zullen tegelijk hun grootste waarden hebben (bij het passeeren van den nulstand) en zij zullen tegelijk nul worden. Wij begrijpen aldus de mogelijkheid der tautochronie, die wij in de proef voor oogen zien.

De slingertijd hangt echter wel van de slingerlengte af. Denk aan evengroote slingerbanen van twee slingers, van welke de eene vier maal zoo lang is als de andere. Verdeel beide banen in gedachte in duizend stukjes. Elk stukje van de baan van den langen slinger zal een vier maal zoo kleine hellingverhouding hebben als het overeenkomstige van den korten, de versnelling is daar dus vier maal zoo klein. Indien nu dit stukje doorloopen wordt met een tweemaal zoo kleine snelheid in een twee maal langeren tijd, zal de snelheidstoeneming intusschen ook twee maal zoo klein zijn als bij het overeenkomstige stukje beweging van den korteren slinger. De verhouding der snelheden in de overeenkomstige stukjes blijft daarbij onveranderd, evenals in het vorige geval. Een soortgelijke redeneering doet ons dus bij den vier maal langeren slinger een tweemaal zoo langen slingertijd verwachten. Inderdaad, hangen wij vier V-vormige slingers aan eenzelfde dwarslat, zoo dat de slingerbolletjes recht onder elkander komen, en de slingerlengten zich verhouden als 16 : 25 : 36 : 64, (fig. 18), dan verhouden zich de slingertijden als $\sqrt{16} : \sqrt{25} : \sqrt{36} : \sqrt{64} = 4 : 5 : 6 : 8$. Laten we ze tegelijk los, dan zien wij dat na vijftien slingeringen van den langsten slinger zij alle tegelijk weer in den uitgangsstand zijn. De anderen hebben dan resp. 30, 24 en 20 slingeringen volbracht.

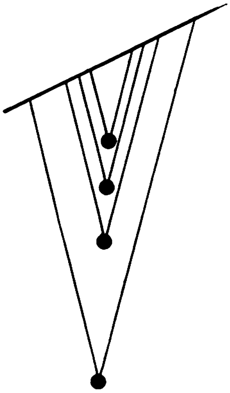


Fig. 18.
Commensurabele slingertijden
4 : 5 : 6 :8.

Eenzelfde verlenging der slingertijden als de door de vermeerdering der lengte teweeggebrachtte, tengevolge van het feit dat deze de versnelling der beweging bij bepaalde uitwijking vermindert, zal uiteraard ook bij constante lengte optreden indien de versnelling van den vrijen val uit anderen hoofde zou veranderen. De voorgaande beschouwing leert dus evenzeer dat de slingertijd omgekeerd evenredig moet zijn met den wortel uit de valversnelling. Zeer scherp blijkt, dat de slingertijden voor slingers van dezelfde lengte maar uit verschillende stof gelijk zijn. Daaruit besluiten wij dat de valversnelling voor alle stoffen dezelfde is, zooals ook door valproeven in vacuo kan worden geverifieerd.

III. Krachten en Bewegingsveranderingen.

De zwaarte van een lichaam uit zich op twee wijzen. Of zij uit zich in een versnelde valbeweging, òf zij uit zich in een kracht, die wij gewaarworden wanneer wij den val beletten, en die wij gewicht noemen. Wij nemen een glas, waarin water staat, dat van onderen door kleine openingen naar buiten spuit. Het wordt door zijn gewicht naar buiten geperst (fig. 19). Wij werpen het glas de lucht in. Van het oogenblik, dat het glas de hand verlaat en een vrijen val uitvoert, houdt het spuiten op: een teeken dat de watermassaas niet meer op elkander en tegen den glaswand drukken. De zwaarte uit zich hier geheel in den vrijen val, en niet meer als gewicht.

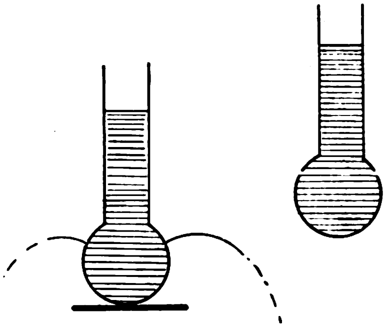


Fig. 19.

Gewichtsverlies van vrij vallende watermassa.

Het ligt voor de hand, een equivalentie te stellen tusschen de beide uitingsvormen der zwaarte. Maar nu is de valversnelling voor alle lichamen dezelfde, terwijl daarentegen de gewichten evenredig zijn met hunne massaas. Trouwens, de versnelling put de beschrijving van den aard van een val niet uit. Het maakt een groot verschil of uit 1 m hoogte een knikker, of een presse-papier op mijn teen valt, al zijn de snelheden dezelfde. De hoeveelheid stof, die valt, speelt ook een rol. Met een minder fraaie uitdrukking noemt men het product van massa en snelheid een hoeveelheid van beweging. De equivalentie van de beide uitingsvormen der zwaarte kunnen wij formuleeren als de equivalentie van het gewicht, een kracht, met de gedurige ontwikkeling van hoeveelheid van beweging per tijdseenheid.

Wanneer de zwaarte langs hellende vlakken werkt, vinden wij deze equivalentie bevestigd: zoowel de versnellingen als de krachten zijn evenredig met de hellingsverhouding.

Kan de zwaarte zich ook uiten deels als kracht (gewicht) en deels in de ontwikkeling van hoeveelheid van beweging?

Proef. Sla over twee schijven een koord en hang aan daaraan bevestigde lichte unsters twee ongelijke massaas, van 500 en van 200 g. De unsters wijzen aan met welke kracht die massaas aan het koord trekken.

Losgelaten, daalt de zware massa versneld omlaag. Nemen wij een zekere voorzorg tegen harmonica-bewegingen van de unsters, dan zien wij, dat bij die versnelde daling de unster minder ver uitgerekt is dan wanneer er 500 g stil aan hangt (fig. 20). De zwaarte dezer massa uit zich dus deels in de versnelling, deels als kracht (gewicht).

De andere massa wordt versneld omhoog getrokken, tegen de zwaarte in. De unster wijst aan, dat zij nu aan het koord trekt met een grootere kracht, met een grooter gewicht, dan wanneer zij stil hangt. Er wordt tegen haar zwaarte in geweld gedaan, de zwaarte wreekt zich met een grooter gewicht.

De voorzorg, waarvan boven sprake was, bestaat hierin, dat men vóór het loslaten de zware massa iets ondersteunt, en aan de lichte trekt, juist genoeg om te maken dat de unsters de uitrekkingen hebben, die bij het loslaten beantwoorden aan de optredende versnellingen. De zwaarte der massa van 500 g is equivalent aan een ontwikkeling van 500 . 980 g (cm per sec) per sec in de eene richting. De zwaarte der andere massa is equivalent aan 200 . 980 g cm/sec^2 in de andere richting. Er blijft een ontwikkeling van 300 . 980 g cm/sec^2 in de eerste richting, die zich verdeelt over de totale massa van 700 g. De versnelling is dus 980 × 3/7 cm/sec^2. Het gewicht van de zwaardere massa neemt af met 3/7, dat der lichtere neemt toe met 3/7, en aan beide einden van het koord trekt eenzelfde gewicht.

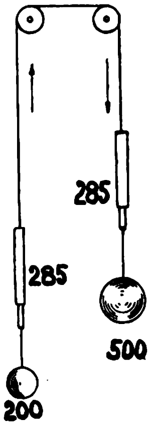


Fig. 20.
Gewichtsverandering bij vertikale versnelling.

Proef. In een waterglas drijft een areometer, die op en neer kan schommelen. In tegenstelling echter tot een aan een veer hangende massa, die men tot schommeling kan brengen door het ophangpunt op en neer te bewegen, komt de areometer niet in beweging, wanneer men het „steunpunt”, d. i. het glas in de hand neemt en op en neer beweegt. De gewichten zoowel der watermassaas als der areometermassa veranderen in dezelfde mate, naar gelang de massaas naar beneden of naar boven versnelde bewegingen uitvoeren: het hydrostatisch evenwicht wordt niet gestoord.

Ook op andere wijze kan zich de zwaarte deels als kracht (gewicht) deels als massaversnelling uiten. Wij stellen een hellende riggel op, waarlangs een wieltje rollen kan, dat (beneden de riggel) aan een koord een massa draagt, op de manier van een slinger. Houden wij het wieltje vast, zoodat de massa recht omlaag hangt, dan zullen na het loslaten het wieltje en de massa met horten en stooten omlaag komen. Om alles glad naar beneden te laten rollen, moeten wij vóór het loslaten eerst zorgen, dat de dragende koorden loodrecht op de riggel zijn. Dan voeren de massa en het wieltje tezamen een ongestoorde versnelde beweging uit (fig. 21). Zoodra de zwaarte langs de hellende riggel zich onbelemmerd in beweging uiten kan, kan zij als gewicht nog slechts werken in die richting, waarin de beweging onmogelijk is: loodrecht op de riggel. Indien de massa aan het koord daarbij niet loodrecht op de riggel hangt, moet zij gaan slingeren. (Deze slingering gesuperponeerd op de versnelde beweging geeft het horten en stooten).

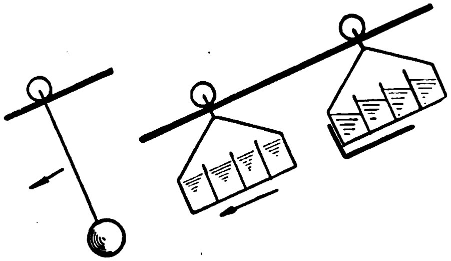


Fig. 21.

Gewichtsrichting bij versnelling langs hellend vlak.

Wil een skilooper recht de helling afglijden, dan moet hij, om niet achterover te vallen, zijn lijf loodrecht op de helling stellen.

Wij hangen aan het riggelwieltje bakjes, met vloeistof gevuld. Houden wij de bakjes zoo, dat straks een afrollen zonder horten verzekerd is, dan zal nog altijd de vloeistofspiegel horizontaal staan. Zoodra echter het naar beneden glijden begint, komt de vloeistofspiegel evenwijdig aan de riggel (fig. 21).

Deze proef herhalen wij met een beweging langs een veranderlijke helling. Wij plaatsen een bakje met water op een schommel, waarop het een slingerende beweging kan uitvoeren. Wanneer de versnelling van het water juist die is welke overal past bij de helling van zijn baan dan zal zijn spiegel zich evenwijdig aan die baan instellen (fig. 22). Dit is het geval, wanneer zijn afstand tot het ophangpunt van den schommel gelijk is aan de slingerlengte, die denzelfden schommeltijd geeft, d. i. wanneer het zg. slingerpunt van den schommel in het vloeistofbakje ligt.

Staat het bakje hooger dan het slingerpunt van den schommel, dan wordt het water tot een beweging gedwongen, die minder versneld is dan overeenkomt met de helling van zijn baan. Wij zien, dat dan ook de waterspiegel oploopt naar den kant van den nulstand des schommels. Staat het bakje lager dan het slingerpunt, dan wordt het water gedwongen tot een beweging die sterker (naar het midden) versneld is dan overeenkomt met de oogenblikkelijke helling zijner baan. De spiegel loopt op naar buiten.

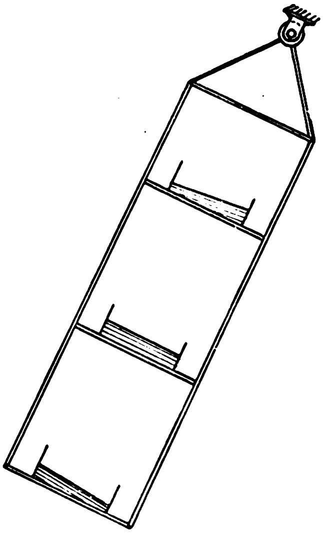


Fig. 22.

Vrije en gedwongen schommeling.

Aan de standen dezer waterspiegels zien wij de richting van het werkende gewicht. Voor zoover deze werkende gewichten componenten hebben loodrecht op de as van den schommel door het draaipunt, moeten hun momenten t. o. v. het draaipunt elkander opheffen. (Dit levert ons omgekeerd een middel om de slingerlengte van een samengestelden slinger te bepalen). Bij de willekeurige schommelingen die men een op een plankje aan eenige koorden opgehangen schoteltje kan laten uitvoeren (fig. 23), kan men zeker zijn dat men de op het schoteltje gegoten vloeistof niet morsen zal. De zwaarte kan slechts als gewicht werken in de richting waarin de beweging niet vrij is: en dat is loodrecht op het schoteltje. Men kan ook zeggen: schoteltje en vloeistof vallen in de andere,

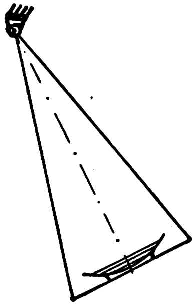


Fig. 23.

Presenteer-schommel.

vrije, richting met dezelfde versnelling: de vloeistof zal dus nimmer over den schotelrand kunnen komen.

Een ervaren kellner zal ook de soepterrien waarmede hij door de zaal loopt, zoo in den arm houden, dat het slingerpunt (bij de slingering om zijn schoudergewricht) in de soep ligt. De vloeistofspiegel zal dan altijd evenwijdig blijven aan de terrienrand.

Resumeerende zeggen wij: een massa heeft gewicht, d. w. z. het vermogen om te trekken of te drukken, indien haar vrije valbeweging wordt belemmerd, en wel in de mate, waarin de bij de beweging ontwikkelde hoeveelheid van beweging afwijkt van die, welke bij den vrijen val zou ontwikkeld worden, gerekend per tijdseenheid. Dit geldt zoowel wat grootte als wat richting betreft. Een andere formuleering luidt: om een massa af te dringen van haar vrije valbeweging is eene kracht noodig, die bepaald wordt door de toeneming der hoeveelheid van beweging die men voegen moet bij die in de vrije valbeweging om de toeneming te krijgen in de gedwongen beweging.

In de tot dusver beschouwde voorbeelden verliep de beweging in hetzelfde vlak als waarin de vrije valbeweging verloopen zou zijn. Wij beschouwen thans gevallen, waarin de beweging ook uit dit vlak wordt gedrongen.

Het behoeft ons niet te verwonderen dat evenzeer als de massaas op een afdringen van den vrijen val in verticale richting met krachten reageeren, zij dit ook zullen doen bij een wegdringing in horizontale richting. Spreken wij in het eerste geval van gewicht, in het tweede spreken wij van middelpuntvliedende kracht.

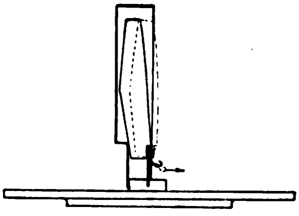


Fig. 24.

Demonstratiekrachtmeter.

Wij willen gevallen verwezenlijken, waarin door geschikte krachten in verticale richting de zwaarte gecompenseerd wordt. Wij leggen daartoe een massa op een horizontale draaischijf. Bij het draaien der schijf zal de massa aan een koord trekken, dat ze dwingt op bepaalden afstand van de as te blijven. Dit koord zit bij de as aan een veer bevestigd, en als er aan getrokken wordt doet het een wit lemmet uit een zwarte scheede te voorschijn komen (fig. 24). De hoogte tot waar het wit zichtbaar is, geeft een maat voor de kracht waarmede aan het koord getrokken wordt.

Wij hebben twee van die schijven vlak naast elkander. Wij drijven ze tegelijk aan, zoo dat de omwentelingssnelheden dezelfde zijn (fig. 25 *a*), of wel zoo dat de eene twee maal zoo snel draait als de andere (fig. 25 *b*). Deze aandrijving geschiedt door een, of twee tegen elkaar op dezelfde as van een tandboormachine gemonteerde schijfjes, die met de hand tegen de draaischijven worden gedrukt.

Indien twee massaas op verschillenden afstand van het midden liggen, en de omwentelingssnelheden (hoeksnelheden) gelijk zijn, zullen de grootten van hun snelheden zich verhouden als de stralen. De richtingsveranderingen der snelheden geschieden in gelijk tempo. De versnellingen verhouden zich dus eveneens als de stralen. Indien nu de massaas zich omgekeerd als de stralen verhouden, zullen de middelpuntvliedende krachten gelijk moeten zijn. Inderdaad is dit hetgeen wij door de proef bevestigd zien.

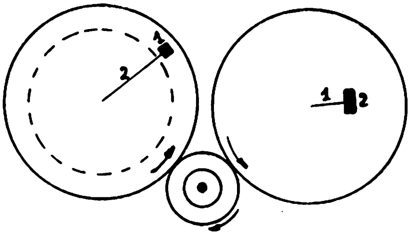


Fig. 25a.

Indien wij de massaas op gelijken afstand van het middelpunt leggen, en de eene schijf draait met een hoeksnelheid, die het dubbele is van die der andere schijf, dan heeft de massa die hierop ligt ook een dubbel zoo groote snelheid. Als gevolg der dubbele hoeksnelheid verandert deze ook dubbel zoo snel van richting als de andere. Dus is de versnelling vier maal zoo groot. De langzamer wentelende massa moet dus vier maal zoo groot gekozen worden om te bereiken dat de middelpuntvliedende krachten gelijk uitvallen. Dit blijkt door de proefneming bevestigd te worden (fig. 25 *b*). De middelpuntvliedende kracht wordt dus bepaald door het product van massa, cirkelstraal en kwadraat van hoeksnelheid.

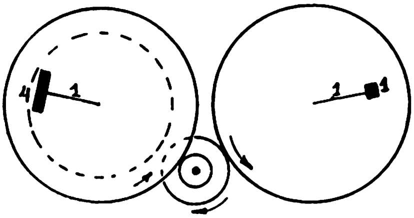


Fig. 25 b.

Bij een wentelende vloeistof kunnen wij fraai de richting zien van de krachten waarin de zwaarte der massaas zich uit: de vloeistofspiegel stelt zich loodrecht daarop in. Bij water in een bak, die om een verticale as wentelt, vormt zich een komholte. De kromming van die holte wordt bepaald door de omwentelingssnelheid. In het midden snijdt de waterspiegel de draaiingsas horizontaal; hoe verder wij naar buiten komen des te steiler wordt de spiegel.

Nu kan men de opvatting huldigen, dat de krachten die dezen stand van den spiegel bepalen de resultante zijn van het gewicht en van de middelpuntvliedende kracht. Maar strikt gesproken is dat een weder vereenigen van hetgeen physisch niet gescheiden is.

Bij de aswenteling der aarde hebben wij iets dergelijks.De vrije-valversnelling is op aarde in verschillende plaatsen ongelijk. Dit uit zich in den slingertijd van slingers, en dus in den gang van slingeruurwerken. Reeds CHRISTIAAN HUYGENS leerde dat dit een gevolg was van de aswenteling der aarde. Ook de afplatting, de afwijking van de aardevorm van den bol is te vergelijken met de vorming van een kom bij de draaiing van vloeistofmassaas.

Het is de grondstelling van EINSTEIN's theorie, dat zwaarte en traagheid in wezen niet verschillen. Er is geen grond om te gelooven dat gewicht en middelpuntvliedende kracht, of (algemeener) traagheidskracht essentieel verschillend zijn. Het tegendeel moet gesteld worden. Zonder nwerking van krachten voeren de massaas uit een vrije valbeweging. Om ze uit deze beweging tot een andere te dringen, heeft men het ingrijpen van eene kracht noodig. Slechts naar gelang der omstandigheden gebruiken wij een verschillenden naam voor het verzet der massaas tegen zulke geweldpleging: gewicht, middelpuntvliedende kracht, traagheidskracht.

Wij hebben een houten schijf uitgehold, in den komvorm van den wentelenden waterspiegel (althans bij benadering) en zetten haar op de draaischijf. De omwentelingssnelheid regelen wij voorzichtig zoo, dat zij past bij de kromming der kom. Stalen bollen die wij, meedraaiende, in de kom neerleggen, blijven dan rustig op de helling in de kom liggen (fig. 26). Overal past de middelpuntvliedende kracht juist bij de gewichtscomponent langs de helling. Anders gezegd, en juister: de zwaarte uit zich bij deze beweging als een kracht loodrecht op het steunvlak. Dat geldt voor bollen die op de helling stil liggen.

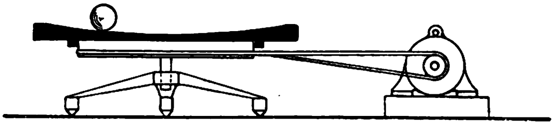


Fig. 26.

Hoe zal echter de beweging zijn indien de bollen in de kom met zekere relatieve snelheid rollen? Stel dat de wenteling der kom linksom gaat. Wanneer de bol een tangentieele snelheid heeft, in dezelfde richting als de kom, dan is zijn middelpuntvliedende kracht grooter dan gecompenseerd wordt door de helling. De bol zal dus naar buiten, dat is rechts afwijken. Rolt de bal tangentieel tegen de draairichting der schijf in, dan is de middelpuntvliedende kracht kleiner dan door de helling gecompenseerd wordt, en de bol wijkt naar het midden: wederom rechtsaf. Rolt de bol radiaal, naar het midden, dan zijn er twee redenen, waarom de beweging niet radiaal blijft. Ten eerste draait de straal onder den bol weg, ten tweede geraakt de bol, die uit een komgedeelte van grootere snelheid komt naar een gedeelte van kleinere snelheid, in dit laatste vóór. De afwijking van de radiale beweging is om beide redenen, wederom, rechtsaf. Hoe de bol ook rolt: naar de kom gerekend wijkt hij altijd rechts af.

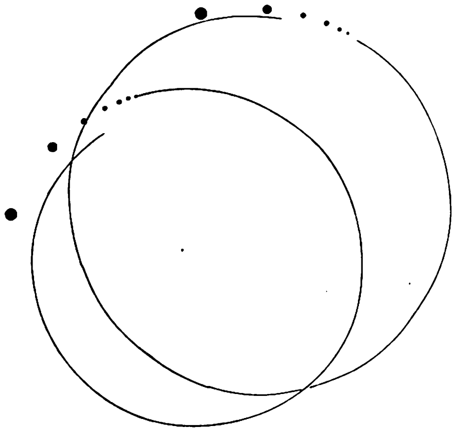


Fig. 27.

Doorgedrukte spiraalbanen. Na het loslaten sprong de bol eenige malen op. De daardoor geteekende vlekjes geven de bewegingsrichting aan.

Leg in de kom een vel papier, en daarop doorslagpapier van de schrijfmachine. Laat een bol daaroverheen loopen. Hij drukt op het papier zijn baan door: deze blijkt een spiraal (fig. 27). De baan zou een cirkel zijn, indien de papierweerstand niet de snelheid verminderde. Met kleinere snelheid blijkt de baan een kleinere cirkel. Indien wij precies konden meten, zou blijken dat de cirkels doorloopen werden in dezelfde tijden.

Wij zouden de proef zuiverder doen indien wij de complicatie van het rollen konden vermijden, en de massaas wrijvingloos langs het oppervlak konden glijden. Dit laatste nu kunnen wij verwezenlijken door ze als slingers op te hangen in het krommingsmiddelpunt der kom. De slingertijd van dien slinger, bij een konische beweging, zal gelijk zijn aan den omloopstijd der kom, wanneer de bollen daarin stil blijven liggen. Het komt er nu op aan, de relatieve beweging der slingermassa t. o. v. de kom te zien, wanneer de slinger zich niet konisch beweegt. Dat kan, wanneer de slingermassa een trechtertje met zand is, en op de kom zwart fluweel gelegd wordt, of de kom door een met fluweel beplakte schijf vervangen wordt (fig. 28). Het zand teekent, bij een juiste stelling, cirkels af. Na een halven slingertijd zijn zoowel slingermassa als schijf in diametraal gelegen punten aan den overkant gekomen. Alle relatieve cirkels worden dus in eenzelfden tijd doorloopen, die de helft is van den omloopstijd der schijf.

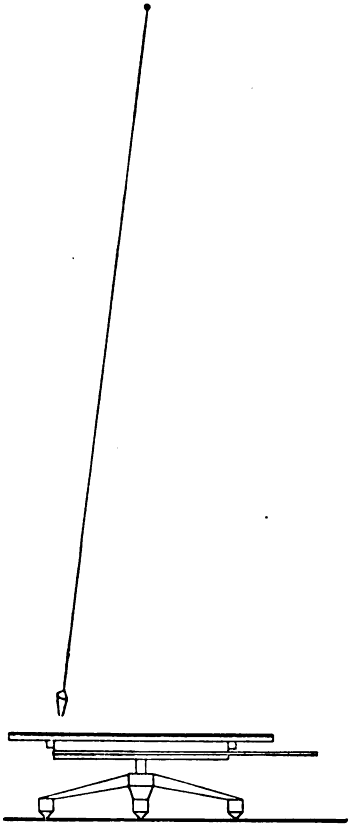


Fig. 28.

Relatieve beweging van vrije slinger en isochroon wentelende schijf.

De relatieve versnelling die hier aan den dag komt is dus evenredig met de relatieve snelheid in de kom. Ook is zij evenredig met het dubbele van de hoeksnelheid der kom. Wij kunnen ze de samengestelde middelpuntvliedende versnelling noemen. Wil men deze beletten, dan moet men met een kracht ingrijpen. De trek of de druk, dien het lichaam daarbij uitoefent om zijn natuurlijke beweging te volgen, heet de samengestelde middelpuntvliedende kracht, ook wel kracht van Coriolis genoemd. Men voelt deze kracht wanneer men, op een draaienden stoel gezeten, een zware massa in de hand snel naar zich toetrekt of van zich af duwt.

Wij zetten een grooten bol op tafel, die de aarde zal voorstellen met een uit de noordpool stekende as, en waarop onze breedtecirkel geteekend is. Wij leggen op den bol een glazen ruit als raakvlak aan onzen breedtecirkel (fig. 29) en maken ons duidelijk dat de beweging van de kamer waarin wij zijn is als die van deze ruit bij de beweging van den aardbol om de as: in eerste benadering een draaiing linksom in haar vlak. Haar snijpunt met de aardas is de pool dezer draaiing. De vorm van het aardoppervlak, van het horizontale zeeoppervlak en de richting van het schietlood zijn zoodanig, dat op aarde stilstaande massaas in evenwicht worden gehouden.

Indien de massaas echter op aarde bewegingen uitvoeren, zullen zij, niet anders dan op onze draaischijf, steeds naar rechts afbuigen, tenzij er een kracht is die ze daarvan weerhoudt.

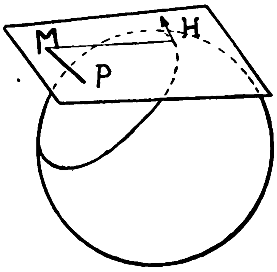


Fig. 29.

In het geval van een slinger is deze er niet. Onder de werking van het gewicht zooals het voor stilstaande massaas werkt, zouden wij een slingering in een plat vlak krijgen. Nu echter zal, indien de massa uit den nulstand wordt weggestooten, zij een snelheidscomponent dwars op het aanvankelijk slingervlak ontwikkelen. Het omkeerpunt is daarom geen omkeerpunt meer: op die hoogte zal er een kleine horizontale zijdelingsche snelheid naar rechts zijn. Bij den terugkeer in den nulstand zal de snelheid niet tegengesteld gericht zijn aan de aanvankelijke, zij zal een daarvan iets in den zin noord-oost-zuid-west afwijkende richting hebben. Dit wordt bevestigd gevonden in de slingerproef van Foucault.

In het geval van een waterstroom, bijv. de getijdestroom door het Vlie, die door een geul of oevers belemmerd wordt zijdelings af te buigen, zal de kracht van Coriolis zich uiten in een dwarsverhang, dat bij het Vlie 7 cm bedragen kan.

In het geval van de luchtstroomen op eenige hm hoogte, waar de invloed der wrijving aan het aardoppervlak zich niet meer doet gevoelen, zullen de luchtmassaas steeds naar rechts afbuigen, totdat er een drukgradiënt dwars op de windrichting is, die dat belet en die opweegt tegen de kracht van Coriolis. Dat is de wet van Buys Ballot: de wind vliegt langs de isobaren, en niet langs den drukgradiënt (fig. 30).

Indien eenige massaas te zamen vallen, zullen zij het alle met dezelfde versnelling doen. Ten opzichte van elkander hebben zij geen versnelling meer. Wij bevinden ons in het geval van de kajuit in den kogel van Jules Verne, die naar de maan geschoten werd. Zoodra de wrijving bij het verlaten der aardatmosfeer ophoudt, zoodra de vrije valbeweging begint, houdt ook alle gewicht op te werken. En alle losgelaten massaas voeren in de kajuit een eenparige rechtlijnige beweging uit.

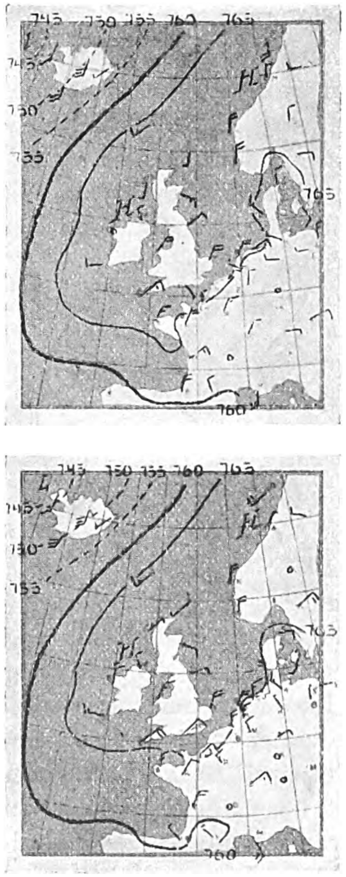


Fig. 30.
Isobaren en windrichting.

Dit is de wezenlijke zin van het z.g. traagheidsbeginsel: zoodra de kajuit zich zoo beweegt dat daarin een aantal vrije massaas rechtlijnige eenparige bewegingen uitvoeren [1]), zullen alle vrije massaas daarin zich rechtlijnig eenparig bewegen.

Toch geldt dit slechts bij benadering. Want indien het zwaarteveld niet homogeen is, d. w. z. indien de versnelling der vrijevalbeweging afhankelijk is van de plaats der vallende massaas, zal er een geringe relatieve versnelling der massaas overblijven. Dit zijn de versnellingen, waarmede de getijden in de oceanen in beweging komen, hier ligt de oorsprong der getijdekrachten. Een fijnere consequentie van Einstein's theorie is, dat de getijdekrachten voor bewegende massaas nog iets verschillen van die voor stilstaande massaas. Ook hier zijn er samengestelde getijdekrachten, die van de bewegingssnelheid afhangen, evenals bij de centrifugaalkracht [2]).

---

[1]) Dit om uit te sluiten dat de kajuit zelf bij haar val zou draaien.

[2]) A. D. Fokker, Relativiteitstheorie, p. 230. P. Noordhoff, Groningen.

IV. Behoud van Energie en van Hoeveelheid van Beweging.

Sprekende over het evenwicht van gekoppelde massaas hebben wij de grondstelling geformuleerd: nimmer kan, door nog zoo kunstige koppeling van massaas, massahoogte, dat is arbeidsvermogen gewonnen worden. Men kan een massa ook omhoog doen gaan, door ze een beweging mede te deelen. De ijdelheid van de hoop, een perpetuum mobile te construeeren, d. i. een machine die massahoogte zou doen winnen, wordt uitgedrukt door de wet, dat ook door kunstige overgang van massahoogte in beweging en van deze weerom in massahoogte niets te winnen is.

Zijn de bewegingen omkeerbaar, dan kan er ook niets verloren worden. Immers, indien men in de eene richting verloor, had men de beweging slechts om te keeren, om massahoogte te kunnen winnen. Bij een wrijvinglooze beweging stijgt de massa dus steeds even hoog als vanwaar zij kwam. Bekend is de proef met den slinger, welks koord halverwege de beweging tegen een pin stuit (fig. 31). De snelheid eener massa op hoogte h hangt samen met de hoogte H, waartoe ze op haar best kan stijgen, door de formule

$$v^2 = 2g(H-h).$$

Het is dezelfde hoogte, vanwaar ze wrijvingloos (omkeerbaar) gevallen moet zijn om de snelheid v te verkrijgen. De massa komt in deze formule niet voor. In v^2 hebben we slechts een potentieele hoogte. Wij vermenigvuldigen met de halve massa $\frac{1}{2} m$ en krijgen

$$\tfrac{1}{2}\, m v^2 = mg(H-h).$$

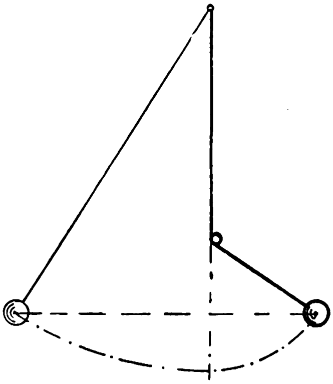


Fig. 31.
Slingerproef van Galileï.

De uitdrukking mgh, die wij rechts met het negatieve teeken zien staan, als maat voor de „massahoogte", noemen wij het arbeidsvermogen van plaats of potentieele energie. De uitdrukking $\frac{1}{2}\,mv^2$ links heet kinetische energie[1]). Wij kunnen ook schrijven

$$\tfrac{1}{2}\,mv^2 + mgh = mgH.$$

Bij omkeerbare bewegingen is de som van beide energieën constant. Dat heet de wet van het behoud van arbeidsvermogen.

Een voorbeeld daarvan zien wij in elken slinger. Naarmate de massa daalt, neemt de snelheid toe, en omgekeerd. De som van mgh en $\frac{1}{2}\,mv^2$ blijft steeds constant.

Wij kunnen ook denken aan vloeistofschommelingen in een U-buis. Het niveau-verschil in de beenen der buis bepaalt, zooals wij zagen, de beschikbare massahoogte, het arbeidsvermogen van plaats. Naarmate het peilverschil afneemt, wint de vloeistof aan beweging, aan kinetische energie. De som blijft constant.

Bij een fontein kan het water niet hooger opspuiten dan het niveau vanwaar het komt. Indien de beweging omkeerbaar ware, d. i. wrijvingloos, zou ook, bij verticaal opspuiten, de fonteinhoogte niet beneden dat niveau kunnen blijven.

Kinetische energie kan ook door het eene lichaam aan het andere worden afgegeven. Dit ziet men bij de omkeerbare botsing van twee bollen van gelijke massa, indien ze als slingers opgehangen zijn, en men op de hoogte let, vanwaar de eene bol kwam, en waartoe de andere na de botsing stijgt (fig. 35).

Het zal niet noodig zijn aan nog veel bekende voorbeelden te herinneren van het behoud van arbeidsvermogen.

Wij hebben eerder reeds de equivalentie ontmoet van eene kracht en de ontwikkeling per tijdseenheid van eene hoeveelheid van beweging. Op een lichaam een kracht uitoefenen beteekent aan dat lichaam gedurig hoeveelheid van beweging mededeelen. Een gedurigen stroom van hoeveelheid van beweging hebben wij in een waterstraal. Indien wij een horizontalen waterstraal in een bakje spuiten (fig. 32), krijgt dit, met een aantal cm^3 water per seconde, ook de hoeveelheid van beweging die dat water meevoert. Het geraakt in beweging, wanneer het bewegelijk opgesteld is. Indien wij het op een schommel zetten, brengen wij bakje en schommeling door een intermitteerenden waterstraal aan den gang, zooals ook door een intermitteerende kracht zou geschieden.

---

[1]) Wij hebben hier een „dynamische" maat voor de massahoogte: de valversnelling doet hier mede, wegens de bewegingsveranderingen. Bij het evenwicht speelde die geen rol. Wij gebruikten daar een „statische" maat voor de massahoogte.

Het omgekeerde proces zou zijn dat hoeveelheid van beweging van een bak water zou worden omgezet in hoeveelheid van beweging van een waterstraal. De waterbak zou dan tot stilstand komen, en wanneer hij stilstond, zou hij achteruit gedreven worden. Dit blijkt inderdaad, wanneer de waterspuit op een tweede schommel wordt gezet. Indien de perioden der twee schommels gelijk zijn, zullen zij tegelijk aan den gang gaan: de eerste door de stooten van den waterstraal, de tweede door de terugstooten. Zulke terugwerking ondervinden wij bij het openzetten van de kraan eener tuinspuit, bij het afschieten van een vuurwapen.

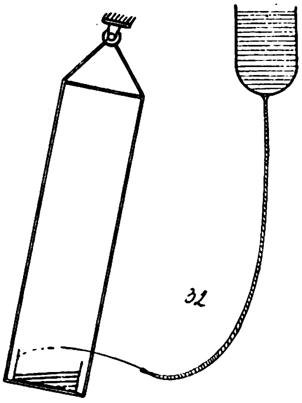


Fig. 32.

Indien twee massaas op elkander **krachten** uitoefenen, deelen zij elkander steeds **gelijke en tegengestelde hoeveelheden van beweging** mede. Men zegt dat **actie en reactie gelijk zijn**. Bij het **roeien**, of bij gebruik van een **stuwschroef** krijgt de boot, en later van de boot door wrijving weer andere watermassaas, even groote hoeveelheid van beweging naar voren, als het gegrepen en achterwaarts gestuwde water naar achteren. Evenzoo doet de stuwschroef van een vliegtuig.

De **vleugels** van het vliegtuig dwingen de lucht tot een hoeveelheid van beweging omlaag. Zelf krijgen zij daardoor gedurig zooveel beweging omhoog als noodig is om te compenseeren de door de zwaarte van het vliegtuig ontwikkelde hoeveelheid van beweging.

Wanneer de op elkander inwerkende massaas niet ondersteund worden, ontwikkelt de zwaarte een bepaalde hoeveelheid van beweging omlaag. Daaraan kan de wisselwerking niets veranderen. Maar al valt het zwaartepunt met de valversnelling omlaag, zulks belet niet dat een deel der massaas omhoog gaan. Dat is het geval bij een vuurpijl, die de verbrandingsproducten met zoo groote snelheid naar beneden uitblaast, dat hun gezamenlijke omlaag gerichte hoeveelheid van beweging per seconde meer bedraagt dan beantwoordt aan de zwaarte van den pijl. De overige massaas moeten dan hoeveelheid van beweging omhoog verkrijgen.

Zijn de werkende massaas door verticale krachten aan de zwaarte onttrokken, dan kan men spreken van het behoud der hoeveelheid van beweging. De wisselwerking bestaat in het ontwikkelen van gelijke en tegengesteld gerichte hoeveelheden van beweging, de totale som blijft dus onveranderd.

Wij hebben een gebogen goot, waarin een zware bol heen en weer kan rollen. Wij zetten de goot op een plank op wieltjes, en nemen waar dat de goot telkens een beweging krijgt tegengesteld aan die van den bol (fig. 33). De totale hoeveelheid van horizontale beweging blijft nul. Het zwaartepunt van bol en goot samen gaat verticaal op en neer, en beweegt zich nimmer zijwaarts, tenzij men van buiten ingrijpt en zijwaarts stoot.

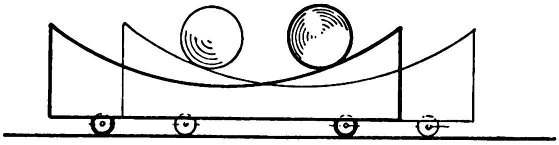


Fig. 33.

De wetten van het behoud toetsen wij aan botsingsproeven. Wij hangen twee bollen aan even lange koorden op, zoodat zij in den evenwichtsstand precies naast elkander hangen, rakende zonder te drukken (fig. 34). Worden zij opzijgetrokken, en tegelijk losgelaten, dan komen zij ook tegelijk in den evenwichtsstand aan, en botsen met snelheden, die evenredig zijn met de uitwijkingen die zij op het moment van loslaten hadden.

Stel de bollen zijn plastisch, en de botsing onveerkrachtig, niet-omkeerbaar. Kiest men de uitwijkingen omgekeerd evenredig aan de massaas, dan zijn bij de botsing de hoeveelheden van beweging tegengesteld gelijk. Na de botsing hebben deze elkander volkomen opgeheven. Er is geen beweging meer over.

Stel de bollen zijn van veerkrachtig staal en de botsing nagenoeg omkeerbaar.

Bij gelijke bollen, met gelijke uitwijking tegelijk losgelaten, zal de totale hoeveelheid van beweging vóór en na de botsing nul zijn. De energie is ook niet veranderd, zij springen terug met dezelfde snelheid zooals blijkt uit de gelijke uitwijkingen, tot waar zij doorloopen: even ver als voorheen. Laat men den eenen bol stil hangen, terwijl de andere in den evenwichtsstand terugkomt, dan moeten zoowel hoeveelheid van beweging als kinetische energie dezelfde blijven, zoo voor als na de botsing. Dat kan slechts

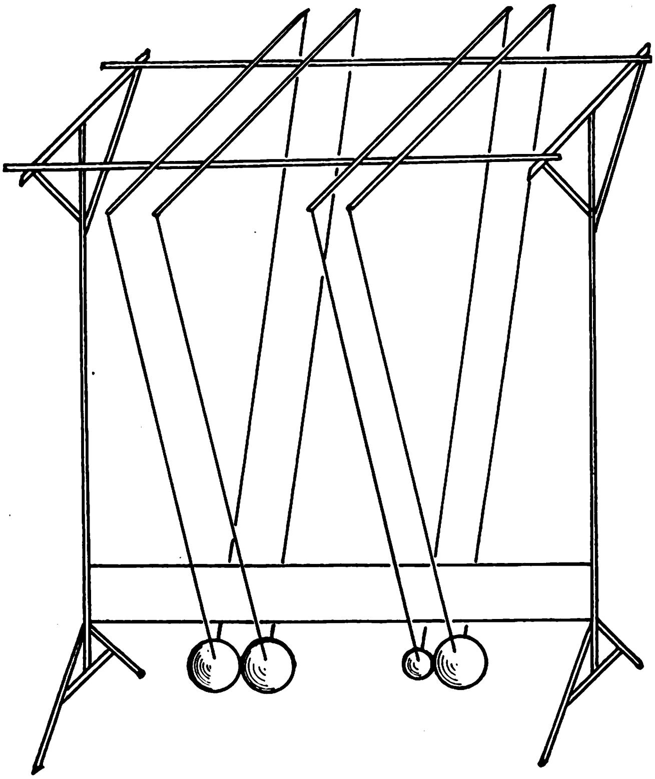


Fig. 34.

Botsingstoestel. De dwarsbalkjes worden aan de lange draagbalken vastgeklemd. De bifilaire ophanging kan door een draaiklem aan elk balkje worden versteld, tot de slingertijden gelijk zijn. In het symmetrievlak der draden een schaalverdeeling ter bepaling der uitwijkingen.

wanneer de voorheen stilstaande bol alle hoeveelheid van beweging overneemt en alle energie, en evenver doorvliegt als vanwaar de anderen gekomen was (fig. 35). Daarna draait hij om, en de omgekeerde botsing vindt plaats. In tusschengelegen gevallen, waar de gelijke bollen met ongelijke snelheid op elkander instormen, ziet men dat zij bij de botsing elkanders snelheid overnemen (fig. 36).

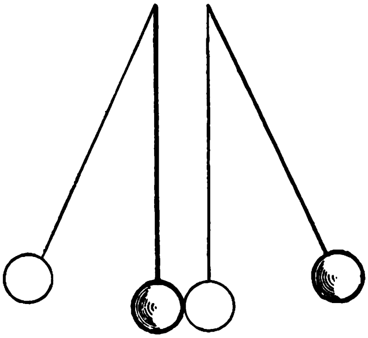


Fig. 35.

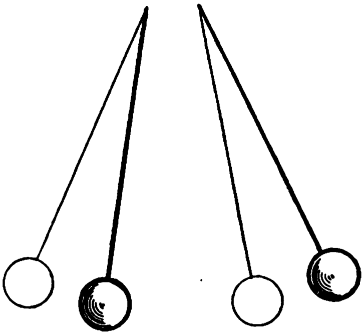
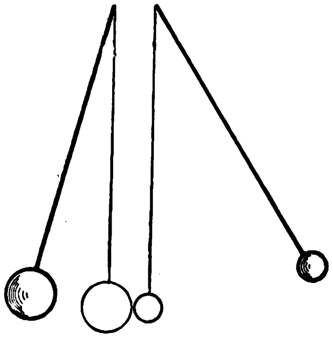


Fig. 36.


Fig, 37.

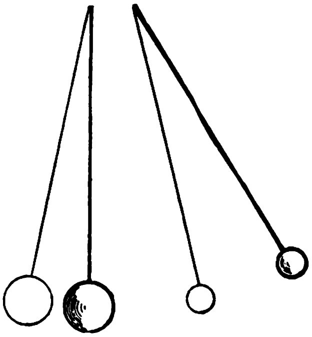


Fig. 38.

Hebben de veerkrachtige bollen ongelijke massaas, en trekt men ze ongelijk op zij, zoo dat het zwaartepunt blijft recht boven de plaats waar het in den nulstand is, dan zal bij de botsing de totale hoeveelheid van beweging nul zijn en blijven. Dit bepaalt de verhouding der snelheden na de botsing. De kinetische energie blijft onveranderd. Dit bepaalt dat ook de grootten der snelheden na de botsing dezelfde zijn als daarvoor. De bollen keeren op hunne schreden terug om bij dezelfde uitwijkingen als waar zij begonnen weder om te keeren en opnieuw te botsen (fig. 37).

De tweede, omgekeerde, botsing is hier gelijk aan de eerste.

Trekt men alleen den kleinen bol opzij, dan zal hij terugspringen, na den grooten meer hoeveelheid van beweging gegeven te hebben dan hij zelf had, en niet zoo ver terugkomen als van waar hij kwam (fig. 38). Na de omkeering van beider bollen beweging vindt de omgekeerde botsing plaats: de beginsnelheden nu zijn de omgekeerde eindsnelheden van daareven. Bij deze botsing is de eindsnelheid van den grooten bol nul, zooals bij de eerste botsing zijn beginsnelheid was, en de kleine bol wordt teruggeworpen met de energie die hij aanvankelijk had tot in den eersten uitgangsstand.

Trekt men alleen den grooten bol opzij, dan zal hij doorloopen, na den kleineren voor zich uitgestooten te hebben (fig. 39). Nadat zij beide omgekeerd zijn, vindt in den evenwichtsstand de tweede, omgekeerde botsing plaats, welke den kleineren bol, die den grooten achteropgekomen is en vooruit tikt, wederom stil doet staan, terwijl de groote weer even ver doorvliegt, als vanwaar hij gekomen was.

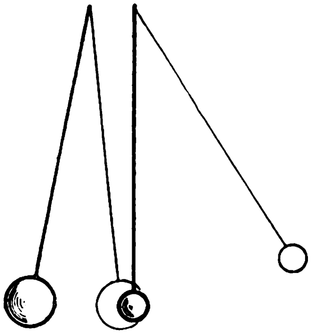


Fig. 39.

Door de diverse uitwijkingen in de bewegingskeerpunten te markeeren en uit te meten, kan men de wetten van behoud van hoeveelheid van beweging en van arbeidsvermogen in deze gevallen nader verifieeren.

V. Draaiïngen.

Bij de volgende studie van draaiende bewegingen zullen wij stilzwijgend steeds de aanwezigheid van verticale krachten onderstellen, die het vallen der proeflichamen verhinderen, tenzij anders gezegd zal worden. Wij hebben een zeer licht draaibare horizontale as waarop wij gemakkelijk een aantal gelijke koperen schijven kunnen schuiven (fig. 40). Om de as is een koord geslagen, waaraan een stuk koper hangt. Dit brengt de as in beweging, en wij zouden met een trillende schrijfstift op den rand van een der schijven de beweging kunnen registreeren, en uitmetende constateeren, dat deze eenparig versneld is, of eenparig vertraagd, indien bij de beweging de massa aan het koord omhoog getrokken wordt.

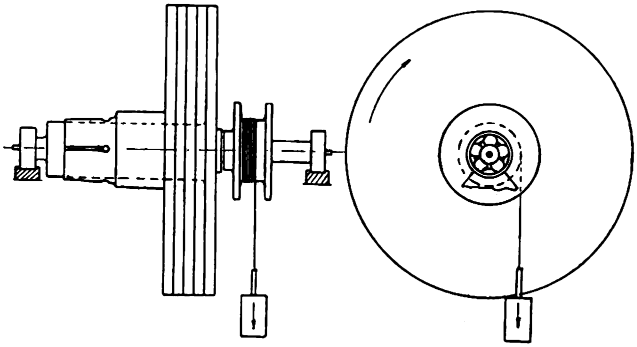


Fig. 40.
De as kan met haar kogelblokjes van de steunpunten gelicht worden. De veerende bus met welke men de schijven aandrukt, kan over de kogelblokjes worden weggeschoven, ter verwisseling der schijven. Een tweede, dergelijke bus draagt een spiraalveer, welker ander uiteinde gemakkelijk afneembaar aan een steunblok kan worden vastgemaakt, voor de schommelproeven.

Wij willen ons een oordeel vormen over de versnelling die de aandrijvende krachten, d. z. de koordspanning en de opwaartsche druk in de blokken der as, teweegbrengen wanneer successievelijk een, twee, drie, vier of vijf schijven op de as staan. Wij meten de tijden, die de opgehangen massa behoeft om vanuit een bepaalde uitgangshoogte over een bepaalden afstand te dalen. De kwadraten dezer tijden zullen omgekeerd evenredig zijn met de versnellingen. Wij vergelijken ze met het aantal der opgezette schijven.

Aantal schijven	daaltijd	tijdkwadraat
1	2,8 sec.	7,24
2	4,1	16,81
3	5,0	25,0
4	5,7	33,1
5	6,6	43,6

In de grafische voorstelling (fig. 41), lijkt het, of de punten op een rechte lijn liggen. Echter ligt het vijfde punt daarboven, en de lijn gaat aan de verkeerde zijde langs den oorsprong, alsof bij een onbelaste as de daaltijd imaginair kon zijn. Dit kan niet kloppen.

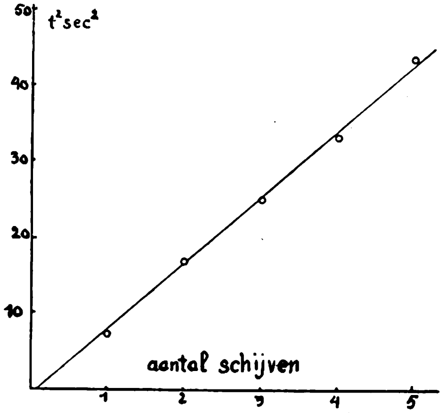


Fig. 41.

Wij moeten echter ook op de wrijving verdacht zijn. Bij de zware belasting van vijf schijven zal de wrijving in de steunblokken grooter zijn, en dus t te groot uitvallen. Indertijd, bij de beweging langs hellende vlakken hebben wij gelet op op- en neerglijden om de wrijving te kunnen elimineeren. Hier kunnen wij het koord om de as van eindige lengte nemen, zoodat na het afwikkelen weer een opwinden volgt. Weliswaar bereikt de aandrijfmassa niet meer de uitgangshoogte, en naarmate er meer wrijving is zal zij er verder onder blijven. Maar het zal duidelijk zijn, dat aldus de stijgtijd tengevolge der wrijving te kort uitvalt, terwijl de daaltijd te lang uitvalt. Wij krijgen dus een althans gedeeltelijke compensatie. In de uitkomst teekent zich al duide-

aantal schijven	daal- en stijgtijd	tijdkwadraat
1	5,6 sec.	31,3
2	7,65	58,5
3	9,25	85,5
4	10,7	114
5	12,0	144

lijker af een lineair verband tusschen de kwadraten der tijden en het aantal schijven (fig. 42). Wij gissen nu hoe het moet zijn in het wrijvinglooze geval. Het omgekeerde van de versnelling, de traagheid waarmede de as in beweging komt, laat ons aanstonds zeggen het traagheidsmoment, neemt telkens met eenzelfde bedrag toe wanneer er weder een schijf wordt toegevoegd, en een maat voor het traagheidsmoment vinden wij in het kwadraat der door ons gevonden tijden.

Uit de grafische voorstelling zien wij, dat ook voor de as zonder schijven nog een traagheidsmoment overblijft. Daarin is ook begrepen het effect van de verschillende mate, waarin de koordspanning, dat is de aandrijvende kracht, beneden het normale gewicht van de kopermassa blijft, wanneer deze met verschillende versnelling omlaag gaat of omhoog getrokken wordt.

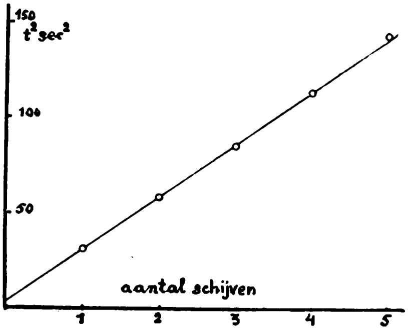


Fig. 42.

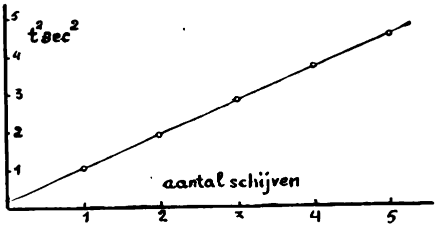


Fig. 43.

Evenals bij op- en neergang langs een hellend vlak hangt hier de daal- en stijgtijd af van den afstand waarover de beweging op en neer gaat. Dit maakt, gezien de vermindering der stijghoogten tengevolge der wrijving, het niet mogelijk om de waarneming nauwkeuriger te maken door eenige op- en neergangen na elkander te zamen te meten. Bij den slinger echter zijn de slingertijden onafhankelijk van de amplitude. Het analogon hier verwezenlijken wij door de constante aandrijving van koord en massa te vervangen door de geleidelijk met de uitwijking veranderlijke van een spiraalveer. Wij verwachten hier beter bevestigd te vinden dat de kwadraten der schommeltijden lineair met het aantal schijven toenemen, en een maat voor het traagheidsmoment leveren. Inderdaad vinden wij dat nu bevestigd (fig. 43).

aantal schijven	schommeltijd	tijdkwadraat
1	1,03 sec.	1,06
2	1,38	1,90
3	1,68	2,82
4	1,91	3,65
5	2,12	4,49

Daar de schijven alle gelijk waren, is het aanvankelijk niet zeker, of wat wij traagheidsmoment genoemd hebben niet neerkomt op de hoeveelheid materie, op de massa der schijven. Wij monteeren nu koperstukken van dezelfde massa, maar van verschillenden vorm successievelijk op eenzelfde, verticaal asje dat door een spiraalveer aan een evenwichtsstand gebonden is (fig. 44). Een bol, een cylinder, een platte schijf, draaibaar om een middellijn, een platte schijf, draaibaar om de hartlijn, een lineaal, draaibaar om een as door zijn middelpunt of om een as dicht bij een eindpunt: die alle geven zeer uiteenloopende schommeltijden. Zij hebben dus uiteenloopend traagheidsmoment, ondanks de gelijke massa. De gevallen, vooral het laatste, wekken de gedachte dat het aankomt op de distributie der massaas rondom de draaiingsas.

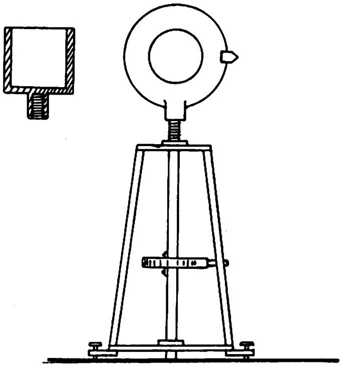


Fig. 44.
Drievoet met beveerde as, waarop verschillende lichamen geschroefd kunnen worden.

Wij hebben een stoel, welks zitvlak om een verticale as kan draaien, en welks as door een spiraalveer aan een evenwichtstand gebonden is. Wij leggen daarop een draagbalk, en bepalen den schommeltijd (fig. 45). Deze bedraagt 1,56 sec. Het kwadraat hiervan is 2,43 sec^2.

Dan zetten wij op dien balk twee massaas van 1 kg, beide op 0,3 m van het midden, en bepalen den schommeltijd. Wij doen hetzelfde met twee massaas van 2 kg, beide op 0,3 m van de as van draaiing. Dan zetten wij die twee massaas van 2 kg elk op

0,6 m van de as. Ook zetten wij de twee massaas van 1 kg op 0,6 m van de as. Telkens bepalen wij den schommeltijd. Deze bedraagt in de genoemde gevallen 2,11, 2,53, 4,19 en 3,20 sec. De kwadraten van de schommeltijden zijn resp. 4,45, 6,40, 17,56, 10,24 sec^2.

Uit de verschillen zien wij, dat het traagheidsmoment door de plaatsing van de 2 × 2 kg op 0,3 m afstand toeneemt met het dubbele van wat de plaatsing der 2 × 1 kg op 0,3 m afstand aan toeneming te zien geeft. De plaatsing van 2 × 2 kg op 0,6 m afstand geeft 4 maal de toeneming door 2 × 2 kg op 0,3 m afstand, en 8 maal de toeneming door 2 × 1 kg op 0,3 m afstand.

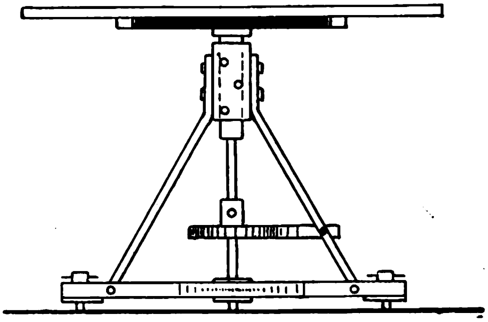


Fig. 45.

Draaistoel met vertikale as op drie stelbare pooten. Op het zitvlak is een balkje gelegd, waarop de massaas gezet worden. De spiraalveer kan ook worden afgenomen.

Het traagheidsmoment wordt dus bepaald door de massa, en door het kwadraat van den afstand tot de as. Wij drukken het uit in kgm^2.

Wij kunnen deze conclusie op de proef stellen door de 2 × 2 kg te zetten op 0,5 m van de as. De schommeltijd wordt 3,63 sec. Het kwadraat wordt 13,18 sec^2. Dit punt ligt uitstekend in de lijn van de andere waarnemingen (fig. 46).

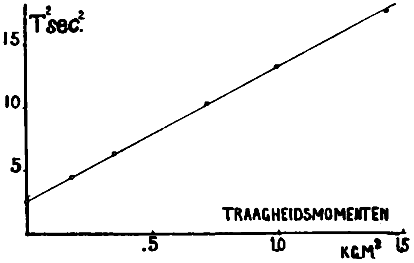


Fig. 46.

Met behulp van denzelfden stoel, door middel van het kwadraat van den schommeltijd en vergelijking met wat bekende massaas op bekenden afstand geven, kunnen wij ook het traagheidsmoment van menschelijke lijven bepalen. Dit kan voor verschillende personen zeer uiteenloopen. Bij twee personen vond ik voor het traagheidsmoment om de lengteas van het staande lijf resp. 25 en 10 kgm^2, terwijl het traagheidsmoment van het liggende lijf om een verticale as door het zwaartepunt bedroeg 190 resp. 110 kgm².

Overal waar de lichamen draaien bij het in beweging geraken, speelt het traagheidsmoment een rol. Wrijvingloos glijdende langs een hellend vlak hebben alle lichamen dezelfde versnelling, maar een het vlak afrollende bol haalt een massieven cylinder in, en de massieve cylinder haalt een hollen cylinder in (fig. 47). Een knikker, die in een bolvormige kom heen en weer rolt, heeft een andere schommeltijd dan een slinger, die in een baan van denzelfden kromtestraal slingert. Een vergelijking der slingertijden leert, dat de versnelling van den knikker bij de- zelfde baanhelling 5/7 is van die van den slinger.

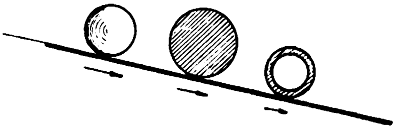


Fig. 47.

Door relatieve verplaatsing der massaas kunnen wij het traagheidsmoment veranderen. Wij ontdoen den draaistoel van de spiraalveer, en nemen daarop plaats met twee massaas van 2 kg in de hand. Met uitgestrekte armen en gestrekte knieën laten wij ons in langzame wenteling brengen. Wij zouden langen tijd gestadig doordraaien. Trekken wij nu de handen en voeten in, dan wentelen wij plotseling veel sneller. Zoodra wij weder de massaas uitsteken keert het rustige tempo der aanvankelijke draaiing weder.

Zonder dat er draaiende krachten werkzaam zijn, kan dus door verandering van het traagheidsmoment de draaiing worden versneld en verlangzaamd.

Elke acrobaat, die een salto mortale maakt, past dit toe. Door intrekking van hoofd, armen en beenen maakt hij de wenteling om de horizontale as door zijn zwaartepunt zoo snel, dat bij het eind van den sprong de voeten weder omlaag en het hoofd omhoog kunnen zijn. Door bij het neerkomen ledematen en lijf uit te strekken vertraagt hij de wenteling op gepaste wijze.

Wij zetten ons op den wrijvingloozen draaistoel, en laten ons een horizontaal draaiend fietswiel, waarvan de velg verzwaard is, aangeven. Wij krijgen dan in handen een zekere hoeveelheid van draaiing, die voorloopig in het fietswiel gelocaliseerd is. Wij kunnen die echter aan het wiel onttrekken, door in de spaken te grijpen en het wiel te remmen (fig. 48). Het blijkt dat wij dan een draaiing overnemen: wij draaien nu op den stoel rond.

Deze proef vertoont een analogie met die, waarbij in een beweglijk bakje een waterstraal met hoeveelheid van beweging gespoten werd. Evenals daar de hoeveelheid van beweging van het water door het bakje werd overgenomen, wordt hier de hoeveelheid van draaiing uit het wiel door den man op den stoel overgenomen.

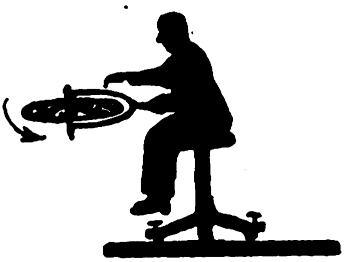


Fig. 48.

Die overneming van hoeveelheid van draaiing heeft dezelfde uitwerking als een stoot van een krachtenkoppel. De uitwerking van een krachtenkoppel bestaat in het gedurig mededeelen van hoeveelheid van draaiing.

Om een wrijvinglooze as zonder uitwendige krachtsinwerking is er behoud van hoeveelheid van draaiing.

Hoe kan men, zittende op den draaistoel, zich omdraaien? Indien de stoel goed wrijvingloos is, zal de totale hoeveelheid van draaiing niet veranderen. Indien wij nu de massa van onze handen in een cirkel laten ronddraaien, vertegenwoordigt dit een hoeveelheid van draaiing, die de massaas alleen kunnen krijgen op voorwaarde, dat de overige massaas van ons lichaam een hoeveelheid van draaiing in den anderen zin krijgen. Wanneer deze andere massaas voldoende zijn rondgekomen houden wij met de handbeweging op. Wij zitten dan weder zonder draaiing stil met veranderd front.

Eenzelfde taktiek passen wij toe wanneer wij dreigen op den evenwichtsboom ons evenwicht te verliezen. Door snelle draaiing van de armen trachten wij het overige lichaam een hoeveelheid van draaiing te geven die weder het zwaartepunt boven den boom brengt.

Waardoor zullen wij een hoeveelheid van draaiing kenmerken? Denk aan het draaiende fietswiel. Wij hebben draaiing wanneer massaas oppervlakken omschrijven. De snelheid waarmede een massa draait, kunnen wij aangeven door het oppervlak, dat per seconde omschreven wordt: de perksnelheid. Ook de richting van de draaiingsas wordt door de perksnelheid, door den stand van het omschreven oppervlak aangeduid. Onder de hoeveelheid van draaiing zullen wij verstaan het dubbele product van de massa en het per seconde omschreven vlakje. Is het oppervlak van het wiel πr^2, is de massa van de velg m, en is het aantal omwentelingen per seconde n, dan is de hoeveelheid van draaiing $2n\pi r^2 m$ ($n2\pi$ is de hoeksnelheid, mr^2 het traagheidsmoment).

Bij deze definitie komt het er niet op aan, of het omschreven oppervlak een cirkel is. Het zou een ellips mogen zijn. Wij zouden het ook mogen voorstellen als een rechthoekje, of een driehoekje.

Wij zouden het vlakje kunnen projecteeren op drie onderling loodrechte vlakken. Deze zouden, met het dubbel der draaiende massa vermenigvuldigd, de componenten der hoeveelheid van draaiing voorstellen volgens die drie vlakken.

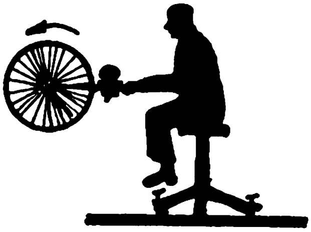


Fig. 49 a.

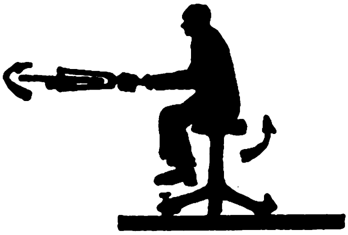


Fig. 49 b.

Samenstellen van hoeveelheden van draaiing geschiedt door de vlakjes de grootte te geven die zou passen bij dezelfde hoeveelheden van draaiing van eenzelfde massa, en een zoodanigen vorm, dat zij met ééne zijde, die in tegengestelde richting door de massa doorloopen wordt, tegen elkander gepast kunnen worden (fig. 50). De andere zijden omsluiten dan een vlak dat de samengestelde hoeveelheid van draaiing meetkundig voorstelt.

Wij laten ons, op den draaistoel gezeten, wederom een draaiend fietswiel geven; dezen keer echter verticaal (fig. 49 *a*), zoodat er geen draaiing in een horizontaal vlak is [1]).

Wanneer wij het fietswiel zijwaarts omleggen krijgt het een hoeveelheid van draaiing in een horizontaal vlak (fig. 49 *b*). Wij zijn echter wrijvingloos draaibaar. De totale hoeveelheid van draaiing in een horizontaal vlak moet dus nul blijven. Wij bemerken dan ook terdege dat ons lichaam een draaiing krijgt, tegengesteld aan die van het wiel. Wij zetten het wielvlak weer verticaal: aanstonds houdt daarbij onze eigen draaiing op. Wij leggen het wiel naar de andere zijde horizontaal, wij draaien in tegengestelden zin net zoo lang tot wij weder het wiel recht opzetten.

Welk krachtenkoppel hebben wij uit moeten oefenen om het wiel om te leggen? Wij zien wat voor koppel het wiel op ons heeft uitgeoefend: wij zijn aan het draaien geraakt om een verticale as. Dus hebben ook wij op het wiel een tegengesteld koppel uitgeoefend, eveneens om een verticale as. En zulks teneinde het wiel om een horizontale as om te leggen! Dit is paradoxaal, omdat het in tegenstelling staat tot wat wij bij de gewone beweging zien. Wanneer wij een naar boven gerichte beweging naar links willen richten, wanneer wij een opwaartsche pijl naar links willen draaien, moeten wij er een naar links gerichte pijl bij doen, en een kracht oefenen in de richting waarin de snelheid moet geleid worden. De draaiing echter heeft meetkundig het karakter van een vlak, en niet van een pijl. Het standvlak ADF (fig. 50), dat de standverandering meet, staat loodrecht op het vlak DCEF van de draaiing die aan de voorhandene draaiing ABCD moet worden toegevoegd om de standverandering teweeg te brengen.

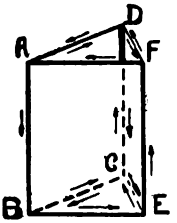


Fig. 50.

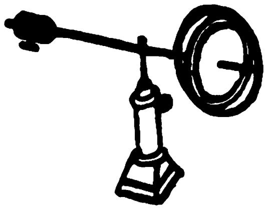


Fig. 51.

---

[1]) Gedurende de proef onderhoudt een aan de vork bevestigde kleine motor de draaiing van het wiel.

Wij zijn hier aangeland bij den gyrostaat. Een sneldraaiende schijf of ring, op een horizontale as, excentrisch ondersteund (fig. 51), valt niet omlaag zooals zij zonder draaiing doen zou. De hoeveelheid van draaiing, per seconde door haar eigen zwaarte en de steunkracht ontwikkeld, voegt zich bij de reeds voorhandene in dier voege, dat de schijf zijwaarts wijkt, om de richting van haar draaivlak te wijzigen. Wij zien in stede van een omlaagvallen een zijdelingsche precessie.

De richting waarin de gyrostaat zich beweegt vindt men door te bedenken dat bij het optreden der precessie de gyrostaatmassaas welke naar beneden gekomen zijn, grootere snelheid moeten hebben dan die, welke omhoog geloopen zijn, tegen hun zwaarte in.

Wij zijn hier ook bij het gedrag aangeland van een tol, die niet omvalt (fig. 52), maar zijdelings zich onttrekt aan dat gevaar;

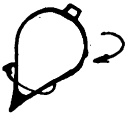


Fig. 52.

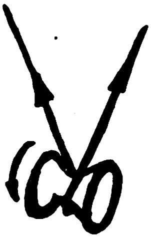


Fig. 53.

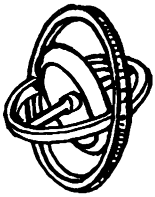


Fig. 54.

of van een diabolo, dien men, om te maken dat hij uit een scheeven stand horizontaal komt, met de touwen een koppelstoot om verticale as moet toedienen (fig. 53).

Een torus op een as staat in een ring loodrecht op de horizontale as, waarom deze ring draaien kan, welke ring in een grooteren ring bevestigd is loodrecht op de verticale as, waarom deze laatste draaien kan (fig. 54). De torusas kan aldus alle mogelijke richtingen hebben, en het gewicht is zoo verdeeld, dat in alle standen het toruszwaartepunt even hoog ligt. Wij hebben vóór ons een gyroscoop. Draait de torus snel, dan kan men bestudeeren, hoe de beweging der torusas loodrecht verloopt op het vlak van een krachtenkoppel dat men in werking stelt.

Japansche koorddansers ontleenen aan draaiende parasolletjes stabiliseerende krachten. Indien de parasol draait om verticale steel, dan zal, indien de koorddanser voor het behoud van zijn evenwicht aan den steel een draaiimpuls onttrekt in een vlak, loodrecht op het koord, de steel eenvoudig in de richting van het koord vóór- of achteroverbuigen.

Het gyroscopisch kompas trekt partij van deze werkingen, die de omwentelingsas van een torus evenwijdig aan de aardas trachten te stellen, om de richting van het noorden te vinden. De torusas wordt daartoe gedwongen in een horizontaal vlak te blijven. De verwezenlijking van een op zee bruikbaar compas biedt echter nog vele complicaties, in welker beschouwing wij niet meer kunnen treden.

263 R

Aus den Beständen der Niedersächs. Staats- und Universitätsbibliothek ausgeschieden.
Göttingen, den 18. AUG. 1966

ARCHIVES

DU

MUSÉE TEYLER

SÉRIE III, VOL. VII

FASCICULE 3

A. D. FOKKER en J. VAN DEN HANDEL, **Bewegingen in Vloeistoffen en gassen. Zaterdagmiddagvoordrachten** 133
A. D. FOKKER, **Theorie relativiste de l'interaction de deux particules chargées** 176

LA HAYE
MARTINUS NIJHOFF
1932

BEWEGINGEN IN VLOEISTOFFEN EN GASSEN.

ZATERDAGMIDDAGVOORDRACHTEN IN TEYLER'S STICHTING
OP 6, 13 EN 20 DECEMBER 1930

DOOR

A. D. FOKKER, opgeteekend door J. VAN DEN HANDEL.

De bestudeering van de bewegingen en krachten in vloeistoffen en gassen biedt behalve haar eigenaardige bekoring ook haar eigenaardige moeilijkheden.

Moeilijk is zij, omdat de vloeistoffen niet grijpbaar zijn. Bij de vaste lichamen weet men wat men heeft. Zij hebben onveranderlijken vorm, dien men rustig kan betasten en bekijken. Men kan ze vasthouden en er ongestoord krachten op uitoefenen. Geheel anders is het bij de vloeibare lichamen. Zijn het eigenlijk wel lichamen? Blijvenden eigen vorm hebben zij niet. Van glas in glas geschonken voegen zij zich geheel en nemen den vorm aan van het vat, waarin men ze ziet. Men kan niet de deelen van elkander onderscheiden. Deze kunnen onophoudelijk van plaats wisselen. Voor het eene komt het andere, en wij merken het niet. Van grijpen is geen sprake, het loopt alles door de vingers, al is het waar dat de eene vloeistof taaier kleeft en trager wegstroomt dan de andere. Eerst recht ongrijpbaar zijn de gassen. De lucht zien wij nooit als een afzonderlijke begrensde massa. Zij breidt zich uit zoover zij kan, en men moet zich al een eind verstandelijk geoefend hebben om in te keeren van de naieve gewaarwording, dat lucht .... niets is en om zich te overtuigen dat ons gezichtsveld gevuld is met een onzichtbare lichamelijkheid.

Juist omdat de vloeistoffen zich van de vaste lichamen onderscheiden, doordat zij geen blijvenden eigen vorm hebben, dat wil zeggen doordat ook de geringste kracht reeds voldoende is om een duurzame en onherstelbare vormverandering teweeg te brengen, kunnen zich gevallen voordoen, waarin wij onderscheid moeten maken tusschen de beweging van de stof en de beweging van den vorm. Stel, dat wij een steentje in het water laten vallen.

Ieder weet wat er gebeurt: golfrimpels zullen zich op het oppervlak om het trefpunt uitbreiden in een steeds wijder wordenden kring. Wat is het, dat zich verplaatst? Niet de afzonderlijke waterdeeltjes. Ware dit zoo, een drijvende dobber zou met het water medegevoerd worden. Het tegendeel is het geval, hij danst even op en neer en komt niet van de plaats. Het is de bloote vorm van het wateroppervlak die beweegt, die zich voortplant, gelijk wij zeggen, een vorm die zelf niets is, maar achtereenvolgens door andere, zij het eendere stof wordt bekleed, een ijle abstractie, een karakteristiek van een gemeenschappelijke cohaerent geordende beweging van verschillende watermassa's, welker individueele beweging slechts dient om de golf door te geven en ons geheel ontsnappen zou, tenzij de beweging der waterdeeltjes afzonderlijk op een of andere wijze — door een dobber — gemarkeerd wordt.

Dit is wat wij om te beginnen zullen moeten doen. Wij zullen de bewegingen der afzonderlijke waterdeeltjes zichtbaar maken om ze te kunnen bestudeeren, wij moeten sommige deeltjes merken.

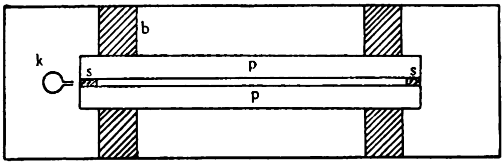


FIG. 1. *ps* en *ps* zijn twee glasplaten, van elkaar gehouden door de glazen schijfjes *s*.

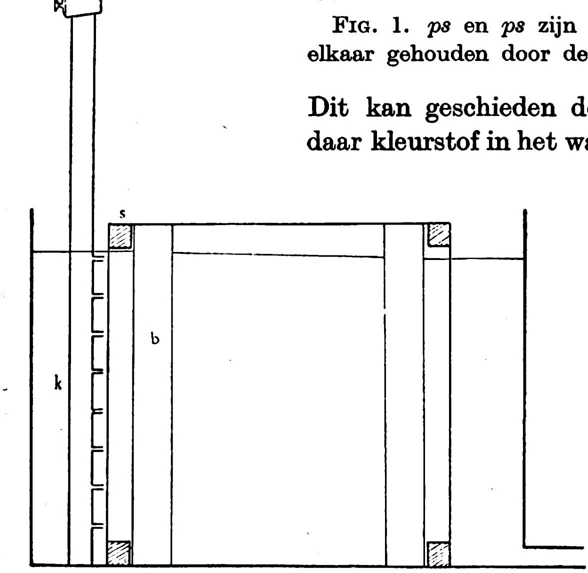


Fig. 2.

Dit kan geschieden doordat wij hier en daar kleurstof in het water brengen. Geldt het luchtbewegingen, dan kunnen wij voor dit doel tabaksrook gebruiken.

I.

Stroombeelden.

We zullen eerst eens eenige stroomingswijzen bij vloeistoffen nagaan. Voor demonstratie wordt het volgende toestel gebruikt: In een glazen bak staan dicht naast elkaar twee evenwijdige glasplaten, rechtop. Om hun onderlinge afstand goed te fixeeren, worden ze aan de hoeken door dunne stukjes glasplaat (2 mm) van elkaar gescheiden. De bedoeling is nu, dat het water tusschen beide platen doorstroomt. Het moet dus, door blokjes (*b*) bijv., belet worden om tusschen de platen en de wanden van den bak door te stroomen. De horizontale projectie ziet er uit zooals in fig. 1 geteekend is. Van opzij ziet het toestel eruit als in fig. 2.

Wanneer we nu links wat water in de bak laten loopen, dan kan dit alleen tusschen de platen door wegstroomen. We krijgen zoo een tweedimensionale vloeistofstrooming. Om de beweging zichtbaar te maken, gebruiken we een kaliumpermanganaat oplossing, die we op verschillende punten met dezelfde snelheid als het instroomende water in de ruimte tusschen de glasplaten laten binnenstroomen. Om dit te doen, wordt er aan den linkerkant een buisje *k* in den bak gezet, dat aan één kant een rij gaatjes heeft. Deze rij gaatjes wordt naar de spleet tusschen de glasplaten gekeerd en het buisje gevuld met de roode oplossing uit een hooger geplaatst reservoir, waar het mee verbonden is. Met een klem in de toevoerslang kunnen we de stroomsnelheid der kleurstof regelen. Als we deze gelijk gemaakt hebben aan die van het water, dan zien we, hoe rechte kleurstoflijnen zich afteekenen. We hebben hier te doen met een stationnaire strooming, waarbij de deeltjes elkaar achternagaan. Elk volgend deeltje gaat precies denzelfden weg als zijn voorganger. Zoo'n lijn, waarlangs een rij vloeistofdeeltjes zich beweegt noemen we een *stroomlijn.*

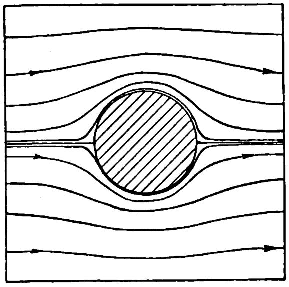


Fig. 3*a*.

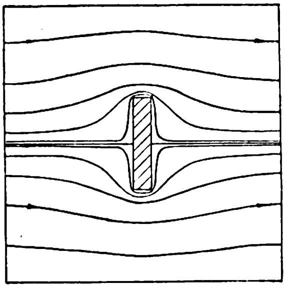


Fig. 3*b*.

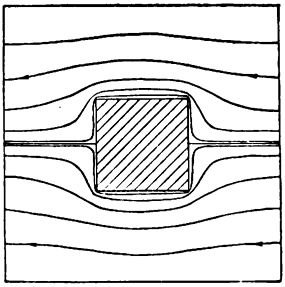


Fig. 3*c*.

De beweging van een vloeistof om verschillende hindernissen is hiermede te demonstreeren. We brengen daartoe tusschen de glasplaten metalen schijfjes van verschillenden vorm. Enkele voorbeelden van zulke stroomlijnfiguren, die we op een scherm kunnen projecteeren, ziet men in fig. 3*a*, *b*, *c*.

De vloeistofbeweging van één punt uit, of naar een punt toe kan op een dergelijke wijze, maar met een iets verschillend toestel onderzocht worden. Op een spiegelruit, die den bodem vormt van een glazen bak wordt een glazen plaat gelegd, met de hoeken op celluloid schijfjes rustend. In deze plaat zijn een paar openingen gemaakt waar buisjes doorgestoken worden (Fig. 4). Hierin tenslotte worden de uiteinden gestoken van buisjes waardoor water toegedruppeld kon worden of afgezogen. Om de beweging zichtbaar te maken, worden wat $KMnO_4$ kristalletjes in het toevoerbuisje gestrooid, vanwaar ze met den waterstroom in de spleet onder de glazen plaat geraken. Ze lossen daar langzaam op en als het water er langs stroomt, zien we een rood streepje. We kunnen nu elk der twee openingen naar believen als een *puntvormige bron* of als een *put* benutten.

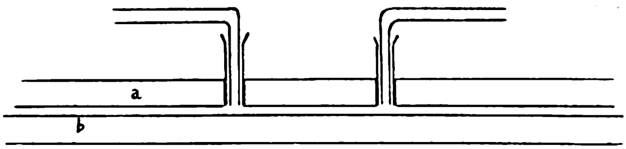


Fig. 4. *a* is de glazen plaat, *b* de glazen bodem.

Van de verkregen figuren zijn op de volgende wijze schaduwen te projecteeren. (Fig. 5).

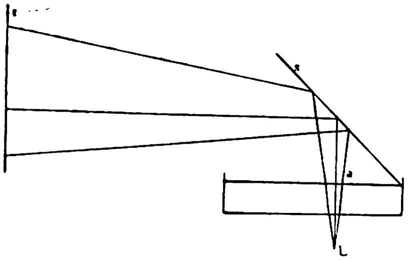


Fig. 5. *L* is de lichtbron, *s* de hellende spiegel en *t* het scherm, terwijl de figuur zich bij *a* bevindt.

Onder den glazen bodem bevindt zich een lichtbron, die met behulp van een hellenden spiegel, welke boven het water staat, een schaduwbeeld op het scherm werpt.

Wanneer een enkele bron werkt, dan krijgen we een stralenbundel, waarvan de stralen van de bron af loopen. Bij een enkelen put loopen ze naar dezen toe.

Wanneer we *bron en put tegelijk* laten werken, dan krijgen we een *superpositie* der twee stroomingen, die wij in beeld te zien krijgen als een stelsel van gebogen lijnen, welker vorm afhangt van de capaciteiten van bron en put. Stroomt er door de bron evenveel toe, als er door den put opgezogen wordt, dan krijgen we cirkelbogen, die bij de bron beginnen en bij den put eindigen.

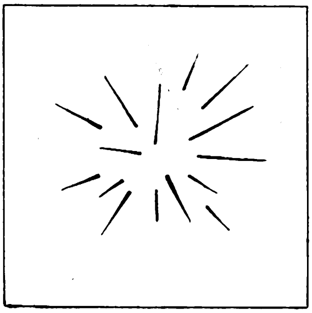


Fig. 6*a*. Stroombeeld van een bron.

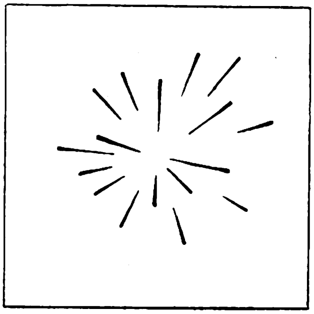


Fig. 6*b*. Stroombeeld van een put.

Er bestaat een groote overeenkomst tusschen deze stroomlijnfiguren en de krachtlijnfiguren, die men krijgt bij de vervanging van bron en put door twee tegengesteld electrische ladingen of twee tegengestelde magneetpolen. Het verschil is, dat deze laatste figuren drie-dimensionaal zijn, onze stroombeelden daarentegen twee-dimensionaal. Om volkomen gelijke figuren te krijgen zouden we twee draden evenwijdig aan elkaar moeten spannen en ze tegengesteld laden. De krachtlijnenfiguur in een vlak loodrecht op deze draden is dan gelijk aan die van bron en put, als de verhouding der capaciteiten dezer laatste gelijk is aan die van de ladingen per eenheid van lengte van de draden.

Wanneer we bron en put dicht bij elkaar brengen, dan krijgen we het stroomlijnenbeeld van een *dipool.*

Tenslotte kunnen we deze stroomingen nog combineeren met een evenwijdige strooming. Zoodra we evenwijdige stroomingen gaan gebruiken, moeten we de celluloid hoekstukjes vervangen door reepen. Aan beide einden der glasplaat zetten we bovendien houten schotjes daarover heen, die de bakdoorsnede overigens afsluiten, zoodat water, in de eene afdeeling toegevoerd, en uit de andere afgezogen, uitsluitend een weg vindt door de spleet tusschen bodem en glasplaat. Zoo geeft de *bron samen met de evenwijdige* strooming een beeld als in figuur 8.

Indien *bron en put beide* werken met dezelfde capaciteit, terwijl er *tevens een evenwijdige* strooming is, dan zien we een in zichzelf gesloten stroombeeld van bron en put, waar de stroomlijnen van

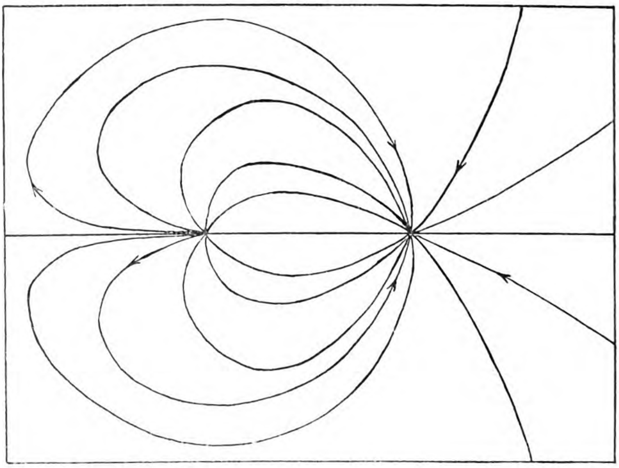


FIG. 7*a*. De capaciteit van de bron is kleiner dan die van den put.

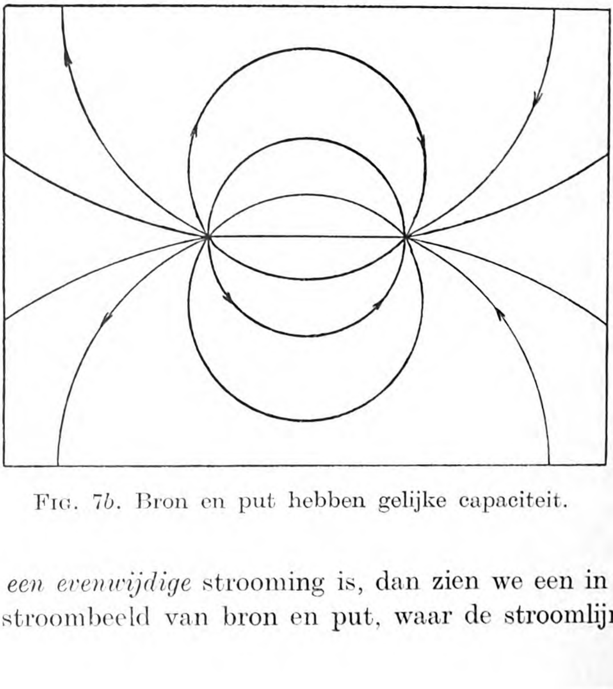


FIG. 7*b*. Bron en put hebben gelijke capaciteit.

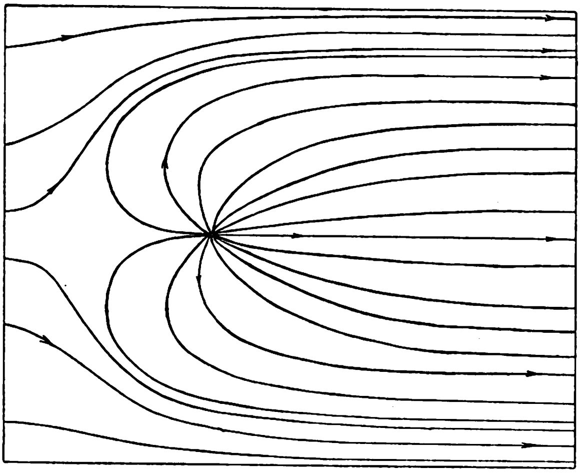


FIG. 8.

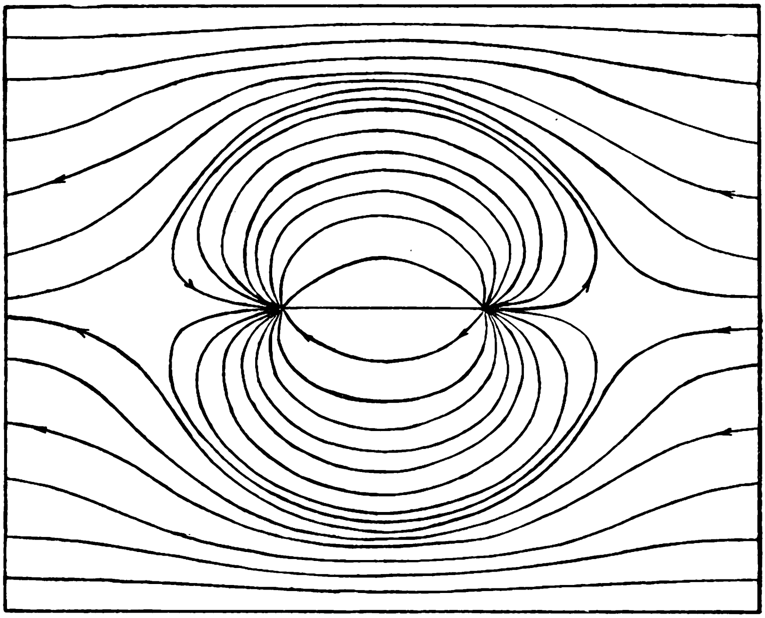


FIG. 9.

buiten omheenbuigen. Een dergelijke figuur wat de buitenzijde betreft, hebben we al ontmoet in fig. 3, waar we de strooming om een vast lichaam beschouwden.

II. Druk en wrijving.

Nu zullen we de krachten eens beschouwen, die bij stroomingen in het spel zijn.

Als een vloeistof in beweging is, voert zij een zekere hoeveelheid van beweging met zich mede. Komt er iets in den weg, dan kan hieraan de hoeveelheid van beweging geheel of gedeeltelijk overgedragen worden: het lichaam ondervindt dan een kracht. Dit is heel duidelijk te zien aan een waterstraal, die een opgehangen blokje opzij kan duwen.

In een vloeistof heerscht steeds een zekere druk, de *hydrostatische druk,* waarvan de grootte gelijk is aan den druk van de buitenlucht, vermeerderd met den druk uitgeoefend door de per cm^2 boven het beschouwde punt staande vloeistofkolom. Hij zal dus grooter worden, naarmate wij het niveau verhoogen, of wel naarmate wij lager komen in de vloeistof, en de druk zal gelijk blijven, indien we ons op dezelfde hoogte bewegen.

De hydrostatische druk, verminderd met den druk van de buitenlucht, is dus gelijk aan dien van een kolom vloeistof, waarvan we de hoogte „*drukhoogte*" zullen noemen. Wij zullen ons bij gelegenheid van de uitdrukking bedienen, dat vloeistof die onder zekeren druk staat, een zekere „drukhoogte heeft".

Maken we nu een opening in den wand van het vat waarin zich de vloeistof bevindt, dan zal deze in een straal naar buiten spuiten en wel met des te grooter snelheid, naarmate het gat zich lager bevindt in het vat.

Dit is te demonstreeren met een toestel van VAN MARUM, dat bestaat uit een hooge cylinder in welks wanden op verschillende hoogten openingen gemaakt zijn, die met schroefdopjes gesloten kunnen worden. Bovenaan is de cylinder verwijd zoodat we daar een waterreservoir krijgen. Dit is gedaan, om het water niet zoo snel te laten zakken, wanneer een of meer openingen ontsloten worden. Onderaan is er een zijstuk gemaakt, in welks bovenkant zich ook een opening bevindt en waaruit we, door een kraan te openen, het water naar boven kunnen laten spuiten. Het toestel ziet er dus uit als in fig. 10 geschetst is. Wanneer we de opening *a* vrij maken, dan spuit het water naar boven en wel bijna zoo hoog als het oppervlak van het water boven in het toestel. Dat het niet precies deze hoogte bereikt, komt door de wrijving, die het water onderweg en bij de uitstrooming ondervindt. — Hier uit zich de wet van 't behoud van arbeidsvermogen. Immers, als geheel genomen verandert er niets anders dan dat bij den spiegel *b* een zekere watermassa wegzakt, en een evengroote massa in de fontein omhoog gaat. Er zou arbeidsvermogen verloren gaan, indien deze niet dezelfde hoogte bereikte als de massa bij *b* had. Zonder storende wrijvingsinvloeden zou de stijghoogte even groot zijn als de drukhoogte die bij gesloten opening het water in de buurt van *a* heeft. Komt de opening vrij, en spuit het water daaruit, dan wordt de hydrostatische druk in de opening gelijk aan den druk van de buitenlucht. Met deze afneming van den druk gaat gepaard een toeneming in snelheid van het water. De aldus verkregen snelheid bepaalt voor het water de „*stijghoogte*". In het algemeen kunnen we een snelheid aangeven door de er uit volgende stijghoogte. De vloeistof, die vóór het verlaten van het toestel een aanmerkelijke drukhoogte had en, slechts zeer langzaam stroomende, een stijghoogte, die bijna nul was, heeft na het verlaten een aanmerkelijke stijghoogte gekregen en een drukhoogte die nul is.

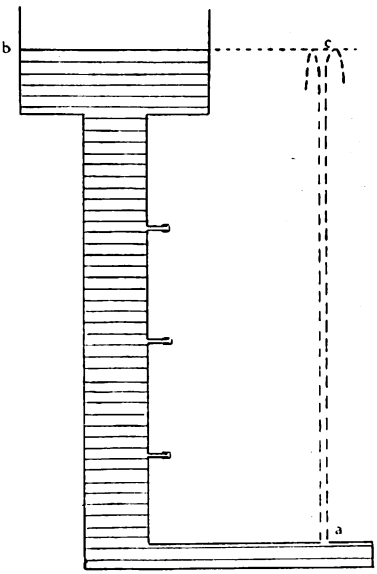


Fig. 10.

Kijken we nu eens naar het hoogste punt van den straal. Daar zijn drukhoogte en stijghoogte beide nul maar is de hoogte der plaats waarop zich de vloeistof bevindt toegenomen.

We hebben hier drie grootheden gezien, waardoor de toestand van de stroomende vloeistof gekarakteriseerd wordt, n.l.: 1⁰. de *plaatshoogte*, waarop de vloeistof zich bevindt; deze is van belang omdat de vloeistof op grooter hoogte een grootere potentieele energie krijgt; — 2⁰. de *drukhoogte*, d. i. de hoogte, waartoe de hydrostatische druk in een open buis de vloeistof zou doen stijgen; — 3⁰. de *stijghoogte*, d. i. de hoogte, waartoe een zich bewegend vloeistofdeeltje met zijn gegeven snelheid zal kunnen stijgen, indien alle kinetische energie in potentieele energie wordt omgezet.

Tusschen deze drie bestaat een vast verband, berustend op het beginsel van het behoud van arbeidsvermogen. Deze betrekking, die van Bernoulli afkomstig is, luidt: Bij een stationnaire strooming is langs een stroomlijn de som van plaatshoogte, drukhoogte en stijghoogte constant. Den druk, die beantwoordt aan de som van druk- en stijghoogte, noemt men *hydrodynamischen druk*.

Als bijzonder geval van deze betrekking herkennen we de waarneming, dat bij de fonteinproef het water zal opstijgen tot het vloeistofniveau in het reservoir. Druk- en stijghoogte zijn, langs een stroomlijn die *b* en *c* verbindt, bij *b* en *c* nul of practisch nul. De plaatshoogten moeten dus gelijk zijn. Denken we ons eens, dat de druk en snelheid langs een stroomlijn bij de opening *a* plotseling veranderen, dan komt ook hier de wet van Bernoulli uit, want de plaatshoogten zijn even binnen en even buiten de opening vrijwel gelijk en de drukhoogte voor 't verlaten is gelijk aan de stijghoogte na 't verlaten van *a*.

Een ander voorbeeld van de werking der wet van Bernoulli kunnen wij laten zien met het in fig. 11 geteekende buisje. Bij *a* stroomt vloeistof naar binnen, bij *b* weer naar buiten; de zijbuisjes *c* en *d* doen dienst als manometertjes. Buis *c* geeft bij het doorstroomen van de vloeistof een kleineren druk aan dan *d*. Terwijl *d* nog een kleinen druk aanwijst, kan er zelfs bij *c* wel lucht naar binnen gezogen worden. De hoogte is in beide gevallen gelijk. Bij *c* is de snelheid het grootst, en daarbij de druk het kleinst.

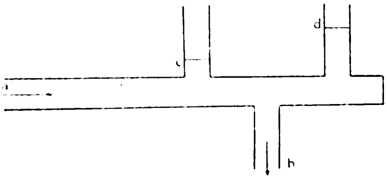


Fig. 11.

Een toepassing van de wet van Bernoulli vinden we in de waterstraalluchtpomp, die er in principe uitziet als in fig. 12.

a wordt met de waterleiding verbonden. Het water stroomt bij *b* door een vernauwing en krijgt daardoor een grootere snelheid. Hierbij wordt de druk dus laag en de omringende lucht wordt in den straal opgenomen en meegevoerd. *c* kunnen we verbinden met een ruimte die we leegzuigen willen.

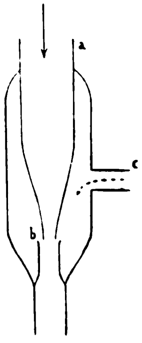


Fig. 12.

Een andere proef, die wat paradoxaal aandoet, is de volgende (Fig. 13). We hebben een buisje dat om de nauwe opening een plat cirkelschijfje draagt.

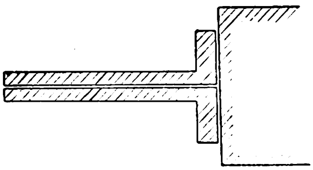


FIG. 13.

We blazen er lucht door en houden het dan dicht bij een zijvlak van een aan vier draden opgehangen blokje. In plaats van weggeblazen te worden, lijkt dit eraan te blijven kleven. We kunnen het er zelfs mee opzij trekken. De verklaring is deze: Bij de radiale uitbreiding in de spleet wordt de snelheid veel kleiner. Bij het uitstroomen aan den rand heerscht de druk van de buitenlucht. Naarmate we verder naar binnen gaan in de spleet, moet de druk dus kleiner worden, met als gevolg, dat het blokje naar de spleet toe gedrukt wordt.

Dat een vloeistofstraal een kracht uitoefent, kunnen we ook op de volgende wijze zien: Wanneer we in een verticaal naar boven gerichten straal een celluloïd balletje brengen, dan wordt het door den straal gedragen. De straal staat hierbij per seconde een zekere hoeveelheid van beweging aan het balletje af. Hoe zwaarder het balletje is, des te meer opwaartsche hoeveelheid van beweging wordt er per seconde vereischt om het te dragen en des te lager zal dus het balletje komen, omdat slechts daar de noodige hoeveelheid van beweging door den straal kan worden verschaft. Een dergelijke proef kunnen we ook doen met een luchtstraal. Hierbij merken we tevens nog iets anders op, n.l. dat we den straal een vrij groote helling kunnen geven, zonder dat het inmiddels in snel ronddraaiende beweging geraakte balletje eruit valt. Wanneer we met een gladde strooming te doen hadden, zooals we tot nu toe nog steeds beschouwd hebben, dan was dit gemakkelijk te verklaren. Aan den buitenkant van den straal is de snelheid van de lucht kleiner dan van binnen. Dan moet volgens de wet van BERNOULLI de druk binnen lager zijn dan buiten. Het balletje bevindt zich dus in een luchtzak. In werkelijkheid hebben we hier echter niet zoo'n gladde strooming, maar worden er wervels gevormd bij het strijken van de luchtlagen van verschillende snelheid langs elkaar. We mogen dan de wet van BERNOULLI niet meer toepassen. Hoewel we dus quantitatief over den druk in de straal niets kunnen zeggen, zien we uit de proef, dat het drukminimum toch aanwezig is.

Ook in de practijk der navigatie heeft men met de wet van Bernoulli te maken, bijv. bij het varen van schepen door kanalen.

Wanneer een schip door een kanaal vaart, dan stuwt het voor den boeg een hoeveelheid water op, die langs het schip naar achteren kan ontwijken. Vaart het nu dicht langs een oever, b.v. den linkeroever, dan zal aan dien kant door den nauweren doorgang het door den boeg weggestuwde water sneller stroomen, waardoor, op gelijke hoogte, de hydrostatische druk er kleiner zal zijn. Dit heeft tengevolge, dat het schip naar den linkeroever gedreven wordt. Dat is de „zuiging" van den wal.

De invloed van den wal op de strooming is, dat het water er uitsluitend langs kan, en de snelheid geen component loodrecht daarop heeft. Wij willen ons nu eens aan de andere zijde van den wal, inplaats van het land, een watermassa denken, met een schip erin, en met bewegingen, die precies het spiegelbeeld zijn van de in het kanaal voorhandene. Ter plaatse van den wal hebben wij dan aan weerszijden stroomsnelheden precies in het symmetrievlak tusschen het schip en zijn spiegelbeeld. De wal hoeft nu geen dienst meer te doen om het water te keeren, als wij hem wegdenken zal het water den tegendruk ontmoeten van zijn spiegelbeeld. Met deze spiegel-bespiegeling geraken wij tot het geval van twee gelijke en evenwijdig varende schepen, waarbij rondom een der schepen dezelfde strooming plaats vindt als om ons langs den wal varend schip. Men gevoelt, dat elk der schepen de achterwaartsche waterstrooming die het andere omgeeft, zal versterken, doch in de grootste mate daar, waar het zelf dichterbij is. Aldus ziet men in dat tusschen de schepen, of wel tusschen ons schip en den wal, een sterkere stroom staat dan aan de van den wal gekeerde zijde.

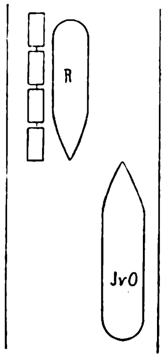


Fig. 14.

Ter illustratie kunnen we denken aan de aanvaring, die eenigen tijd geleden heeft plaats gevonden in het Noordzeekanaal. Van den kant van IJmuiden kwam een sleep naar Amsterdam. Uit zee kwam de „Reggestroom" en uit Amsterdam de „Johan van Oldenbarneveldt".

Toen de Reggestroom de sleep vrijwel voorbij was, draaide zij plotseling naar 't midden en voer de Johan van Oldenbarneveldt aan.

We kunnen ons nu voorstellen dat het volgende gebeurde: Toen de boeg van de Reggestroom den sleep voorbij was, ontstond er aan den rechterkant een hooger druk tengevolge van het voor den sleep opgestuwde water, dat niet weg kon. Rechts van de plecht van het schip echter was, tengevolge van de snelle strooming tusschen den wal en de sleepbakken, en tusschen deze en Reggestroom een lage druk. De Reggestroom zwenkte hierdoor naar 't midden van het kanaal.

Tot nu toen hebben we de *wrijving* verwaarloosd. Dit mag echter niet altijd, er zijn gevallen waarbij we wel degelijk rekening met de wrijving moeten houden. Ter illustratie kan bijvoorbeeld het volgende proefje dienen. Wanneer we twee vlak geslepen plaatjes hebben en we leggen ze op elkaar, dan blijft, als we het bovenste optillen, het andere er een poosje aan hangen, alsof het eraan vast kleefde, voor het er af valt. (Fig. 15).

Dit komt, doordat het, tengevolge van de wrijving, eenigen tijd duurt, eer de lucht door de nauwe spleet, gevormd door de randen van de plaatjes, naar binnen heeft kunnen stroomen.

Dat het onderste plaatje niet aan het bovenste geplakt zit, kunnen we laten zien, door de plaatjes scheef te houden, waarna het onderste dadelijk langs het bovenste naar beneden glijdt en er afvalt. Aan dit snelle glijden is tevens te zien, dat de wrijvingscoëfficiënt of viscositeit, bij lucht zeer klein is.

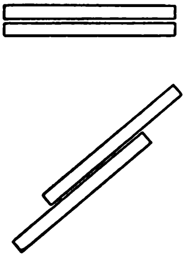


FIG. 15.

Er zijn ook stoffen met een groote viscositeit, vloeistoffen zooals bijvoorbeeld stroop en dikke olie toonen zeer duidelijk in haar taaiheid de inwendige wrijving. Ook kent men verscheidene schijnbaar vaste stoffen, die eigenlijk vloeistoffen zijn, maar met een zeer groote coëfficiënt van inwendige wrijving (bijv. lak, pik, kit, asfalt).

Hangen we aan een staafje van een dezer laatste stoffen een gewicht, dan zien we na een poosje, dat het uitgerekt is.

Wij willen thans niet te lang stilstaan bij deze viscositeit, omdat de gevallen, waarin deze de hoofdrol speelt, — bij strooming namelijk door nauwe buizen en nauwe spleten, zooals wij die tusschen as en asblok hebben, — in deze voordrachten niet meer ter sprake zullen komen. De gewone vloeistoffen, water en lucht, waarin onze schepen en machines zich bewegen, hebben een zeer geringe viscositeit, en de inwendige wrijving is slechts middellijk betrokken bij den weerstand, dien bewegende lichamen daarin ondervinden. Het zijn voornamelijk de opgewekte onregelmatige wervelbewegingen, de turbulenties, die een tegendruk tegen de beweging in het leven roepen. Daarbij is de directe wrijving meer aanleiding toe, dan rechtstreeksche oorzaak van den hydrodynamischen weerstand. Het door de lichamen verloren arbeidsvermogen wordt niet, als bij wrijving, aanstonds in warmte omgezet, doch in energie van wervels en watergolven, die ver weg kunnen zwerven eer zij, en dan tenslotte door wrijving, eindelijk zijn gedoofd en uitgestorven.

III. Wervels.

Aan de hand van enkele proeven willen we thans de eigenschappen van wervels eens nagaan.

Mooie wervels kunnen we krijgen, door rook te brengen in een kist, die in een zijwand een rond gat heeft en waarvan de tegenoverliggende zijde bespannen is met zeildoek.

Slaan of drukken we tegen het zeildoek, dan komt er een rookwervel uit het gat en wanneer we dien in den lichtbundel van een projectielantaarn laten loopen, dan is hij mooi te volgen. Met behoud van zijn grootte en cirkelvorm loopt hij voort in een richting loodrecht op het vlak van zijn ring, sneller of langzamer naar gelang van de kracht waarmede hij uit de kist werd gestooten.

De luchtbeweging in een wervel is zoo sterk, dat we een kaars, die op eenigen afstand geplaatst is, met een goed gerichten werve kunnen uitblazen.

Terwijl we bij een rond gat mooie ronde rookringen zien, die zich ongestoord voortbewegen, zien we bij een ellipsvormig gat wervels, die geen cirkelvorm meer hebben en ook niet zoo kalm voortloopen. De lange as heeft nu eens deze, dan weer die richting. Eigenlijk kunnen we niet eens van een lange as spreken, want de wervels blijven niet meer plat.

We zullen nog enkele eigenschappen van wervels noemen. Van louter meetkundig-kinematischen aard is de stelling, dat elke wervel in zichzelf gesloten is of eindigt aan een begrenzingsvlak van de vloeistof.

Voorts: indien er geen wrijving was, zouden de wervels altijd blijven bestaan. Deze stelling leidde Lord Kelvin tot de hypothese, dat atomen dergelijke wervels zouden zijn in een wrijvinglooze middenstof, den aether.

Vervolgens: de werveldraden worden door de vloeistof meegenomen: zij volgen de beweging van de vloeistof ter plaatse waar zij zich bevinden. Daaruit kunnen we het voortloopen der wervels verklaren. Wanneer we eens een doorsnede van een rookring beschouwen en eerst naar het rechterdeel kijken, dan merken we op, dat dit zich in het stroomingsveld bevindt, dat het linkerdeel omgeeft. Rondom de kern van de werveldraad, waar de vloeistof om een as wentelt, sluit zich een gebied aan, waar de vloeistof, zonder dat er een discontinue sprong in de snelheid optreedt, gaandeweg langzamer en langzamer rondstroomt, hoe verder men van den eigenlijken werveldraad afkomt. Dit stroomingsveld nu, voorzoover het bij het linkerdeel van den wervelring aansluit, voert het rechterdeel naar boven. Maar omgekeerd gaat tengevolge van het veld van het rechter deel het linker eveneens naar boven.

Dit is met alle deelen het geval; de heele wervel zal zich dus naar boven verplaatsen.

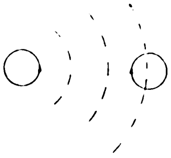


Fig. 16.

Is de wervel cirkelvormig, dan gaan alle deelen even snel. Hebben we daarentegen een ellipsvormigen wervel, dan gaan de deelen aan de einden van de korte as het snelst, die aan de einden van de lange as het langzaamst. Vandaar de eigenaardige worstelende kronkelingen die zoo'n wervel bij zijn, overigens recht vooruitgaande, beweging vertoont.

Tengevolge van de wrijving blijven de wervels niet steeds bestaan. De werveldraden diffundeeren langzamerhand. We kunnen dit o. a. zien aan het rookspoor, dat de rookwervels achterlaten. Er laten stukjes van den wervel los. De wervel wordt tengevolge hiervan zwakker, gaat daardoor langzamer loopen en sterft tenslotte langzamerhand uit.

We zullen nu eens nagaan, wat er gebeurt als er twee wervels zijn en zullen beginnen met het geval dat de eene wervel den anderen achterhaalt.

De bewegingen die ze tengevolge van elkaars stroomingsvelden ondervinden, zijn in de figuur aangegeven. A_1 blijft achter bij A_2, B_2 bij B_1.

De wervels zullen tengevolge van den schuinen stand, dien ze nu krijgen, uit elkaar gaan loopen.

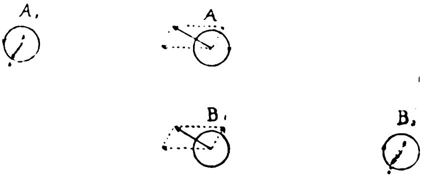


Fig. 17.

We zien dan ook werkelijk, dat als een wervel een anderen inhaalt, ze elkaar ontwijken.

Komen ze precies achter elkaar aan, dan kan het wel gebeuren, dat de een door den ander heen kruipt. De achterste verwijdt den voorsten, die hierdoor langzamer gaat loopen, want het stroomingsveld wordt zwakker naarmate we op grooter afstand van de werveldraad komen. Omgekeerd wordt de achterste wervel door den voorsten vernauwd en dus versneld. (Fig. 18).

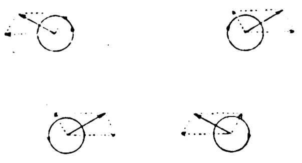


Fig. 18.

Bij een ontmoeting zien we iets anders gebeuren. Denken we ons eens, dat er twee gelijke wervels elkaar precies tegemoet komen. Midden tusschen deze twee bevindt zich in dat geval een symmetrievlak. Aan weerszijden van dit vlak vinden we op gelijken afstand daarvan verwijderd en recht tegenover elkander steeds punten met t.o.v. het vlak gespiegelde snelheden, d. w. z. de componenten loodrecht op dit vlak zijn tegengesteld gericht. Daar de stroomingen aan weerszijden van dit symmetrievlak t.o.v. dit vlak volkomen gelijk zijn, zal dit vlak ook steeds symmetrievlak blijven. De vloeistofdeeltjes, in het symmetrievlak gelegen, zullen geen snelheidscomponent loodrecht op het vlak kunnen hebben. Zij bewegen zich blijvend in het symmetrievlak. In de figuur is duidelijk te zien, dat de wervels in elkaars stroomingsveld verwijd worden. Het is, alsof de wervels op een onzichtbaren wand tusschen hen in stuiten. Dit vlak is het symmetrievlak.

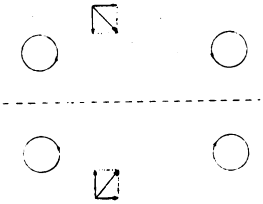


Fig. 19.

Wanneer we dit symmetrievlak vervangen door een vasten wand, dan kunnen we hetzelfde verwachten. Immers, aan den vasten wand is er geen beletsel voor een strooming langs den wand, precies als langs het symmetrievlak, terwijl de wand de loodrechte snelheidscomponent noodzaakt te verdwijnen, wederom juist zooals dit aan het symmetrievlak het geval is.

Inderdaad zien we dan ook bij uitvoering van de proef den rookwervel zich verwijden.

Voor den wand kunnen we een glazen plaat nemen. Het licht van de projectielantaarn komt hierdoor heen, zoodat we den wervel nog kunnen volgen. Dit is tevens ook de beste manier om de verwijding zichtbaar te maken, want het is heel lastig om twee gelijke wervels juist naar elkaar toe te laten loopen. Hier wordt inplaats van den tweeden wervel het spiegelbeeld van den eersten gebruikt, zooals dat in den vasten wand gespiegeld zou worden.

Ook in vloeistoffen kunnen we de wervels goed laten zien. Zoo kunnen we in een kopje thee als er een paar melkdruppels in zijn, met een lepeltje al heel duidelijke wervels maken. Tengevolge van de vrij snelle draaiing van de vloeistof en de daarmee gepaard gaande middelpuntvliedende kracht, zien we de uiteinden van den werveldraad aan het oppervlak als putjes. Telkens zien we twee bij elkaar behoorende „putjes" met tegengestelde draaiing. Dit zijn de twee uiteinden van eenzelfden wervel.

In water kunnen we de wervels goed zichtbaar maken, door er wat aluminiumpoeder op te strooien. Voor de demonstratie kunnen we weer denzelfden bak met glazen bodem gebruiken als vroeger voor de stroomlijnfiguren, en met den spiegel het schaduwbeeld (zie fig. 5) op den wand werpen.

Daarmede zijn weer dezelfde proeven te herhalen als wij met de rookwervels deden. Ook kunnen we nu de werking van twee tegengestelde wervels aan de volgende proef zien.

Zet men een metaalplaatje dwars op zijn oppervlak in beweging, dan maakt zich van zijn rand een wervelring los, en er ontstaat achter het plaatje een zogstroom (fig. 20, links). Zet men dan het plaatje plotseling stil, dan botst die zogstroom ertegen op, en dat veroorzaakt aan den rand opnieuw een wervelring, maar thans met een wervelrichting, tegengesteld aan die van den vorige (fig. 20, midden). De twee wervelringen bevinden zich vlak bij elkaar, en zijn naar elkaar toe gericht. Zoodra zij onder elkanders invloed komen, zien we weer bij beide een snelle verwijding (fig. 20, rechts.

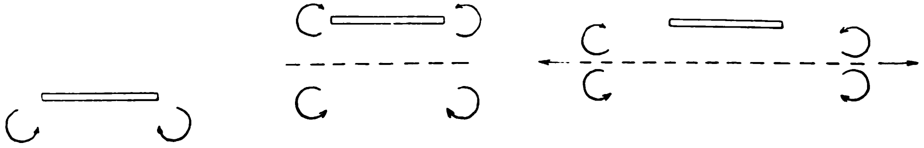


FIG. 20.

We kunnen hier in onzen bak ook goed het verschil zien tusschen een wervel en de wervelvrije circulatie, die hem omgeeft. Buiten den wervel worden de aluminium deeltjes alleen maar rondgevoerd. Er binnen draaien ze tevens zelf nog rond.

Van deze vloeistofbewegingen kunnen we theoretisch een goed denkbeeld krijgen door een vloeistofvierkantje te beschouwen. Bevindt het zich buiten den wervel, in een gewone circulatie, dan wordt het scheef getrokken, terwijl de diagonalen in eerste benadering hun richting behouden. Binnen den wervel draaien ook de diagonalen rond. Binnen de wervelbuis neemt de snelheid naar de peripherie toe in evenredigheid met den afstand tot de wentelingsas. Buiten de wervelbuis neemt de snelheid naar de peripherie af. Buiten een lange rechte wervelbuis geschiedt die afneming omgekeerd evenredig met den afstand tot de wervelas.

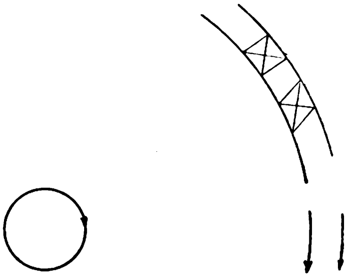


Fig. 21.

In dit opzicht kan men de werveldraden geheel vergelijken met draden, welke electriciteit geleiden, terwijl de vloeistofstroomsnelheden te vergelijken zijn met de magnetische veldsterkten, bij die electriciteitsgeleiding opgewekt.

IV. Golven.

Een andere belangrijke bewegingswijze, die we nu eens zullen bekijken, is de golfbeweging. Voorloopig zullen we ons alleen bezighouden met zulke golven, waarbij het water van de oppervlakte tot den bodem toe in beweging is, de z.g. *kanaalgolven*. Om een voorbeeld te hebben, kunnen we ons eens denken, dat in IJmuiden de spuiriolen der groote sluis geopend worden, waardoor de sluiskolk volloopt. De daardoor in het kanaal ontstane plaatselijke niveauverlaging plant zich voort in de richting van Amsterdam. We krijgen een voortloopende golf in het kanaal, waarbij alle deeltjes achtereenvolgens deelnemen aan de beweging. Terwijl de inzinking zich voortplant, gaan de waterdeeltjes zelf niet zoo ver van hun plaats. We zien hier weer het verschil van de beweging van den vorm en van de stof.

Een ander voorbeeld van een kanaalgolf levert ons de getijdebeweging, waarbij zich een vloedgolf uitbreidt, die gevolgd wordt door een ebdal. De snelheid, welke van de diepte afhangt, kan zeer groot worden.

Uit de wet van BERNOULLI (§ 3), is de snelheid c van kanaalgolven te berekenen.

We vinden dan

$$c = \sqrt{g\,h},$$

waarin h de diepte is en g de versnelling van de zwaartekracht. Bij de afleiding van deze formule is aangenomen, dat de hoogte der golven klein is t.o.v. de diepte van het water. Deze snelheid is gelijk aan de door een steen verkregene, die van een hoogte $^1/_2\ h$ naar beneden valt.

Ook in 't laboratorium is deze betrekking op de proef te stellen. Hiertoe vullen we een bak met water, tillen hem aan één kant een beetje op en zetten hem weer neer. Er is dan een heen en weer loopende kanaalgolf ontstaan.

Ter illustratie kunnen we de volgende getallen geven, waargenomen bij een bak van 80 cm lengte, die tot verschillende hoogten gevuld werd, waarna de tijd opgenomen werd, dien de golf noodig had om tien maal heen en weer te loopen. Die tijd is omgekeerd evenredig met de voortplantingsnelheid. Hij moet dus omgekeerd evenredig met den wortel uit de diepte zijn.

Bij een diepte van 10,0 cm vinden wij een tijd 15,4 sec, bij 14,0 cm 13,6 sec. Uit deze cijfers is al te zien, of voldaan wordt aan $t \sqrt{h} =$ constant, waarin t de tijd en h de diepte is.

Wij maken een grafische voorstelling. Op de eene as zetten wij de waarde uit van den looptijd voor de golf; op de andere de omgekeerde waarde van den wortel uit de waterdiepte. Indien er een evenredigheid bestaat, moeten de punten die de waarnemingen bij verschillende dieptes weergeven, op een rechte lijn liggen. Inderdaad zien wij, dat de juistgenoemde waarden goed in de lijn liggen met enkele te voren gemeten waarden voor T en h, n.l. 1,10 sec bij 25,2 cm waterdiepte en 1,74 sec bij 7,9 cm waterdiepte (Fig. 22)[1].

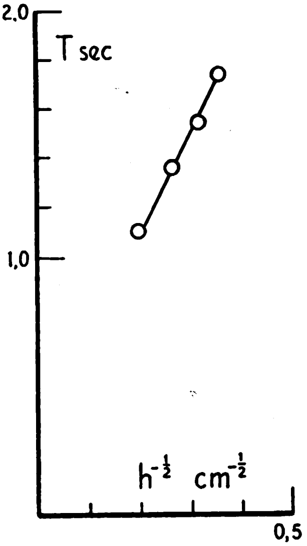


Fig. 22.

Een toepassing van de kanaalgolven komt te pas bij de berekening van de getijdebeweging in het Zuiderzeebekken.

De tijd, dien een binnenkomende vloedgolf noodig heeft om van de zeegaten naar de Geldersche kust te loopen en weer terug, is iets kleiner dan de tijd tusschen twee opvolgende vloedgolven.

De terugloopende golf werkt daardoor de nieuw aankomende golf nog tegen, zoodat er door de zeegaten niet zooveel water stroomt als zonder deze tegenwerking het geval zou zijn. Nu is het paradoxaal aandoende resultaat der berekeningen geweest, dat, wanneer de afsluitdijk Wieringen-Zurig gereed is, en de binnenkomende vloedgolf dus veel sneller weer weg is, er ongeveer $^1/_3$ meer water door de zeegaten zal stroomen, dan zonder dijk.

Uit de formule hebben we al gezien, dat de golven sneller loopen naarmate h grooter is. Zoo loopen de vloedgolven in de ondiepe

---

[1] Dat de lijn niet door den oorsprong gaat is hieraan te wijten, dat in den zeer smallen bak de wanden te dicht bij elkander staan. Behalve de wrijving oefent daardoor de capillariteit nog een invloed, daar de meniscusrand op het glas zich te nauwernood verplaatst. Deze capillariteit verkort den schommeltijd in meerdere mate naarmate er minder water in beweging verkeert, d. i. bij geringere diepte.

Zuiderzee veel langzamer dan in de Noordzee gelijk ook blijkt uit het kaartje, dat de waarnemingen weergeeft.

Dit verschil in snelheid bij verschillende *h* kunnen we ook duidelijk waarnemen, als we aan het strand de golven zien aankomen.

Wanneer ze onder een zekeren hoek met het strand hierop toeloopen, dan zal het deel, dat het dichtst bij het strand is, dat zich dus in het ondiepste water bevindt, langzamer gaan loopen dan de rest. De golven zwenken hierdoor en komen tenslotte evenwijdig met het strand aan.

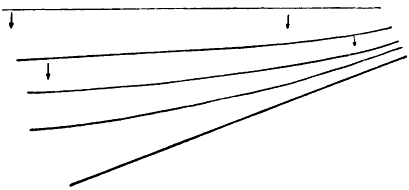


Fig. 23.

Tengevolge van de kleinere snelheid zien we ook de golflengte kleiner worden.

Wanneer de golven dicht bij het strand komen, dan wordt ook het hoogteverschil tusschen golfberg en golfdal belangrijk: de golfbergen gaan vlugger loopen dan de golfdalen en de golven slaan tenslotte om. Dit is de branding. De golven hebben na het omslaan een geheel ander uiterlijk gekregen dan ze oorspronkelijk hadden. Ze vormen waterwallen, die van het eene naar het volgende waterterras oprijzen, en waarlangs steeds water schuimend afvalt.

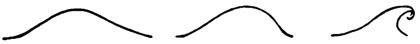


Fig. 24.

Bij de in het Fransche en in het Engelsche Kanaal mondende rivieren komt, eveneens tengevolge van dit snelheidsverschil, de vloedgolf als een watermuur naar binnen: de Engelschen noemen dit „bore". Deze is van het type van de brandingsgolf na de breking.

Ook in de Indische banjirs speelt deze factor een rol.

In de vorige bladzijden hebben we golfbewegingen beschouwd, waaraan alle waterdeeltjes, tot aan den bodem, deelnamen.

Nu zullen we eens golven bekijken, die hoofdzakelijk beperkt zijn tot de *oppervlakte*. Als de golflengte niet groot is ten opzichte van de diepte, dan treffen we namelijk deze bewegingswijze aan. In de diepte is het water nu veel minder in beweging dan bij de kanaalgolven.

Evenals de kanaalgolven kunnen we ze weer in een bak met water teweegbrengen en projecteeren. We bewegen dan in een smalle diepe bak met glazen wonden een roerder heen en weer. Als roerder kunnen we een plankje gebruiken dat tot den bodem reikt en dat we dan van boven (eventueel mechanisch) heen en weer bewegen. Om geen last te hebben van terugkaatsingen, die aanleiding geven tot staande golven, laten we de golven doodloopen op een „strandje”, een met geribbeld fluweel bekleed plankje.

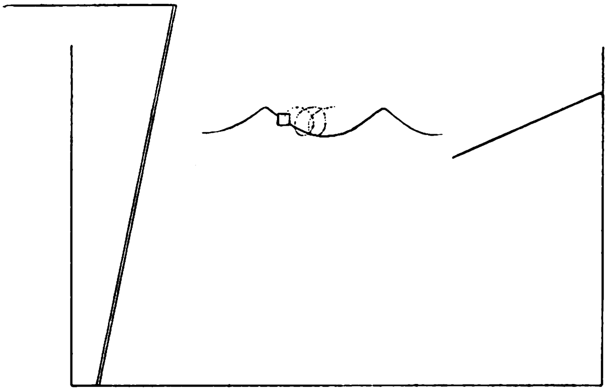


Fig. 25.

Door een draadje wol of een stukje kurk in het water te werpen, zien we, dat de voornaamste beweging van de waterdeeltjes een *cirkelbeweging* is.

Hiervan kunnen we gebruik maken bij de afleiding van de formule voor de voortplantingssnelheid. Deze is nu niet onafhankelijk van de golflengte. Ze wordt bepaald uit de volgende formule:

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi C}{\varrho\lambda}}.$$

Hierin is g de versnelling der zwaartekracht, λ de golflengte, C de capillariteitsconstante en ϱ de dichtheid van de vloeistof.

Het eerste stuk is afkomstig van de zwaarte van de golf en treedt op den voorgrond bij grootere golflengten. Het laatste stuk komt van de capillaire krachten en speelt vooral een rol bij kleine golflengten.

Raken we een wateroppervlak even aan, dan zien we een systeem ringen ontstaan, dat zich verwijdt. Tegelijkertijd zien we, dat de golfjes in dat systeem zich nog sneller verwijden, dan de golfband als geheel. Aan de binnenzijde van den band ontstaan ringen, die den band doorloopen, in het midden hun grootste sterkte bereiken en aan den buitenkant weer verdwijnen. We moeten hier dus onderscheid maken tusschen twee dingen, de golfrimpels die met de „*phasesnelheid*" voortloopen en de band die zich met de „*groepsnelheid*" voortplant.

De bovengenoemde formule voor de voortplantingssnelheid gaat uit van de onderstelling, dat alle golven denzelfden vorm hebben, die zich zonder einde periodiek herhaalt en die te beschrijven is door een sinusfunctie. Zij geeft de snelheid, waarmede een top, of waarmede een holte, of een andere „phase" eener golf zich voortplant, d. i. hetgeen men de phasesnelheid noemt.

In werkelijkheid echter zijn er in ons geval slechts een beperkt aantal golfbergen en -dalen, een band van eindige breedte beslaande. Wij mogen en moeten de golfbeweging evenwel beschouwen als te zijn samengesteld uit verschillende zuiver periodieke golven met een iets verschillende periode.

Wiskundig beteekent dit, dat de beweging voor te stellen is als een som van enkelvoudige sinusfuncties.

Wat we dan krijgen is te vergelijken met hetgeen er gebeurt, als we twee stemvorken, die t.o.v. elkaar een klein beetje verstemd zijn, tegelijk aanslaan. We hooren dan zwevingen. Bij de samenstelling van twee golfstelsels met een iets verschillende golflengte krijgen we ook op sommige plaatsen een sterkere, op andere een zwakkere beweging. Dit zijn de golfgroepen. Onze golfband nu is te vergelijken met zoo'n zwevingsgroep.

We zullen eens nagaan hoe groot de voortplantingssnelheid van zoo'n groep is. We kunnen onze taak ook zoo formuleeren: Hoe vlug moeten we loopen, opdat we steeds in het gebied zijn, waar de twee golfstelsels elkaar versterken? We moeten daartoe zoo hard loopen, dat ons van beide stelsels steeds evenveel golven inhalen. Stel, dat we, om dit te bereiken, met de snelheid U moeten loopen. Wanneer we de voortplantingssnelheden der beide stelsels c en c^1 noemen, en de golflengten λ en λ^1, dan is het aantal golven van het eene stelsel, dat ons per sec inhaalt, $(c - U)/\lambda$ en van het andere $(c^1 - U)/\lambda^1$.

Opdat U de groepsnelheid zij, moet gelden:

$$\frac{c - U}{\lambda} = \frac{c^1 - U}{\lambda^1}.$$

waaruit volgt:

$$U = \frac{\lambda^1 c - \lambda c^1}{\lambda^1 - \lambda}.$$

Wanneer we met groote oppervlaktegolven te maken hebben, zoodat we den invloed der capillariteit kunnen verwaarloozen, dan kunnen we voor c invullen $\sqrt{g/2\pi}\,.\,\sqrt{\lambda}$.

Er komt dan:

$$U = \sqrt{\frac{g}{2\pi}}\ .\ \frac{\sqrt{\lambda\lambda^1}}{\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda^1}}$$

Zijn nu verder λ en λ' ongeveer aan elkaar gelijk, dan gaat de formule over in

$$U = {}^1/_2\, c.$$

Hebben we daarentegen met korte, met capillaire golfjes te doen, dan kunnen we invullen $c = \sqrt{2\pi C/\varrho\lambda}$.

Als we dit in de formule zetten en weer $\lambda = \lambda^1$ nemen, dan krijgen we deze keer

$$U = {}^3/_2\, c.$$

Van de lengte der golven hangt dus af of hun groepssnelheid grooter of kleiner is dan de phasesnelheid.

We kunnen dit verschil heel aardig zien aan het volgende voorbeeld. Wanneer zich iets over het water beweegt, dan zal zijn snelheid ook de phasesnelheid zijn van de golven die het tengevolge van de evenwichtsverstoring die het veroorzaakt uitzendt. Wanneer dit „iets” nu een schip is, dan gaan hiervan lange golven uit. De groepsnelheid is dan kleiner dan de phasesnelheid. We zien de golfbeweging dan ook achter blijven bij het schip. Ze is daar beperkt tot een V vormig gebied waarvan het schip de punt vormt.

Kijken we daarentegen naar een zwemmende eend, dan zien we hoe het water ervoor ook al in golvende beweging is. We hebben hier met korte golfjes te doen waarbij de groepsnelheid grooter is dan de phasesnelheid.

Golven komen in de natuur heel veel voor. Ze ontstaan dikwijls bij het langs elkaar strijken van twee lagen van verschillende dichtheid, hetzij vloeistoffen of gassen. We kunnen dit mooi zien, als we een buis waarin we zwavelkoolstof en water gedaan hebben, horizontaal houden en daarna laten hellen. De twee vloeistoflagen, die eerst rustig boven elkaar stonden, gaan nu langs elkaar strijken, daar de zwaardere zwavelkoolstof naar beneden wil. Nu is echter de bewegingswijze van twee vloeistoflagen langs elkaar met een plat grensvlak niet stabiel. Wij zien dan ook al spoedig een golfbeweging optreden, die zelfs weldra overgaat in een sterk turbulente beweging. Dit is heel goed te volgen door de groote brekingsindex van de zwavelkoolstof.

Hetzelfde gebeurt ook, als na den vloed het water weer uit een zwin van het strand wegstroomt. Het water vormt met het zand een soort drijfzand. Boven deze laag bevindt zich dan een laag water zonder zand. Glijden deze twee lagen over elkaar, dan komen er weer golfjes. Zoo ontstaan de ribbelingen, die we in een zwin vinden, als het water weg is.

Heel bekend is het verschijnen van golfjes en golven als de wind langs het water strijkt.

Weer op dezelfde wijze ontstaan de ribbels in de duinen, als de wind langs het zand strijkt.

Hetzelfde verschijnsel op kleinere schaal nemen we waar, als een geweer dicht boven het zand afgeschoten wordt. Voor den mond vinden we ribbeltjes in het zand.

Heel belangrijk is tenslotte in de atmosfeer het langs elkaar glijden van twee luchtlagen van verschillende dichtheid. Ook daar krijgen we weer een golfbeweging, die dikwijls duidelijk is waar te nemen, wanneer de onderste luchtlaag veel waterdamp bevat. Dan kan het gebeuren, dat de waterdamp condenseert bij het opstijgen en weer verdampt bij het dalen. De golfbergen teekenen zich dan af als wolken. Zoo ontstaan de evenwijdige wolkstrepen, die we dikwijls aan den hemel kunnen opmerken. In die wolken zien we niet steeds dezelfde stof, want de wolken groeien aan den eenen kant aan, terwijl ze aan den anderen kant weer opgelost worden. Het is de blijvende vorm die wij zien, en waar de lucht met het condenseerende en vervluchtigende water doorheenstroomt.

Wanneer de twee luchtlagen een groot snelheidsverschil hebben, dan is er veel kans, dat er wervels ontstaan, die zich als windhozen aan ons kunnen voordoen en, als ze sterk genoeg zijn, groote schade kunnen aanrichten, zooals voor eenige jaren in de ramp bij Borculo het geval was.

V. Draag- en stuwkrachten.

Wanneer we een plaatje op de in fig. 25 aangegeven wijze door het water trekken, dan ontstaan er wervelingen. De vloeistof aan het aanrakingsoppervlak met het plaatje krijgt een grootere snelheid dan de verder gelegene, doordat zij meegenomen wordt. Tengevolge hiervan ontstaan wervelringen die het plaatje, als het totaal ondergedompeld is, geheel omsluiten en, die, als het gedeeltelijk boven water is, aan de oppervlakte hiervan eindigen.

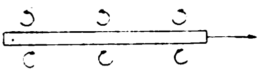


Fig. 25.

Denken we ons nu de plaat ringvormig omgebogen tot een cylindermantel en draaien we haar rond, dan zullen zich weer wervels vormen, evenals bij de rechte plaat (fig. 26).

Blijven we ronddraaien, dan wordt het binnendeel op den duur opgevuld met wervels die dan samensmelten tot een enkele wervelbuis, waarbinnen het water met eenparige hoeksnelheid roteert. Zoodra dit het geval is, zal het voor de overige waterbeweging geen verschil maken, of wij het gedeelte binnen den cylindermantel vervangen door vast metaal.

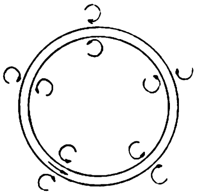


Fig. 26.

Nemen we dus in plaats van den ring een massieven cylinder, dien we weer ronddraaien, dan ontstaat een strooming, waarbij de werveldraden eindigen aan den onderkant van den cylinder, en als hij geheel ondergedompeld is, ook aan den bovenkant.

Indien we nu een kleine strooming langs den cylinder laten gaan, dan neemt deze de werveldraden mee, terwijl de aan den cylinder eindigende deelen daar blijven. Bij een half in het water gedompelden cylinder krijgen we dus een bundeltje werveldraden, die onder aan den cylinder hangen en een eindje stroomafwaarts aan de wateroppervlakte eindigen. Zoo'n werveldraad is in fig. 27 voorgesteld.

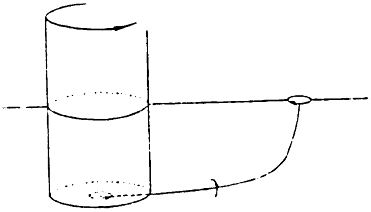


Fig. 27.

Hetzelfde krijgen we, als we den draaienden cylinder in het water verplaatsen, en dit is hetgeen wij inderdaad verwezenlijkt zien. Naast onzen waterbak zetten wij een verticale statiefstang, waaromheen een horizontale arm kan draaien. Deze arm draagt aan zijn einde een verticaal asje, de wentelingsas van een koperen, voor drie kwart ondergedompeld cylindertje, dat met een koord wordt gedraaid. Wij zetten het cylindertje in draaiing, en verplaatsen het met den draagarm een eindweegs door het water. De cylinder laat dan een groep werveldraden achter, die tengevolge van de inwendige wrijving dikwijls samenvloeien tot één geheel en een enkelen sterken wervel vormen.

De draaiende cylinder veroorzaakt in de omringende vloeistof een circulatiestrooming. Naar buiten werkt hij net als een wervel en omgekeerd werkt ook de vloeistof op den cylinder net eender als hij het op een wervel zou doen.

In 't algemeen worden werveldraden meegevoerd door den stroom. Met welke kracht moeten wij erop werken, teneinde ze op hun plaats te houden?

Blijkens de grondformules moet er daartoe een kracht uitgeoefend worden loodrecht op de wervelas en loodrecht op de stroomingsrichting. De omringende vloeistof zal omgekeerd op den stilgehouden werveldraad met een tegendruk werken, tegengesteld aan genoemde kracht, dat is dus wederom loodrecht op den werveldraad, en loodrecht op den vloeistofstroom.

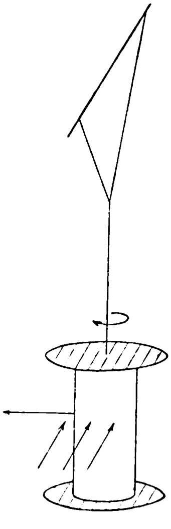


Fig. 28.

Wij merkten reeds op, dat de krachten op een draaienden cylinder werkende, overeen zouden komen met de krachten in de vloeistofstrooming door de omgeving op een wervelbuis uitgeoefend. Wij besluiten dus, dat ook op een draaienden cylinder, in een stroom geplaatst, een zijdelingsche kracht, loodrecht zoowel op den cylinder en als op de stroomrichting, zal worden uitgeoefend. Dit is met verschillende eenvoudige proeven aan te toonen. Om te beginnen kunnen we een kartonnen cylinder in het midden van zijn bovenvlak ophangen aan een koord, dat hoogerop vastgemaakt is aan twee, tot een V geknoopte koorden, die alleen een zijdelingsche verplaatsing toelaten (fig. 28). We gaan nu den cylinder om zijn as draaien, zoodat we het koord sterk tordeeren. Laten we hem daarna los, dan hebben we zoo een draaienden cylinder gekregen. Hij vertoont een zijdelingsche uitwijking, zoodra we er met een ventilator tegen blazen.

Een ander proefje is dit: We laten een papieren cylindertje van een hellend vlak rollen welks einde buiten den rand van de tafel waarop het opgesteld is, uitsteekt (fig. 29). Nadat het naar beneden gerold is, zet het, draaiende door de lucht vallende, zijn weg niet, zooals we verwachten, volgens een paraboolbaan voort, maar wordt het teruggedreven.

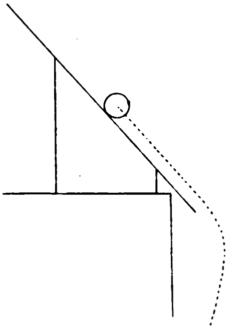


Fig. 29.

Wanneer we een kartonnen rol, in de goede richting om zijn as draaiend, wegwerpen, dan blijft zij eerst even zweven voor zij naar beneden valt. Dit wegwerpen kunnen we op de volgende manier doen. We rollen den cylinder in een „vlag” en ontrollen dezen dan, door den stok snel, en parallel, opzij te trekken.

Iets dergelijks is waar te nemen, als een tennis- of golfbal „met effect”, zooals men dat noemt, wordt weggeslagen.

Deze kracht in een stroom dwars op een draaienden cylinder, het MAGNUS-effect, heeft een toepassing gevonden in de door **FLETTNER** geconstrueerde rotorschepen, waar groote draaiende cylinders mast en zeil zouden vervangen.

Van het optreden eener resulteerende zijdelingsche kracht kunnen we ons ook op andere wijze rekenschap geven met behulp van de wet van BERNOULLI (fig. 30).

Wanneer we een circulatie hebben in de aangegeven richting, en daarbij nog een symmetrisch om den cylinder uitwijkende, in de verte evenwijdige strooming, dan zal deze laatste aan den bovenkant een circulatiesnelheid vinden in dezelfde richting, aan den onderkant een in tegengestelde richting. Boven is de resulteerende snelheid dus grooter dan beneden, met als gevolg, dat de druk er kleiner is dan aan den onderkant. Er werkt als resultante een kracht naar boven.

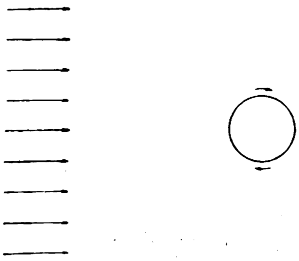


Fig. 30.

Hetgeen wij uit de voorgaande beschouwingen en proeven aan draaiende cylinders en daarlangs strijkende vloeistofstroomen hebben geleerd, is het essentieele voor de *draagkracht van vleugels* en draagvlakken, of van vliegers. Ook hier komt het erop aan, dat er tegelijk met de vloeistofstrooming langs den vleugel, ook een circulatiestroom is om den vleugel heen.

Het behoeft geen betoog, dat dezelfde draagkracht in werking komt, wanneer hetzij de vloeistof langs den vleugel stroomt, hetzij de vleugel zich met gelijke, doch tegengestelde snelheid door de stilstaande vloeistof beweegt.

Wij kunnen een vleugel rechtop door het stilstaande water van onzen bak trekken. Duidelijk zien wij dat er op de plaats van vertrek een wervel blijft liggen. Dit is de zoogenaamde *aanloopwervel*. Bij den aanvang der beweging zullen, evenals in een vorig geval wij dat zagen, aan weerskanten van den vleugel tegengestelde wervels gevormd worden, die met elkander samenhangen als deelen van dezelfde doorloopende werveldraden. Doordat de vleugel ietwat onsymmetrisch is, en ook ietwat scheef tegen de bewegingsrichting helt, zullen er aan de eene zijde meer wervels van den vleugel afspoelen dan aan de andere zijde. Met elkander vormen die den aanloopwervel, welken wij op de plaats van vertrek zien blijven liggen. De aanloopwervel blijft, onder water, door werveldraden verbonden aan de anders gerichte wervels, die door den vleugel met zich worden medegenomen, zoodat de circulatie

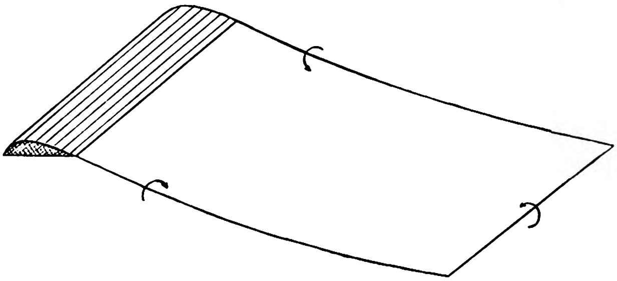


Fig. 31.

rondom den aanloopwervel gelijk is aan de rondstrooming, die men om den vleugel aantreft, en die te zamen met de langs-strooming verantwoordelijk is voor de resulteerende kracht op den vleugel.

Wij hebben ons dus bij een dragenden vleugel voor te stellen, dat van de uiteinden werveldraden uitgaan die hem verbinden met den aanloopwervel, en die met elkander verbonden worden door de werveldraden, welke vlak langs het oppervlak van den vleugel loopen, in de overgangslaag, in het z.g. laminaire gebied tusschen de door het vleugelvlak vastgehouden contactlaag en het gebied waar de vloeistof niet meer door het vleugeloppervlak meegenomen wordt. Wij kunnen ook gemakshalve zeggen, dat de vleugel zelf onderdeel is van een doorloopenden rechthoekigen wervel (fig. 31).

Zien wij goed toe, dan bemerken wij dat de omloopszin van dezen wervel dusdanig is, dat aan de binnenzijde van den wervel de snelheid overal naar beneden gericht is. Inderdaad moet dit zoo ook uitkomen. Immers, sinds het begin der beweging heeft de vleugel benedenwaarts op de lucht gedrukt. Hij moet dus een benedenwaartsche hoeveelheid van beweging hebben voortgebracht, en deze treffen wij aan in de gesignaleerde neerdaling van de luchtmassaas binnen den rechthoekigen wervel.

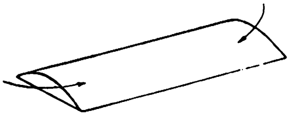


Fig. 32.

Onder den vleugel hebben we verhoogden druk, boven den vleugel een verlaagden druk. Het laat zich hooren, dat aan de zijkanten van den vleugel de lucht om den rand heen zal stroomen. Aan den bovenkant zal de strooming een component naar het midden, aan den onderkant daarentegen een component van het midden af krijgen. Is de vleugel gepasseerd, dan zullen deze transversale componenten, persisteerende, een wervellaag vertegenwoordigen. Dat beteekent, dat niet alleen van de zijkanten wervels naar achteren loopen, maar dat men achter den vleugel te maken heeft met een uitgebreid systeem van werveldraden uit den achterrand. De verdeeling van deze werveldraden hangt samen met de verdeeling van den opwaartschen druk over den vleugel. Zij wordt beïnvloed door den vorm van de zijkanten van den vleugel.

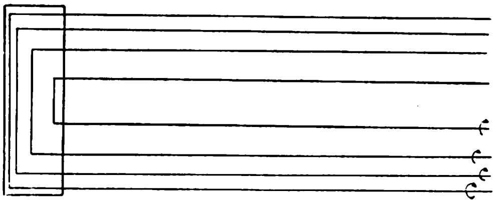


Fig. 33.

Bij de beweging van de bladen van een stuwschroef door het water treden in hoofdzaak dergelijke verschijnselen op als wij thans bij de draagvlakken besproken hebben. Ook hier is er noodzakelijk een circulatie rondom het blad, welke circulatie zich voortzet in een van het blad naar achteren loopende wervel, die niet recht kan zijn wegens de draaiende beweging, maar een schroeflijnvorm heeft. Soms is de werveling zoo sterk, dat het water scheurt en de wervelbuis inwendig hol is, zoodat men die schroeflijnwervels heeft kunnen fotografeeren. Ook vlak achter het schroefblad kan de druk zeer laag worden, zoo dat het water scheurt en er een vacuumholte komt. Het om den bladrand komende water krult zich dan met zoo groote snelheid om die holte heen, dat het, het schroefblad treffende, als met hamerkracht stukken daarvan af kan slaan. Dit aanbijten van het blad kent men als cavitatie door den cavitatiewervel. Het is het probleem der techniek door goeden vorm der schroefbladen de schadelijke cavitatiewervels te vermijden.

VI. Turbulente weerstand.

De grootste moeilijkheden bieden de vloeistofbewegingen, wanneer zij ongeordend zijn. Zoolang de beweging langs stationnaire stroomlijnen gaat, kan men met de berekening een heel eind komen, ook al zijn er golven en wervels. Maar indien de inwendige wrijving gering is — en hoe vloeibaarder de vloeistof, des te geringer is die viscositeit, — is de stationnaire stroom labiel. Het wil licht gebeuren, dat hij omslaat in een ongeordende strooming, waarbij de stroomlijnen gedurig en grillig wisselen, een strooming vol van *onregelmatige* werveling, die wij *turbulent* noemen. Het is het optreden van die turbulentie, dat de weerstanden tegen de beweging aanzienlijk verhoogt.

Het ontstaan van turbulente weerstanden en hoeveel het verschilt, of een stroom glad loopt dan wel met turbulenties, is te zien aan de volgende proef, dien we met het toestel van Van Marum doen kunnen.

We hebben daarbij een kolom, gevuld met water, dat onderaan wegstroomen kan door een zijbuisje. Als de kolom niet te hoog gevuld is, zoodat onder niet te grooten druk met matige snelheid het water door de zijbuis komt, dan zien we een regelmatige uitstrooming. Wel is waar is de strooming binnen het buisje niet wervelvrij, omdat aan den buiswand het water wordt vastgehouden, en in de hartlijn de snelheid het grootst is, maar de wervels blijven regelmatig in het gelid en de stroomlijnen zijn alle recht. De straal is rustig en heeft een glad oppervlak. Wordt er nu in de kolom water bijgeschonken, zoodat het oppervlak hooger komt en de druk grooter wordt, waardoor de vloeistof sneller uitstroomt, dan komt deze sterker wordende stroom tenslotte in het gebied van de turbulentie. De straal gaat nu wapperen. Bijwijlen spuit het water minder ver. De straal springt heen en weer tusschen twee parabolen. Dat is het gevolg hiervan, dat binnen het buisje het water het eene oogenblik glad stroomt, het volgende oogenblik met turbulentie. Dat verandert den weerstand zoo sterk, dat we deze weerstandsvariaties aan de veranderingen der uitstroomingssnelheid, die in het wapperen aan den dag komt, duidelijk kunnen zien.

Maken we het vloeistofniveau in de kolom nog hooger, dan stroomt het water steeds met turbulentie door het buisje; we krijgen nu weer een constanten straal, echter is dan het oppervlak van den straal niet meer glad, maar ruig. Laten we het water nu eenvoudig uitstroomen, zoodat de drukhoogte geleidelijk minder wordt, dan zien we de verschijnselen in omgekeerde volgorde. Soms schiet de straal opeens verder door; en naarmate de druk afneemt, geschiedt dit vaker, en op het laatst blijft de straal in de verst reikende zijner twee mogelijkheden. Ter demonstratie kunnen we de straal projecteeren op een doek, waar dan alle veranderingen duidelijk waar te nemen zijn. De turbulenties kunnen we ook aan den straal zelf zien. In den lichtbundel van de projectielamp zien we het oppervlak flonkeren, zoodra er turbulenties optreden. Anders zien we alleen maar een spiegeling in het gladde oppervlak.

De oude hydrodynamici kwamen voor een wonderlijke paradox te staan. De formules leerden pertinent, dat door een wrijvinglooze vloeistof verschillende lichamen, een bol of een platte schijf zich konden bewegen zonder weerstand te ondervinden. Terwijl theoretisch de mogelijkheid bestond een lichaam zonder noemenswaarden weerstand door een vloeistof te bewegen, bleek dit toch in de practijk niet te verwezenlijken te zijn. Niet alleen zijn er geen wrijvinglooze vloeistoffen, maar ook de bewegingsvorm is geheel anders dan die overeenstemmen kon met de theoretisch berekende. Men mag hier niet denken dat de beweging eener werkelijke vloeistof, wanneer men een grensovergang stelt naar algeheele wrijvingloosheid der vloeistof, zou overeenkomen met de beweging, die in een werkelijk strikt ideale vloeistof op zou treden.

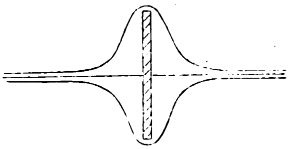


Fig. 34.

Bij de strooming om een vlakke plaat ontstaat theoretisch een stroombeeld als het in fig. 34 weergegevene. Er liggen daarbij aan den voor- en achterkant stuwpunten, waar de snelheid nul is (en de druk hoog), en ook verder zijn de snelheden vóór en achter symmetrisch ten opzichte van het lichaam. De druk moet dus aan beide zijden gelijk zijn, m. a. w. er werkt geen kracht op het lichaam. Zulk een wrijvings- en wervelvrije strooming heet *potentiaalstrooming*.

Het beeld, dat we in werkelijkheid hebben, is echter anders.

Er worden daar aan de randen wervels gevormd, die een weerstand tengevolge hebben.

Bij zeer langzame strooming is het beeld van de potentiaalstrooming wel te verwezenlijken zooals we in het begin (fig. 3) gezien hebben.

Het is nu uit momentopnamen gebleken, dat er ook bij snellere stroomingen *in 't begin* werkelijk een potentiaalstroom is.

Bij de geluidsgolven hebben we een snel van richting veranderende luchtbeweging, die daardoor steeds in dit beginstadium, d. w. z. turbulentievrij en nagenoeg wervelvrij blijft.

Bij een wervelvrije strooming om een scheef opgestelde plaat leert de theorie, dat er aan den voor- en aan den achterkant stuwpunten zijn, die excentrisch liggen. Daar die de plaatsen van hoogsten druk aangeven, volgt daaruit, dat bij die strooming op de plaat een resulteerend krachtenkoppel zal werken, hetwelk het plaatje loodrecht op de algemeene stroomrichting zal trachten te stellen.

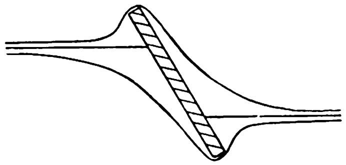


Fig. 35.

Hiervan heeft Lord Rayleigh gebruik gemaakt om een geluidsmeter te construeeren: aan een uiterst fijn draadje wordt een plat spiegeltje gehangen, en het draadje zoo gesteld, dat het verticale spiegeltje een hoek van 45° maakt met de richting waaruit de geluidsgolven komen. Deze zullen het spiegeltje doen draaien tot het aerodynamische koppel evenwicht maakt met het torsiekoppel in de ophangdraad.

Bij een luidspreker beweegt de lucht zich snel heen en weer. Ook hier hebben we nog te doen met een potentiaalstroom, ook om de hoeken, mits de bewegingen niet te sterk zijn. Het is niet moeilijk om met electrische middelen de geluidssterkte op te voeren. Dit loont echter niet meer, wanneer men aan de grens komt, waar de luchtstroomingen ophouden potentiaalstroom te zijn. In dat geval laten er wervels los, wat een verlies aan energie beteekent. Te sterk geluid wordt hierdoor misvormd.

Wij keeren terug tot de strooming rondom een plaat na de eerste oogenblikken waarin de beweging begon.

Nu laat zich de uitwerking der wrijving gevoelen. De wrijvingskrachten per cm^2 zijn evenredig met het snelheidsverval in de vloeistof. De evenredigheidsfactor is de coëfficiënt van inwendige wrijving. Deze is voor water klein, maar, doordat het snelheidsverval aan het lichaamsoppervlak, vooral bij bochten, groot is, kunnen de wrijvingskrachten nog een aanmerkelijke waarde krijgen, groot genoeg om aan het oppervlak wervels te vormen die, zoodra ze in den vloeistofstroom diffundeeren, meegespoeld worden en dan een „zog” vormen. De vorming van die wervels verbruikt veel energie, en zij zijn het, die nu de kracht veroorzaken, welke de beweging tegenwerkt en die we dus als weerstand ondervinden bij het bewegen van lichamen door de vloeistof.

Deze kracht neemt sterk toe, wanneer de wervels van het oppervlak gescheiden worden. Hoe dat in zijn werk gaat kunnen we ons als volgt indenken:

Tusschen het voorste en achterste stuwpunt glijdt, in de potentiaalbeweging, de vloeistof langs het lichaam, eerst sneller en sneller, dan weer langzamer tot in het tweede stuwpunt, waar de druk een maximum vertoont, de snelheid wederom nul is. De halverwege verkregen snelheid heeft de vloeistof noodig om tegen den druk naar het stuwpunt op te loopen. Wat zal er gebeuren wanneer door de remming langs het oppervlak de vloeistof snelheid inboet? Zij zal het stuwpunt niet meer kunnen bereiken. Integendeel zal van dat stuwpunt uit in de tegengestelde richting water langs het lichaamsoppervlak gedrongen worden, hetwelk den aankomenden geremden stroom met de wervels die hij draagt, van het oppervlak zal scheiden.

Doordat thans water van het achterste stuwpunt wegloopen kan, inplaats van dat het erheen stroomt, zal de druk er afnemen. Dat heeft twee gevolgen. Aan de vóórzijde zal het lichaam nog een stuwpunt hebben. Aan de voorzijde stroomt steeds ongestoord water toe. Daar zal de strooming nog niet veel van de wrijvingsvrije potentiaalstrooming verschillen. Het verminderen, of verdwijnen van den overdruk in het aanvankelijke stuwpunt aan de achterzijde zal dus tengevolge hebben, dat het lichaam een aanmerkelijken tegendruk ondervindt, die niet rechtstreeks door de wrijving bepaald wordt, maar het gevolg is van drukverschillen in den gewijzigden stroomingsvorm, waartoe de wrijving aanleiding was. — In de tweede plaats zal de vloeistof achter het lichaam aangezogen worden: het kielzog.

De tegenstroom die zich van het achterste stuwpunt uit tusschen lichaam en hoofdstroom gedrongen heeft, wordt op zijn beurt geremd door de wrijving aan het oppervlak, en daardoor kan opnieuw een tegen-tegenstroom ontstaan, en daarmee is nog geen eind gekomen aan het gewirwar der turbulenties (fig. 36).

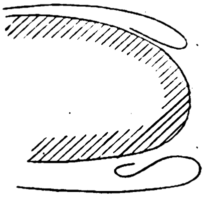


Fig. 36.

Teneinde de energieverliezen door deze turbulenties te vermijden, zoekt men lichaamsvormen die het loslaten van den stroom voorkomen, door zich aan te passen aan den hoofdstroom. Men zoekt het juiste „profiel". Men kan zich voorstellen, dat de turbulenties bestreden zullen worden, wanneer men het lichaam zelf de plaats laat innemen van het gebied, waarin de tegenstroomwervels hun spel spelen. Men kan bij een slecht profiel op de stroomlijn van den hoofdstroom letten, en daar waar zij het profiel loslaat, het profiel verbeteren door deze stroomlijn te volgen. Aldus komt men tastenderwijze tot de z.g. stroomlijnprofielen. Deze hebben van voren een stompen kop, aan de achterzijde loopen zij geleidelijk spits uit. Visschen hebben dergelijk lichaamsprofiel. Ook in de dwarsdoorsneden van vogelvleugels, en in de lengte-doorsneden van vogellijven ziet men zulke profielen. Aan modellen die men door met aluminiumpoeder bestoven water trekt, is het verschil duidelijk te zien.

Wanneer men een rechthoekig plaatje, of een cylinder snel door een vloeistof trekt, bestaat het kielzog uit zeer ongeordende wervels, links- en rechtsdraaiende, die zonder eenigen regel verdeeld zijn.

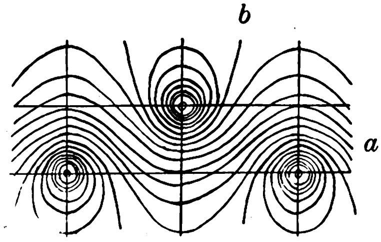


Fig. 37.

Wanneer echter de snelheid zeer gelijkmatig is, geschiedt dit loslaten niet op onregelmatige wijze, maar om den anderen komt er afwisselend een wervel links en een rechts, met gelijke tusschenpoozen.

De figuur, die de wervels aldus vormen, is de figuur van VON KÁRMÁN en van BESNARD, die gewoonlijk de „von Kármánlaan" genoemd wordt. Op eenigen afstand van het plaatje zien we de wervels, afwisselend links en rechtsdraaiend, waar de kielzogstroom zich tusschendoor slingert.

Wanneer we een cylinder, verticaal opgehangen, door de vloeistof trekken, dan krijgen we een von Kármánlaan. Bij het afwisselend ontstaan der wervels is er beurtelings links en rechts van den cylinder een grooter strooming, met als gevolg een wisselend drukverschil op zij. Om dit aan te toonen bevestigen we den cylinder aan een veer, die met bepaalde periode een schommeling toelaat in één richting. We bewegen den cylinder nu loodrecht op deze richting door het water. Bij een bepaalde snelheid kan de periode van het loslaten van de wervels overeenkomen met de periode van de slingering van den cylinder. In dat geval nemen we ook werkelijk waar, dat de cylinder in sterke schommeling geraakt, en al schommelend verder gaat.

Hier zien we de oorzaak van het zingen van telefoondraden wanneer de wind er langs strijkt. De trillingen staan in dat geval loodrecht op de windrichting; de wind werkt niet op de manier van een strijkstok.

Op dit verschijnsel berust ook de Aeolus-harp, bestaande uit een aantal snaren, die verschillende tonen kunnen voortbrengen. Strijkt de wind er langs, dan hooren we van een der snaren een toon, bij een andere windsterkte, weer een anderen toon van een andere snaar. De periode namelijk van de wervelwisseling wordt bepaald door de snelheid van den vloeistofstroom, en door de dikte van den cylinder. Het komt er bij de aeolusharp opaan, dat de wervelwisseling in resonantie komt met een der snaren.

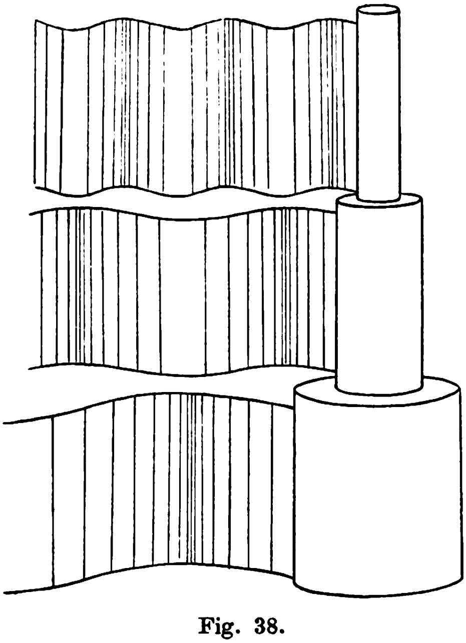


Fig. 38.

Wanneer de wind langs een vlaggestok strijkt, dan krijgen we weer hetzelfde. We kunnen hier de Von Kármánlaan a. h. w. afgeteekend vinden door de golflijn van de wapperende vlag.

Het gieren van den wind door boomtakken, het geluid van een zwiepend rottanstokje, zijn wederom voorbeelden van ditzelfde verschijnsel. Men voelt dit ook, wanneer men een stok door het water sleurt, of bij het baden de vlakke hand snel en loodrecht op de palm door het water beweegt.

De periode van loslaten hangt zooals reeds werd aangestipt, behalve van de stroomsnelheid ook van de dikte van den stok af. Het is uit een onderzoek van von Kármán gebleken, dat de figuur alleen bij een bepaalde verhouding van *a* en *b* stabiel is. (Fig. 37).

Hierin hangt *a* van de dikte af. Dat de periode van de stokdikte afhangt, is zichtbaar te maken, door aan een stok, die uit eenige cylindrische stukken van verschillende dikte bestaat (diameter resp. 5, 3 en 1 cM, fig. 38), lapjes van de allerlichtste zijde vast te maken, hem horizontaal op te hangen en heen en weer te laten schommelen. De wappering van het vlaggetje achter het dunne deel is dan veel sneller dan achter het dikke.

Wij zeiden reeds dat tusschen de afwisselende wervels zich een stroom slingert, die in de richting gaat van den cylinder, hoewel niet zoo snel. De hoeveelheid van beweging ontleent deze kielzogstroom aan de kracht, waarmede het lichaam den hydrodynamischen weerstand heeft overwonnen.

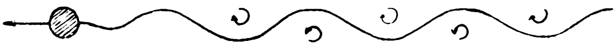


Fig. 39.

Slaagt men erin, zulk een reeks afwisselende wervels, maar nu in tegengestelden zin, teweeg te brengen, zoodat daar tusschendoor een vloeistofstroom van het lichaam weggaat, dan zal het lichaam een aan dien stroom tegengestelde hoeveelheid van beweging moeten opnemen, en het zal voortgestuwd worden. Dit is de wijze, waarop visschen zich voortbewegen. Bij het heen en weer slaan (soms wuiven) van de staartvin krult er om het achtereind daarvan een wervel. Niet anders doet het de gondelier, die met zijn spaan in het water wrikt.

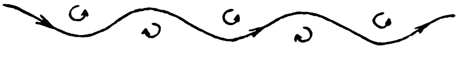


Fig. 40.

VII. Modelproeven.

De stroomingen waarbij turbulenties optreden, zijn wiskundig niet te behandelen. Als we er iets over te weten willen komen, moeten we onze toevlucht nemen tot het experimenteele onderzoek.

Nu kunnen we als regel het model niet zoo groot maken als het lichaam waarvan we iets te weten willen komen (men denke aan de strooming langs een schip, de krachten, die op een luchtschip werken). Daarom moeten we verkleinde modellen gebruiken en om nu de stroomingen vergelijkbaar te maken, passen we de methode der gelijkvormige vloeistofstrooming toe.

Stel bijv. dat we de golven willen afbeelden, die ontstaan wanneer een schip door het water vaart. We beschouwen alleen golven, die tengevolge van de zwaartekracht ontstaan, en laten de capillaire golfjes buiten beschouwing. We willen ze nu afbeelden door een verkleind model van het schip door het water te trekken. Wanneer wij zeggen „afbeelden”, dan bedoelen wij de verwezenlijking van een tweede geval, waarin alle afmetingen in éénzelfde verhouding staan tot de overeenkomstige in het eerste geval, waarin ook alle tijdpoozen in éénzelfde verhouding staan tot de overeenkomstige in het eerste geval, en waarin ook voor de overeenkomstige massaas, en krachten zulke vaste verhoudingen bestaan. De verhoudingen voor de verschillende categorieën van maten behoeven niet onderling dezelfde te zijn. Dat zou niet kunnen. Hoe groot moet bij zulk een gelijkvormige afbeelding de verhouding der snelheden zijn, als de verhouding der afmetingen h/H is?

Stel deze is v/V. De verhouding der versnellingen is dan v^2H/V^2h zooals uit de dimensieformules voor de snelheid $[l\,t^{1}]$ en de versnelling ($[l\,t^{-2}] = [(l\,t^{-1})^2 l^{-1}]$) volgt. We hebben hier nu te maken met de versnelling van de zwaartekracht, die in beide gevallen dezelfde is. Hieruit volgt, dat

$$v^2H/V^2h = 1 \text{ of}$$
$$v/V = \sqrt{h/H}.$$

Hebben we de afmetingen bijv. 100 maal zoo klein gemaakt, dan moeten we de snelheid 10 maal zoo klein maken.

Afgezien van modelproeven, kunnen we dit toepassen op de vergelijking van voortplantingssnelheden van oppervlaktegolven van verschillende lengte. De golflengten zijn hier de overeenkomstige afmetingen, en wij concludeeren, dat een 100 × langere golf zich 10 × zoo snel moet voortplanten, zooals ook door de formule op pag. 155 wordt bevestigd. Op kanaalgolven kunnen we deze beschouwing slechts toepassen, wanneer we ook de kanaaldiepte in dezelfde verhouding als de golflengte veranderen. Inderdaad is de kanaalgolf in een 100 × zoo diep kanaal ook 10 × zoo snel, volgens de formule op pag. 152.

Dergelijke modelproeven om den golfweerstand van scheepsmodellen te bepalen worden uitgevoerd in sleepbassins. Zulke bassins moeten flink groot zijn, want de afmetingen van het model moeten klein blijven ten opzichte van die van de watermassa.

In Wageningen is thans een bassin in aanbouw, dat een breedte van 10.5 m en een diepte van 5 m krijgt, bij een lengte van 160 m.

Het grootste sleepbassin bevindt zich in Hamburg.

Een ander geval is, dat we niet de krachten willen bepalen als gevolg van wat aan de oppervlakte aan golven gewekt wordt, maar de krachten die optreden als gevolg van de turbulenties in het water zelf om den scheepsromp, wanneer een schip door het water vaart, of in de lucht om een luchtschip, of om een draagvlak. Naast de traagheidskrachten treden dan de wrijvingskrachten op. Deze twee moeten nu in dezelfde verhouding veranderd worden.

De traagheidskracht wordt bepaald door het product van massa en versnelling. Hebben bepaalde overeenkomstige afmetingen de lengten l en l', zijn de soortelijke dichtheden ϱ en ϱ', is de verhouding van de massa's dus $\varrho l^3 : \varrho' l'^3$, en verhouden de versnellingen zich, gelijk in het voorgaande geval, als $v^2/l : v'^2/l'$, dan verhouden zich de traagheidskrachten als

$$\varrho l^3 \,.\, v^2/l : \varrho' l'^3 \,.\, v'^2/l = \varrho l^2 v^2 : \varrho' l'^2 v'^2 .$$

De wrijvingskracht per oppervlakteëenheid wordt bepaald door het product van de coëfficiënt van inwendige wrijving (μ) vermenigvuldigd met de verandering der snelheid per eenheid van lengte. De verhouding dezer wrijvingskrachten is in beide gevallen:

$$\mu \,.\, v/l \,.\, l^2 : \mu' .\, v'/l' \,.\, l'^2 = \mu\, v\, l : \mu' v' l'$$

De eisch tot het verwezenlijken van gelijkvormige strooming luidt nu, dat deze beide verhoudingen gelijk zijn:

$$\varrho l^2 v^2 : \varrho' l'^2 v'^2 = \mu v l : \mu' v' l'$$

of

$$\frac{\varrho\, v\, l}{\mu} = \frac{\varrho'\, v'\, l'}{\mu'} .$$

Dit is een oude formule, die al omstreeks 1880 door **Osborne Reynolds** is opgesteld. Te zijner eere heet dit getal het getal van Reynolds voor het onderhavige geval. Geldt het de stroom door buizen, dan neemt men voor l den diameter; voor elk geval neemt men een passende karakteristieke lengte.

Gebruiken we dezelfde vloeistoffen als in de practijk, hetgeen bij sleepbassins natuurlijk vrijwel altijd het geval is, dan blijft er over:

$$vl = v'l'.$$

Bij een 10 maal zoo kleine afmeting moet de snelheid 10 maal zoo groot zijn.

Dit is een heel ongemakkelijke eisch. Indien men slechts even denkt aan de groote snelheden, waarmede luchtschepen en vliegtuigen zich bewegen, dan is het duidelijk, dat men de strikte gelijkvormigheid bij een modelproef in een windtunnel niet kan verwezenlijken.

Het komt er dus nu op aan, te weten, hoe de krachten, die men meten wil, afhangen van het getal van Reynolds. Dat moet afzonderlijk onderzocht worden door dat getal van Reynolds opzettelijk te varieeren, proeven nemende bij verschillende snelheid, en met verschillende vloeistoffen, d. w. z. verschillende waarden van μ/ϱ, bijvoorbeeld met water en met lucht. Zulke proeven kunnen en moeten helpen bij de beoordeeling van welke waarde, welke mate van zekerheid aan de conclusies mag worden toegekend, tot welke de uitkomsten van modelproeven leiden.

Niet alleen op het gebied der scheepsbouwkunde wordt men tot modelproeven genoodzaakt. Op het gebied der waterbouwkunde zijn zij onontbeerlijk, en groote sommen heeft men reeds kunnen besparen door de verbeteringen in projecten waartoe modelproeven in het waterbouwkundig laboratorium te Delft leidden.

Voor modellen van luchtschepen en vliegmachines gebruikt men de reeds genoemde windtunnels.

Hierbij wordt door een krachtige schroef lucht gezogen door een enkele m^2 wijden koker. De vorm van den ingang, die zich naar binnen toe vernauwt, zorgt er met een ook in dien ingang aangebrachten ,,richter'' voor dat de binnenstroomende lucht zoo goed mogelijk wervelvrij is. Met zulke windtunnels werkt men hier te lande bij den Rijks Studiedienst voor de Luchtvaart te Amsterdam, en in het laboratorium voor hydro- en aërodynamica te Delft.

BEWEGINGEN IN VLOEISTOFFEN EN GASSEN.

INHOUD.

Bladz.

I. **Stroombeelden** 134
Stroomlijntoestellen. 135
Bron. Put. Bron-en-put. Dipool 137
Evenwijdige stroom en bron. Evenwijdige stroom en dipool . 138

II. **Druk en Wrijving** 140
Stijghoogte fontein 140
Constante som van druk-, stijg-, en plaatshoogte. Bernouilli . 142
Waterstraalluchtpomp. Zuigwerking. Zwevend balletje 143
Wrijving 145

III. **Wervels** 147
Wervelkist. 147
Eenvoudige stellingen. Loop van een wervel 148
Ontmoeting en beïnvloeding van twee wervels 149
Wervelvrije circulatie 150

IV. **Golven** 152
Kanaalgolven 152
Strandgolven. Branding. „Bore" en bandjir. 154
Oppervlaktegolven 155
Groepsnelheid van golven 156
Grenslaag-golven. Golfwolken 157

V. **Draag- en Stuwkrachten** 159
Circulatie om draaiende cylinders 159
Magnus-effect 160
Draagkracht van vleugels 162
Wervelstelsel om draagvlakken 162

VI. **Turbulente Weerstand**. 165
Optreden van turbulentie 165
Weerstandlooze potentiaalstrooming 166
Geluidsmeter van RAYLEIGH 167
Kielzog 168
Stroomlijnprofiel 169
Alterneerende kielzogwervels. Aeolus-harp. Vlaggen 169
Voortstuwing der visschen 171

VII. **Modelproeven** 172
Gelijkvormige vloeistofstroomingen 172
Getal van REYNOLDS 173

THÉORIE RELATIVISTE DE L'INTERACTION DE DEUX PARTICULES CHARGÉES *)

PAR

A. D. FOKKER.

Le but de mon travail a été de trouver une base théorique classique qui fournirait un point de départ certain pour rechercher les équations différentielles qui, dans la mécanique ondulatoire, pourraient représenter l'interaction de deux particules chargées. Jusqu'à présent les progrès de la mécanique nouvelle ont été atteints en traduisant en formules quantiques certaines formules empruntées à la mécanique classique des points matériels. Or, au point de vue de la théorie de la relativité, on a dû s'arrêter au problème d'un seul point matériel dans un champ extérieur donné, parce qu'on manque une théorie pour les mouvements d'un système de deux particules soumises à leurs actions mutuelles.

Rappelons l'équation relativiste, qui a été traduite en mécanique quantique par M. Dirac. Soit eV l'énergie potentielle d'un électron dans un champ électromagnétique, et soient $e\mathbf{a}_x/c$, $e\mathbf{a}_y/c$, $e\mathbf{a}_z/c$ les composantes de sa quantité de mouvement potentielle dans le même champ. Posons p_0, p_1, p_2, p_3 pour les composantes de l'énergie et de la quantité de mouvement totales (la dernière prise en signe contraire). Alors on aura une intégrale du mouvement dans l'équation qui exprime la constance de la masse scalaire de l'électron:

$$mc = K = \sqrt{\frac{(p_0 - eV)^2}{c^2} - \left(p_1 + \frac{e}{c}\mathbf{a}_x\right)^2 - \left(p_2 + \frac{e}{c}\mathbf{a}_y\right)^2 - \left(p_3 + \frac{e}{c}\mathbf{a}_2\right)^2}$$

Cette expression constitue la fonction centrale des équations canoniques. En mettant ds pour la valeur de l'intervalle à composantes dt, dx, dy, dz, les équations de mouvement s'écrivent

$$dt = ds\,\frac{\partial K}{\partial p_0}, \qquad dx = ds\,\frac{\partial K}{\partial p_1}, \quad \text{etc.}$$

$$dp_0 = -\,ds\,\frac{\partial K}{\partial t}, \qquad dp_1 = -\,ds\,\frac{\partial K}{\partial x}, \quad \text{etc.}$$

---

*) Communication devant l'Assemblée Générale de l'Union Internationale de Physique, à Bruxelles, 11 juillet 1931.

C'est de cette fonction centrale pour la masse que découle la théorie de M. Dirac. Il nous faudra retrouver des expressions analogues. Nous anticipons que pour les deux particules chargées il y en aura deux: c. à. d. une pour chacune des deux masses constantes.

Définissons le système dont nous traiterons. Les mouvements des deux particules pourront être représentées par deux lignes dans l'univers à (1 + 3) dimensions du temps et de l'espace.

Les instants de la première ligne seront désignées par l'époque, x^0, et la place x^1, x^2, x^3, et de même les instants de la seconde ligne seront désignés par y^i, ($_i = 0, 1, 2, 3$).

Il nous faudra établir une correspondance des instants sur les deux lignes de mouvement, et il faudra le faire d'une manière univoque et invariante par rapport aux transformations de Lorentz. Nous dirons que les instants correspondants seront liés par un rayon de lumière. Un signal lumineux, partant à un instant de la seconde ligne, atteindra la première dans un instant ultérieur, qui sera nommé l'instant correspondant. Si nous supposons les x^i et les y^i des lignes donnés en fonctions d'un paramètre nous disposerons de ce paramètre de manière qu'une valeur particulière de u marquera deux instants correspondants. Ainsi on aura toujours

$$R^2 = c^2 (x^0 - y^0)^2 - (x^1 - y^1)^2 - (x^2 - y^2)^2 - (x^3 - y^3)^2 = 0,$$

et en différentiant par rapport à μ nous en déduisons

$$(R.\dot{x}) = (R.\dot{y}),$$

en désignant par $(R\dot{x}.)$ le produit scalaire des vecteurs à (1 + 3) dimensions $R_i = x_i - y_i$ et $\dot{x}_i$, soit dx_i/du.

Les potentiels électromagnétiques retardés de Liénard, produits dans l'instant x^i, par la charge e'' en mouvement se trouvant à y^i, seront déterminés par

$$\frac{e''}{4\pi c} \frac{dy_i}{(R.dy)}.$$

Réciproquement, les potentiels anticipés en y^i, produits par la charge mouvante e' à x^i, sont déterminés par

$$\frac{e'}{4\pi c} \frac{dx_i}{(R.dx)}.$$

Comme je l'ai montré dans un travail antérieur ¹), on peut se servir de ces potentiels pour formuler le terme, qui, dans les principes de variation de la mécanique, correspondra à l'action mutuelle· C'est bien un terme

$$\frac{e'\,e''}{4\pi c}\;\frac{(dx.dy)}{(R.dy)} = \frac{e'\,e''}{4\pi c}\;\frac{(\dot{x}.\dot{y})}{(R.\dot{y})}\,du$$

dont on tirera les expressions pour les forces agissant entre les charges.

Il importe ici de remarquer que ce terme est bien symétrique par rapport aux vitesses des deux charges, parce qu'on peut remplacer à son gré le dénominateur $(R.\dot{y})$ par son équivalent $(R.\dot{x})$.

D'autre part, il nous fait admettre une asymétrie dans la direction, pour ainsi dire, de l'action, la première charge se mouvant sous l'action de potentiels retardés, provoqués par la seconde charge, et celle-ci aux prises avec les potentiels anticipés de l'autre. Je dois avouer qu'on y pourra trouver un inconvénient. C'est le prix que je propose de payer pour avoir un problème distinct et précis et pour être amené à des formules concises.

Les masses des particules seront m' et m''. Les intervalles définis par dx^i et dy^i seront appelés ds' et ds''. Les coefficients g_y, qui y figurent:

$$\begin{aligned} ds'^{\,2} &= \Sigma_{(ij)}\; g_{ij}\; dx^i\,dx^j = c^2 dx^{0^2} - dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} = \\ &= dx_0 dx^0 + dx_1 dx^1 + dx_2 dx^2 + dx_3 dx^3 \end{aligned}$$

seront constantes, et les produits covariants tels que

$$\Sigma\,(j)\;g_{ij} dx^j = dx_i,$$

seront désignés en mettant l'indice en bas.

Les équations de mouvement sont résumés dans le principe variationnel

$$o = \delta \int_1^2 \left\{ -m'c\,ds' - m''\,c\,ds'' + \frac{e'\,e''}{4\pi c}\;\frac{(dx.\,dy)}{(R.\,dy)} \right\} = \delta \int_1^2 N\,du.$$

Pour abréger nous posons

$$\frac{e'\,e''}{4\pi c} = \gamma\,,\quad \frac{1}{(R.\dot{x})} = \frac{1}{(R.\dot{y})} = \varrho.$$

Alors, on trouvera pour les composantes des énergies et des quantités de mouvement:

---

¹) Wederkeerigheid in de werking van geladen deeltjes, Physica, **9**, p. 33, 1929; Ein invarianter Variationssatz für die Bewegung mehrerer elektrischer Massenteilchen, Zschr. f. Phys. **58**, p. 386, 1929.

$$p_{xi} = \frac{\partial N}{\partial \dot{x}_i}\ , \qquad p_{yi} = \frac{\partial N}{\partial \dot{y}^i}\ , \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

C'est ici qu'on rencontre un trait particulier. Nous avons déjà dit qu'on est libre d'écrire $(R.\dot{x})$ ou bien $(R.\dot{y})$ au dénominateur du terme électromagnétique. Or, si l'on écrit $(R.\dot{x})$ on trouvera une contribution:

$$-\gamma\, \varrho^2\, (\dot{x}.\dot{y})\ R_i$$

à l'énergie et à la quantité de mouvement de la première particule. Si, au contraire, on écrit $(R.\dot{y})$ on trouvera la même contribution à l'énergie et à la quantité de mouvement de la seconde charge. Comme vecteur à $(1 + 3)$ dimensions cette partie a une direction suivant le rayon lumineux qui relie les instants correspondants des deux particules. Il n'y a point de raison pour l'attribuer à l'une plutôt qu'a l'autre. On pourrait l'attribuer, à la manière d'une radiation, au champ immatériel, à l'éther pour ainsi dire. Pourtant l'éther n'intervient pas dans notre intégrale d'action. C'est pourquoi nous distribuerons cette partie de l'énergie totale et de la quantité de mouvement totale parmi les deux particules dans une proportion, α, β, $(\alpha + \beta = 1)$, tout en nous réservant de fixer plus tard cette proportion comme bon nous semblera. Ainsi nous écrivons pour nos variables dynamiques

$$p_{xi} = m'c\, \frac{dx_i}{ds'} + \gamma\, \varrho\, \dot{y}_i - \alpha\, \gamma\, \varrho^2\, (\dot{x}.\dot{y})\, R_i\,, \qquad i = 0, 1. 2, 3.$$

$$p_{yi} = m''c\, \frac{dy_i}{ds''} + \gamma\, \varrho\, \dot{x}_i - \beta\, \gamma\, \varrho^2\, (\dot{x}.\dot{y})\, R_i\,.$$

Il s'agit de trouver des expressions qui donneront les masses scalaires m' et m'' en fonctions des coördonnées relatives et de ces variables dynamiques.

Si nous posons

$$m'c\, \frac{du}{ds'} = \mu', \qquad m''c\, \frac{du}{ds''} = \mu'',$$

nous aurons

$$m'^2\, c^2 = \mu'^2\, \frac{ds'^2}{du^2} = \mu'^2\, \dot{x}^2, \qquad m''^2\, c^2 = \mu''^2\, \dot{y}^2.$$

Recherchons donc $\dot{x}^2$ et $\dot{y}^2$ en fonction des p_x, p_y. Cette tâche est facilitée par le fait que le produit scalaire des deux parties, de p_{xi} et de p_{yi}, qui contiennent γ, c. à. d. qui découlent de l'action mutuelle, s'annulle. En formant p_x^2, (p_xp_y), p_y^2 nous n'aurons qu'à regarder $\dot{x}^2$, $(\dot{x}\dot{y})$ et $\dot{y}^2$.

$$\left(\frac{p_x}{\mu'}\right)^2 = \dot{x}^2 + (\dot{x}.\dot{y})\,\frac{2\gamma\varrho}{\mu'}\left\{\beta - \alpha\,\frac{\gamma\varrho}{\mu'}\right\} + \dot{y}^2\,\frac{\gamma^2\varrho^2}{\mu'^2},$$

$$\left(\frac{p_x.p_y}{\mu'\mu''}\right) = \dot{x}^2\,\frac{\gamma\varrho}{\mu''} + (\dot{x}.\dot{y})\left\{1 - \beta\,\frac{\gamma\varrho}{\mu''} - \alpha\,\frac{\gamma\varrho}{\mu'}\right\} + \dot{y}^2\,\frac{\gamma\varrho}{\mu'},$$

$$\left(\frac{p_y}{\mu''}\right)^2 = \dot{x}^2\,\frac{\gamma^2\varrho^2}{\mu''^2} + (\dot{x}.\dot{y})\,\frac{2\gamma\varrho}{\mu''}\left\{\alpha - \beta\,\frac{\gamma\varrho}{\mu''}\right\} + \dot{y}^2\,.$$

Quant à la quantité ϱ, elle ne figure que divisée soit par μ', soit par μ''.

Or, en multipliant les quantités de mouvement par le rayon d'action R^i, on obtient

$$(R.\,p_x) = \frac{\mu'}{\varrho} + \gamma,$$

ou bien

$$\frac{\varrho}{\mu'} = \frac{1}{(R.p_x) - \gamma}\,, \qquad \frac{\varrho}{\mu''} = \frac{1}{(R.p_y) - \gamma}\,.$$

C'est maintenant que nous disposons de la liberté de fixer convenablement la proportion α/β. Nous admettrons que

$$\beta - \alpha\,\frac{\gamma\varrho}{\mu'} = \alpha - \beta\,\frac{\gamma\varrho}{\mu''} = k,$$

ce qui amène

$$\alpha = \frac{\mu'(\mu'' + \gamma\varrho)}{2\,\mu'\mu'' + \gamma\varrho\,(\mu' + \mu'')} = \tfrac{1}{2} + \frac{\tfrac{1}{2}\,(\mu' - \mu'')\,\gamma\varrho}{2\,\mu'\mu'' + \gamma\,\varrho\,(\mu' + \mu'')}\,, \quad \beta = 1 - \alpha,$$

et

$$k = \frac{\mu'\mu'' - \gamma^2\,\varrho^2}{2\,\mu'\mu'' + \gamma\varrho\,(\mu' + \mu'')}\,.$$

Cela posé, la solution de $\dot{x}^2$, $(\dot{x}\dot{y})$ et $\dot{y}^2$ par rapport à p_x^2, (p_xp_y) et p^2_y est beaucoup simplifiée. On trouve

$$\dot{x}^2 = \frac{\left(\frac{p_x}{\mu'}\right)^2 - \frac{\gamma\varrho}{\mu'}\left(\frac{p_x.\,p_y}{\mu'\,\mu''}\right)}{1 - \gamma^2\varrho^2/\mu'\,\mu''}\,, \qquad \dot{y}^2 = \frac{\left(\frac{p_y}{\mu''}\right)^2 - \frac{\gamma\varrho}{\mu''}\left(\frac{p_x.\,p_y}{\mu'\,\mu''}\right)}{1 - \gamma^2\varrho^2/\mu'\,\mu''}$$

Enfin, les relations cherchées pour les masses sont

$$m'^2 c^2 = \frac{\left(p_x \cdot \left[p_x - \frac{\gamma\varrho}{\mu''}\, p_y\right]\right)}{1 - \gamma^2\varrho^2/\mu'\,\mu''}, \quad m''^2 c^2 = \frac{\left(p_y \cdot \left[p_y - \frac{\gamma\varrho}{\mu'}\, p_x\right]\right)}{1 - \gamma^2\varrho^2/\mu'\,\mu''}.$$

Les racines carrées de ces expressions sont conformes à l'expression pour une masse seule dont nous possédons la traduction dans la théorie de M. Dirac.

Les rapports $\gamma\varrho/\mu'$ et $\gamma\varrho/\mu''$ nous donnent les rapports de la masse de l'énergie électrostatique aux masses des particules respectives. Ils seront très petits. On voit comme l'action mutuelle entre en premier lieu dans les numérateurs. Il y a d'ailleurs une correction de précision dans le dénominateur.

Indiquons rapidement, pour conclure, l'importance de ces fonctions pour les équations de mouvement canoniques, et la forme de celles-ci. Le principe variationnel peut être mis sous la forme de Maupertuis pour le principe de moindre action. Si nous appelons Q_i les instants et les coördonnées x^0, $x^1 \ldots . y^3$, et P_i les variables dynamiques correspondantes p_{x0}, $p_{x1} \ldots . p_{y3}$, (y compris les énergies), le principe de Maupertuis, étendu dans le sens de la théorie relativiste se formule:

$$\delta \int \Sigma_{(i)}\ P_i\ dQ_i = 0,$$

où les variations admises des P_i et des Q_i seront conditionnées par les relations

$$m'c = F\ (P_i,\ Q_i), \qquad m''c = G\ (P_i, Q_i),$$

et, dans notre cas, aussi bien par la relation

$$R^2 = 0.$$

Or, la variation de l'intégrale, après une intégration partielle, s'écrit

$$\int \Sigma\, \delta P_i\ dQ_i - \int \Sigma\ \delta Q_i\ dP_i = 0,$$

d'où l'on tire, d'après les règles du calcul des variations, à cause des conditions imposées

$$dQ_i = d\varkappa \, \frac{\partial F}{\partial P_i} + d\lambda \, \frac{\partial G_i}{\partial P_i} + d\nu \, \frac{\partial R^2}{\partial P_i},$$

$$dP_i = -\, d\varkappa \, \frac{\partial F}{\partial Q_i} - d\lambda \, \frac{\partial G}{\partial Q_i} - d\nu \, \frac{\partial R^2}{\partial Q_i},$$

où $d\varkappa$, $d\lambda$, $d\nu$ figurent comme des multiplicateurs indéterminés de Legendre, qui peuvent être fonctions du paramètre d'intégration u.

Dans notre cas il vient

$$dx^i = ds' \, \frac{\partial F}{\partial p_{xi}} + ds'' \, \frac{\partial G}{\partial p_{xi}},$$

$$dp_{xi} = -\, ds' \, \frac{\partial F}{\partial_{xi}} - ds'' \, \frac{\partial G}{\partial x_i} - d\nu \, \frac{\partial R^2}{\partial x^i},$$

et on voit bien que c'est là une généralisation rationelle des équations canoniques, citées au début à la page 176.

263

Aus den Beständen der Niedersächs. Staats- und Universitätsbibliothek ausgeschieden.
Göttingen, den 10. AUG. 1966

ARCHIVES

DU

MUSÉE TEYLER

SÉRIE III, VOL. VII

FASCICULE 4

C. J. GORTER, Paramagnetische Eigenschaften von Salzen 183

LA HAYE
MARTINUS NIJHOFF
1932

PARAMAGNETISCHE EIGENSCHAFTEN VON SALZEN

VON

C. J. GORTER.

KAPITTEL I. Einführung.

Seite.
§ 1. Übersicht 183
§ 2. Definition des magnetischen Momentes 184
§ 3. Die Energie eines magnetischen Dipols in einem äusseren Felde 185
§ 4. Die Magnetisierungsenergie. 188
§ 5. Der Magnetisierungsvorgang 190
§ 6. Zusammenfassung der energetischen Verhältnisse 192
§ 7. Definition der Suszeptibilität. 193
§ 8. Die Entmagnetisierung 194
§ 9. Die Erscheinungen des Paramagnetismus der Salze 196

KAPITTEL II. Die Messmethoden.

§ 10. Prinzipielles über Suszeptibilitätsmessungen. . 198
§ 11. Bemerkungen über die gebräuchlichen ponderomotorischen Messmethoden 199
§ 12. Die Induktionsmethoden 202
§ 13. Suszeptibilitätsmessungen an Kristallen . . . 204
§ 14. Prinzipielles über andere Methoden 205

KAPITTEL III. Die prinzipielle Erklärung der Erscheinungen.

§ 15. Das BOHRsche Atommodell 208
§ 16. Die Bedeutung der Quantenzahlen; das Vektormodell 209
§ 17. Der Fall mehrerer Elektronen. 211
§ 18. Termnomenklatur 213
§ 19. Der ZEEMAN-Effekt 214
§ 20. Das magnetische Moment bei BOLTZMANN-Verteilung über die Energieniveaus 215
§ 21. Der Paramagnetismus nach der Quantenmechanik 216
§ 22. Die Interpretation der CURIE-Konstante und der Konstante θ 219
§ 23. Der Paramagnetismus bei abnehmender Temperatur 221
§ 24. Der Diamagnetismus 223

Seite.

KAPITTEL IV. **Die Theorie für die Seltenen Erden und die Eisengruppe.**

§ 25. Der Paramagnetismus der Salze und das periodische System 225
§ 26. Die HUNDschen Regeln und ihre Anwendung auf die Ionen der Seltenen Erden 226
§ 27. Die Magnetonenzahlen der Ionen der Seltenen Erden 228
§ 28. Der VAN VLECKsche temperaturunabhängige Paramagnetismus 231
§ 29. Die Magnetonenzahlen in der Fe-Gruppe . . . 232
§ 30. Die Theorien von LAPORTE-SOMMERFELD und BOSE-STONER 234
§ 31. Die paramagnetische Drehung der Polarisationsebene 238
§ 32. Paramagnetische Kristalle 241

KAPITTEL V. **Die Diskussion der Beobachtungsdaten für die Seltenen Erden und die Eisengruppe.**

§ 33. Die Seltenen Erden; Übersicht über Messmethoden und Material. 245
§ 34. Die Beobachtungsdaten. 249
§ 35. Die Interpretation der Beobachtungsdaten . . 257
§ 36. Die Interpretation der Drehungsmessungen. . 261
§ 37. Die Fe-Gruppe; Übersicht über die Messungen 263
§ 38. Die Beobachtungsdaten. 266
§ 39. Die Interpretation der Beobachtungsdaten . . 274
§ 40. Zur Frage der Realität des WEISS-Magnetons 277

KAPITTEL VI. **Andere Salze.**

§ 41. Die komplexen Ionen 280
§ 42. Die theoretischen Überlegungen über die komplexen Ionen 282
§ 43. Die Pd-, Pt- und U-Gruppen 285

KAPITTEL VII. **Letztes Kapittel.**

§ 44. Schlussbemerkungen 287
§ 45. Litteraturverzeichnis 289

KAPITTEL I.

§ 1. Übersicht.

Der Zweck dieser Arbeit ist eine kritische Zusammenstellung zu geben der Beobachtungsdaten im Zusammenhang mit den theoretischen Vorstellungen über das Gebiet des Paramagnetismus der Salze.

In Kapittel I, eine Einführung, werden einige Definitionen und Betrachtungen gegeben auf die später oft zurückgegriffen wird. Es enthält die Definitionen des magnetischen Momentes und der Suszeptibilität, somit einige energetische Betrachtungen allgemeinen Charakters über das Benehmen eines Dipols in einem magnetischen Felde und eine vorläufige Skizzierung der paramagnetischen Erscheinungen. Absichtlich ist von einer historischen Einführung abgesehen, weil eine solche schon vielfach und ausgezeichnet gegeben worden ist, und andrerseits eine Verknüpfung von historischer und logischer Einführung die Gefahr in sich trägt, dass die letztere an Schärfe einbüsst.

In Kapittel II werden einige Bemerkungen gemacht über die gebräuchlichen und möglichen Messmethoden.

Die Kapittel III und IV enthalten die prinzipielle Erklärung der Erscheinungen bezw. derer genaueren Deutung für die wichtigsten Gruppen paramagnetischer Salzen: die Gruppe der Seltenen Erden und die Eisen-Gruppe.

Einen kurzen Überblick über den jetzigen Stand der theoretischen Vorstellungen, kann man in den Kapitteln III und IV und den Paragraphen 35, 36, 39, 40 und 42 finden. Ist man bekannt mit den üblichen Bezeichnungen der Atomtheorie, so möge man die ersten fünf Paragraphen des Kapittels III, die als Einführung hierzu gemeint sind, überschlagen.

In den Kapitteln V, VI und VII endlich werden die Beobachtungsdaten zusammengestellt und Spezialprobleme näher diskutiert. Die Theorie der komplexen Verbindungen wird hierbei auch kurz angedeutet.

§ 2. Definition des magnetischen Momentes.

Betrachtet man einen kleinen Stromkreis, (z. B. von kreisförmiger oder elliptischer Gestalt), der in einer Ebene z=c gelegen ist, so schreibt man ihm ein magnetisches Moment μ_z der Grösse:

$$\mu_z = \frac{1}{2} \iiint (i_x y - i_y x)\, dx\, dy\, dz \quad . \; . \; . \; . \; . (1).$$

zu, wo i_x und i_y die Stromdichten in der X- und Y-Richtung bedeuten und die Integration über das Gebiet, des Stromes zu erstrecken ist. Das vom Stromkreis herrührende magnetische Feld hat dann in grossem Abstand den Wert:

$$\left.\begin{aligned} H_y &= \frac{\mu_z x z}{r^5} \\ H_x &= \frac{\mu_z y z}{r^5} \\ H_z &= \frac{\mu_z (3 z^2 - r^2)}{r^5} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . (2)$$

wo $r^2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ [1]) ist.

Wie man sieht, sind die Gleichungen für das magnetische Feld dieselben, welche für das elektrische Feld eines elektrischen Dipols gelten. In diesem Falle bedeutet $\mu = el$ wo l den Abstand der beiden entgegengesetzten Ladungen und e den Absolutwert der Ladungen bedeutet. Der Unterschied in den Feldern der beiden Arten von Dipolen tritt nur hervor, wenn der Abstand zum Dipol nicht mehr gross zu dessen „eigenen Grösse" ist. Im magnetischen Falle sind die Kraftlinien geschlossen, und gehen alle innen durch den Stromring hindurch, während im elektrischen Falle die Kraftlinien in dem einen der Ladungspunkten „entstehen" um in dem anderen zu „verschwinden". Es gilt nl.:

$$\text{div. } E = 4 \pi \varrho \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .\,^{2)} \; (3)$$

wo ϱ die Ladungsdichte und E die Feldstärke sind. Im magnetischen Falle ist aber:

$$\text{div. } H = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .\,^{2)} \; (4)$$

---

[1]) Vektoren schreiben wir kursiv.

[2]) $\text{div. } E = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$

Wegen des grossen Absolutwerts der Feldstärken in der unmittelbaren Nähe des Dipols ist dieser Unterschied wichtiger als man zunächst denken würde (sieh § 3). Ein weiterer Unterschied besteht darin dass dem magnetischen Moment infolge seines Charakters als Kreisstrom, im Gegensatz zum elektrischen, auch ein mechanisches- oder Impuls-Moment zukommt [1]). Das magnetische Moment hat also Kreiseleigenschaften.

§ 3. Die Energie eines magnetischen Dipols in einem äusseren Felde.

Die Frage nach der Energie eines magnetischen Dipols in einem äusseren Magnetfelde ist komplizierter als im korrespondierenden elektrischen Falle. Im Falle eines starren elektrischen Dipols braucht man nur der Änderung der Energie des elektrostatischen Feldes

$$W = \frac{1}{8\pi} \iiint_{-\infty}^{+\infty} |E|^2 \, dx \, dy \, dz, \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

durch gleichzeitige Anwesenheit des Dipols und des äusseren Feldes Rechnung zu tragen, und man findet dann:

$$\triangle W = -(\mu . E), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

wo E das äussere elektrische Feld an der Stelle des Dipols ist [2]).

Im magnetischen Falle aber, ist jede Änderung der Verhältnisse zwischen dem felderzeugenden Magnet und dem Dipol begleitet von einer eingreifenden Änderung des Magnetstromes und des Dipols selbst. Im Magnetstromkreis wird ein Induktionsstoss hervorgerufen, infolge dessen die magnetische Energie des Magnetes sich ändert, wenn diese Änderung nicht durch äussere Beiregulierung des Stromes kompensiert wird. Im Dipol hat man erstens eine analoge Änderung der kinetischen Energie der Elektronen (oder der magnetischen Energie, wenn man will) und ausserdem vielleicht noch Erwärmung, Änderungen der potentiellen Energien und der Wechselwirkungen der einzelnen Elektronen.

---

[1]) Die Definition des Impulsmomentes in der Z-Richtung ist:

$$\lambda_Z = \iiint (v_X x - v_Y y)\, \varrho\,(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

wo ϱ die Dichte und v die Geschwindigkeit der Materie bedeuten.

[2]) $(\mu . E) = \mu_X E_X + \mu_Y E_Y + \mu_Z E_Z = \mu_E . \mathrm{E}$, wie wir auch oft schreiben werden. E gibt den Absolutwert von E an, und μ_E die Komponente von μ in der Richtung von E.

Sind der Magnet und dessen „Moment" gross gegen den Dipol und dessen Moment, so kann man, wie oben schon angedeutet wurde, die Änderung der Totalenergie bei einer infinitesimalen Änderung der Verhältnisse in drei Termen teilen.

1°. Die Änderung der Energie des magnetischen Feldes, wenn man die im Magnet und im Dipol selbst hervorgerufenen Änderungen vernachlässigt. Diese beträgt, analog mit der Änderung der Totalenergie im elektrischen Falle [1]):

$$dW_1 = d\frac{1}{8\pi}\iiint_{-\infty}^{-\infty} | H_M + H_D |^2 \, dx\, dy\, dz, \quad . \; . \; . \quad (8)$$

wo H_M und H_D die Feldstärken sind die herrschen würden, wenn der Magnet oder der Dipol allein bestünde.

Man findet so:

$$dW_1 = + d(H.\mu) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

wo $H = H_M$ an der Stelle des Dipols ist.

Wie man aus dem Vergleich mit Gl. (7) sieht ist das Vorzeichen dem des elektrischen Falles entgegengesetzt. Der Grund davon ist, dass im magnetischen Falle die Kraftlinien des Dipols, sowohl wie des Magnets geschlossen sind [2]).

2°. Die Änderung, welche als Folge des Induktionsstosses in der Energie des Magneten auftritt [3]). Diese beträgt:

$$dW_2 = J\, d\left(\frac{H.\mu}{J}\right), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

wo J den Strom in der Magnetspule bedeutet.

Man kann natürlich auch sagen, dass um die Energie des Magneten konstant zu halten eine Energie dW_2 abgeführt, oder eine Energie—dW_2 zugeführt werden muss.

3°. Die Änderung der Energie des Dipols, welche wir die Änderung der Magnetisierungsenergie nennen, werden wir im nächsten Paragraphen näher analysieren.

Eine einfache Betrachtung liefert uns aber sofort die Änderung dieser Energie, als Folge einer Änderung des äusseren Feldes, wobei man die Stärke des Dipols als eine willkürliche Funktion des Feldes betrachtet. Verstärkt man z. B. das Feld durch Vergrösserung von J, so führt man natürlich erstens die Energie zu, welche nötig ist um die Feldenergie des Magneten zu vergrössern und die wir, weil sie durch die Anwesenheit des Dipols nicht beeinflusst wird, weiter ausser Betracht lassen können. Zweitens aber muss man noch die Energie $-\mathrm{d}\,W_2 = (H.\mathrm{d}\mu)$ zuführen um den Induktionstoss zu kompensieren. Die Zunahme der Energie W_1 betragt $\mathrm{d}W_1 = \mathrm{d}(H\,.\,\mu)$ und wegen der Erhältung der Energie findet man also:

---

[1]) Wir bezeichnen jetzt als „elektrischer Fall" den des starren Dipols; in allgemeineren Fällen treten natürlich auch Komplikationen auf.

[2]) Stellt man sich als Zwischenfall den eines magnetischen Dipols in einem im ganzen Raum homogenen Felde vor, so wäre $dW_1 = 0$.

[3]) Man denke sich die Änderungen so schnell, dass die JOULEsche Wärmeentwickelung zu vernachlässigen ist.

$$\mathrm{d}W_3 = -\,\mathrm{d}W_2 - \mathrm{d}W_1 = -\,(\mu\,.\,\mathrm{d}H) = -\,\mu_H \mathrm{d}H \quad (11)$$

Andererseits kann man die gegenseitige geometrische Lage von Magnet und Dipol ändern. Die dabei zu überwindende Kraft k könnte man nach

$$k = -\,\mathrm{grad}\,.\,W_{Tot} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; {}^{1)} \quad (12)$$

berechnen wo W_{Tot} die totale Energie des geschlossenen Systems vorstellt. Der induzierte Strom im Magnet muss dann also nicht durch äussere Stromregelung kompensiert werden. Am besten kann man das auch später noch zu gebrauchende Bild von LORENTZ ²) verwenden wo das Magnetfeld als von einem isolierten geschlossenen Supraleiter herrührend gedacht wird ³). Man hat dann:

$$\mathrm{d}W_{Tot} = \mathrm{d}W_1 + \mathrm{d}W_2 + \mathrm{d}W_3.$$

Findet z. B. eine Verschiebung des Dipols um dx statt, so gilt:

$$\mathrm{d}W_1 = \mathrm{d}\,(H\,.\,\mu)$$
$$\mathrm{d}W_2 = -\mathrm{d}\,(H.\mu)$$
$$\mathrm{d}W_3 = -\,(\mu\,.\,\mathrm{d}\,H) = -\left[\mu_X \frac{\partial H_X}{\partial x} + \mu_Y \frac{\partial H_Y}{\partial x} + \mu_Z \frac{\partial H_Z}{\partial x}\right] \mathrm{d}x$$

Also ist: $\mathrm{d}W_{Tot} = \mathrm{d}\,W_3$

und

$$k_X = \left(\mu\,.\,\frac{\partial H}{\partial x}\right) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

---

¹) H. A. LORENTZ, *Hb. für Radiologie*, 1925.

²)
$$\left.\begin{aligned} k_X &= \frac{\mathrm{d}\,W_{Tot}}{\mathrm{d}\,x} \\ k_Y &= \frac{\mathrm{d}\,W_{Tot}}{\mathrm{d}\,y} \\ k_Z &= \frac{\mathrm{d}\,W_{Tot}}{\mathrm{d}\,z} \end{aligned}\right\}$$

³) Vollkommen analog mit der Bedingung in Note 3 auf der vorigen Seite.

§ 4. Die Magnetisierungsenergie.

Die entwickelte Wärme —dQ liefert einen Beitrag zur Änderung der Magnetisierungsenergie. Diesen Beitrag kann men mit Hilfe einer Betrachtung auf Grund des Zweiten Hauptsatzes der Wärmelehre näher bestimmen. Setzt man n.l.

$$dW_3 - (-dQ) = dW_4$$

so ist:

$$dW_4 = dQ - \mu_H \, dH = TdS - \mu_H \, dH, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

wo T und S, wie gebräuchlich, die absolute Temperatur und die Entropie bedeuten. Fasst man H und T als unabhängige Variabeln auf, so ist:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial W_4}{\partial T}\right) dT + \frac{1}{T}\left\{\left(\frac{\partial W_4}{\partial H}\right) + \mu_H\right\} dH \quad . \; . \; . \; (15)$$

und da der Zweite Hauptsatz besagt dass im thermodynamischen Gleichgewicht dS ein totales Differential ist:

$$\frac{1}{T}\left\{\frac{\partial W_4}{\partial H} + \mu_H\right\} = \left(\frac{\partial \mu_H}{\partial T}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (16)$$

und also:

$$dQ = T\left(\frac{\partial \mu_H}{\partial T}\right) dH + \left(\frac{\partial W_4}{\partial T}\right) dT.$$

Arbeitet man bei konstanter Temperatur, so fällt das zweite Glied fort; und man sieht, dass die freikommende Wärme mit $(\partial \mu_H / \partial T)$ eng zusammenhängt [1].

Ist das magnetische Moment bei der betrachteten Feldstärke unabhängig von T, so ist die Wärmetönung, bei Änderung der Magnetisierung, null.

Ist aber, wie oft vorkommt μ_H eine Funktion von H/T so verifiziert man leicht:

$$dQ = -H\left(\frac{\partial \mu_H}{\partial H}\right) dH = -H \, d\mu_H \quad . \; . \; . \; (18)$$

und also:

$$dW_4 = -d\,(H \,.\, \mu) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (19)$$

Über die Bedeutung dieses Termes dW_4 kann eine kurze Betrachtung auf dem Basis der Elektronentheorie nähere Auskunft geben. Stellt man sich vor, dass das magnetische Moment von einem System bewegter Elektronen und Kernen herrührt, welches in beliebiger Wechselwirkung mit der Umgebung steht [2], so kann man, wenn im System nun irgend eine Änderung statt findet, für die Änderung der Summe der potentiellen (elektrostatischen) und kinetischen Energien der Elektronen und Kernen in zweiter Annäherung schreiben:

---

[1] Eine ähnliche Betrachtung hat P. DEBYE, *Ann. der Phys.*, *81*, 1124, 1926 angestellt. Sieh auch: W. H. KEESOM, *Comm. Leiden, Supp.* 32.

[2] Wobei man auch annehmen kann, dass die Elektronen einen „Spin" besitzen.

$$d(W_P + W_K) = dC - d(H \cdot \mu'_H) - \tfrac{1}{2}(H \cdot \mu''_H) \quad . \; . \; . \; (20)$$

$$\mu_H = \mu'_H + \mu_H'' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (21)$$

wo μ'_H unabhängig von H und μ''_H eine lineare Funktion der Komponenten von H ist [1]).

Man sieht, dass der in (19) genannte Anteil der Magnetisierungsenergie mit der Änderung der Summe der potentiellen und kinetischen Energien (die auch wohl spektroskopische Energie genannt wird [2])) identisch ist, wenn der erste und der dritte Term in (20) zu vernachlässigen sind. Der erste Term enthält die Änderung der Wechselwirkungsenergien zwischen den Elektronen und Kernen untereinander, und die Änderung der potentiellen Energie gegen die Umgebung; diese letztere kann wohl null gesetzt werden. Der dritte Term enthält die Polarisationsenergien, welche oft zu vernachlässigen sind (z. B. des Diamagnetismus, sieh aber auch § 21).

Wir können also die Folgerung ziehen, dass wenn das Gesetz $\mu_H = F(H/T)$ gilt, die Wechselwirkungsenergien zwischen den Teilen des Systems sich offenbar bei der Magnetisierung nicht ändern.

Das umgekehrte gilt auch [3]).

Bleibt bei der Magnetisierung die Summe der Wechselwirkungsenergien zwischen den Teilen des magnetisierten Systems nicht konstant, so besteht die Änderung der Magnetisierungsenergie aus drei Teilen:

1. Die Änderung der spektroskopischen Energie: dW_{SP}.
2. Die entwickelte Wärme: dW_E.
3. Die Änderung der Wechselwirkungsenergie [4]): dW_W.

---

[1]) Es gilt:

$$\mu_H = -\frac{d(W_P + W_K)}{dH} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (21)$$

eine Beziehung, welche man direkt aus den Bewegungsgleichungen eines Elektrons in beliebigen elektrischen und magnetischen Feldern herleiten kann. Sieh R. L. KRANS, *Dissertation Leiden*, 1931.

[2]) Sie wird von Atomtheoretikern häufig ohne weiteres als HAMILTON-Funktion angesetzt.

[3]) Natürlich wenn wieder vorausgesetzt wird, dass die Polarisationsglieder in W_{SP} und μ_H vernachlässigt werden können.

[4]) WEISS hat gezeigt, dass man, wenn man die letzte Energie proportional zu μ^2_H stellt, und weiter der im nächsten Paragraphen angegebenen Analyse

§ 5. Der Magnetisierungsvorgang.

Die oben gegebenen Betrachtungen auf Grund des zweiten Hauptsatzes sind nicht imstande gewesen, den Verlauf der Magnetisierung als Funktion der Feldstärke vorherzusagen. In dem Fall z. B. wo die Polarisation und die Änderung der Wechselwirkungen zwischen den Elektronen und Kernen vernachlässigt sind, konnte man angeben, dass μ_H eine Funktion von H/T sei, nicht aber die Form dieser Funktion. Um hierüber mehr zu erfahren. muss man näher auf den Magnetisierungsvorgang eingehen.

Wie wir oben gesehen haben besteht das magnetische Moment im Allgemeinen aus zwei Teilen.

Der Polarisationsteil kommt dadurch zustande, dass jedes Atom unter dem Einfluss des Feldes ein Moment proportional zu H bekommt. Die Magnetisierungskurve wird dann durch die Polarisierbarkeit, bestimmt; ist diese unabhängig von T, so ist die Wärmeumsetzung null.

Der andere Teil aber der, wenn er vorhanden ist, meistens der weitaus grössere Teil ist, kommt dadurch zustande dass, unabhängig vom Absolutwert von H, verschiedene Werte des Momentes in der Feldrichtung möglich sind.

Durch Wechselwirkung der Atome mit einander oder mit dem Strahlungsfeld kann sich dieses Moment ändern; die Änderungen brauchen nicht infinitesimal klein zu sein. Das Moment wird aber einen gewissen zeitlichen Mittelwert haben, der von H und T abhängt. Am besten nehmen wir hierbei das LORENTZsche Bild (sieh § 3) des stromtragenden, geschlossenen Supraleiters für den Magnet an; damit man die Änderung in H als Folge des Induktionsstosses vernachlässigen darf, soll seine magnetische Energie gross gegen die magnetische Wechselwirkung μ_H H sein [1]).

Bei einer solchen Änderung von μ_H um $\triangle \mu_H$ sind die Änderung der Energie des magnetischen Feldes, und die Energieänderung des Magnetes als Folge des Induktionsstosses H $\triangle \mu_H$ bezw. — H $\triangle \mu_H$

---

des Magnetisierungsvorgangs folgt, in erster Näherung das CURIE-WEISS-sche Gesetz:

$$\mu_H = \frac{BH}{T-\Theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

bekommt. P. WEISS, *J. de Phys.*, *1*, 1, 1930.

[1]) Identisch mit der Bedingung in § 3, dass das Dipolmoment des Magnets gross gegen μ sein soll.

Die Änderung der Totalenergie ist also nur der Summe der Änderungen der kinetischen und potentiellen Energien. Sie kann als Wärme oder als Strahlung [1]) freikommen. (z. B. im ZEEMAN-Effekt).

Vernachlässigen wir die Änderungen der Wechselwirkungen zwischen den Elektronen und Kernen, so ist die obengenannte Summe: $-\triangle (H \mu_H)$, oder bei konstantem H:

$$\triangle W_{SP} = -H \triangle \mu_H \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

Es muss also bei jeder spontanen Änderung des Momentes die Energie $H \triangle \mu_H$ als Strahlung oder als Wärme freikommen (im Übereinstimmung mit dem vorigen Paragraphen).

Man kann nun den mittleren Wert des Momentes berechnen, mit Hilfe des BOLTZMANNschen Verteilungsfaktors, in welchen dann einfach die angegebene Summe potentieller und kinetischer Energien auftritt. Dieser Faktor ist also:

$$g\, e^{-W_{SP}/kT}$$

wo k die BOLTZMANN-Konstante und g das aprioristische Gewicht [2]) des betrachteten Zustandes bedeuten.

Wir sind zu diesem Resultat auf einfache Weise gekommen, weil wir, dank des LORENZschen Bildes, in einem geschlossenen System arbeiteten, und dann die Änderung der Feldenergie und die Energieänderung als Folge des Induktionsstosses sich gegen einander wegheben.

Setzt man dagegen die Konstanz von H als Nebenbedingung voraus, so muss, bei jeder spontanen Änderung von μ_H, der Magnetstrom beireguliert werden. Die Energieänderung des Magnets als Folge des Induktionsstosses wird dann automatisch kompensiert, das System ist dann aber nicht geschlossen.

Wie die eingehende Analyse von Frl. VAN LEEUWEN [3]) gezeigt hat, tritt dann im BOLTZMANNschen Verteilungsfaktor nicht die Energie, sondern die Funktion von ROUTH auf. In den von uns betrachteten Fällen ist die Funktion identisch, mit der, auch im ZEEMAN-Effekt auftretenden Summe der kinetischen und potentiellen Energien. Wir werden im Folgenden über eine BOLTZMANN-Verteilung über spektroskopische Energieniveaus und nicht über ROUTH-Niveaus sprechen.

---

[1]) Daher der Namen: spektroskopische Energie.

[2]) Sieh besonders: G. E. UHLENBECK, *Dissertation Leiden*, 1927.

[3]) J. VAN LEEUWEN, *Dissertation Leiden*, 1921.

§ 6. Zusammenfassung der energetischen Verhältnisse.

Zusammenfassend können wir sagen, dass bei der Magnetisierung drei verschiedene Arten der Energieänderung auftreten:

1. Die Änderung der magnetischen Feldenenergie: $dW_1 = d(H.\mu_H)$.

2. Die Energie der Änderung des Magnets als Folge des Induktions stosses: $dW_2 = -Hd\mu_H$.

3. Die Änderung der Magnetisierungsenergie: $dW_3 = -\mu_H dH$.

Die Energieänderung dW_3 ist wieder die Summe von drei Teilen:

4. Die Änderung der Summe der kinetischen und potentiellen. Energien der Elektronen: dW_{SP}.

5. Die Änderung der Wechselwirkungsenergie: dW_W.

6. Die emittierte Energie, die als Strahlung oder als Wärme abgegeben wird: dW_E.

Im thermodynamischen Gleichgewicht ist bei konstanter Temperatur $dW_E = -T\left(\frac{\partial \mu_H}{\partial T}\right)dH$.

Ist W_W konstant, und vernachlässigt man die Polarisation, so sind $dW_E = +Hd\mu_H$, $dW_{SP} = -d(H.\mu_H)$,

$$\text{also } dW_{SP} = -dW_1 \quad \text{und} \quad dW_E = -dW_2;$$

und die Energie welche die Magnetspule durch den Induktiosstoss verliert wird völlig in Wärme oder Strahlung umgesetzt.

Bei jedem Sprung der Magnetisierung ist dann: $dW_{SP} = dW_2 = -Hd\mu_H$ und $dW_E = dW_1 = Hd\mu_H$; man kann also auch sagen, dass beim Sprung dW_1 und dW_2 sich gegen einander wegheben, und die Verminderung der spektroskopischen Energie in Wärme oder Strahlung umgesetzt wird [1]).

Zwischen den Sprüngen wächst nur die Feldenergie um $\mu_H dH$, auf Kosten der spektroskopischen Energie.

Als Verteilungsfunktion tritt W_{SP} auf.

Hat man dagegen mit magnetischer Polarisation zu tun, so ist

$$dW_{SP} = dW_3 = d\,\tfrac{1}{2}(H\,.\,\mu_H'') \quad \text{und} \quad dW_W + dW_E = 0.$$

Bei Änderung der gegenseitigen Lage von Magnet und Dipol ist $dW_1 = -dW_2$; die wirkenden Kräfte bei Schiebung oder Drehung des Dipols kann man also aus W_3 berechnen; z.B. $k_x = \left(\mu.\frac{\partial H}{\partial x}\right)$.

---

[1]) Diese Tatsache wird auch wohl so formuliert: das Magnetfeld leistet beim Übergang in einen andern Zustand keine Arbeit.

z. B. M. Born, *Atommechanik I*, S. 239.

§ 7. Definition der Suszeptibilität.

Betrachtet man einen magnetisierten Körper als ein Kontinuum (diese Betrachtungsweise, welche nur mit Grössen arbeitet, die sehr gross im Vergleich zu den atomaren sind, nennt man wohl die makroskopische) so definiert man den Magnetisierungsvektor P, als das magnetische Moment pro Volumeinheit, im betrachteten Punkt des Körpers.

Den Vektor der magnetischen Feldstärke H haben wir bisher nur für den leeren Raum, wie er in den MAXWELLschen Gleichungen auftritt, gebraucht. Es scheint aber vorteilhaft zu sein die Feldstärke auch für einen Punkt in unserem Kontinuum zu definieren. Diese Ausbreitung des Begriffes der Feldstärke bringt man dann dadurch zustande, dass man sich im Körper um den betrachteten Punkt, einen langen dünnen zylindrischen Hohlraum denkt, dessen Längsachse die Richtung der Magnetisierung hat, und die klein ist gegen die Dimensionen des Körpers und gegen den Abstand in welcher P sich merklich ändert ist. Ein solcher Hohlraum wird dann keinen merklichen Einfluss auf den Magnetisierungszustand des Körpers haben und man kann als die Feldstärke im Körper, die wir H_K nennen werden, die Feldstärke H definieren, die an einem Punkte im Hohlraum herrschen würde [1]).

Man definiert als die Suszeptibilität in der Feldrichtung H:

$$\chi = \frac{(P \, . \, H_K)}{\varrho \, | H_K |^2} = \frac{P_{H_K}}{\varrho \, H_K} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

wo ϱ die Dichte der Substanz ist. Man kann also sagen: Die Suszeptibilität ist die Komponente des magnetischen Momentes in der Richtung von H_K pro Gramm pro Einheit der Feldstärke H_K.

Ist die Magnetisierung eine lineare Funktion [2]) der Komponenten von H_K, so kann man eine Drehung der Koordinatrichtungen

---

[1]) Man gebraucht auch noch oft den Begriff der Induktion; welche als $B = H_K + 4\pi P$ definiert wird. Sie ist die Feldstärke, welche in einem sehr flachen Hohlraum, senkrecht zur Magnetisierung herrschen würde. Die MAXWELLschen Gleichungen lassen sich, mit Einführung von B erweitern zu:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{div.}\ B = 0 & \text{div.}\ \dfrac{dD}{dt} + 4\pi J = 0 \\ \text{rot.}\ H = \dfrac{1}{c}\dfrac{dD}{dt} + 4\pi J & \text{rot.}\ E = -\dfrac{1}{c}\dfrac{dB}{dt} \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \quad (25)$$

wo D die dielektrische Verschiebung und J den elektrischen Strom bedeuten. Wir brauchen den Begriff in unseren Ausführungen aber weiter nicht.

[2]) und χ also unabhängig von dem Absolutwert von H_K.

vornehmen (Hauptachsentransformation) so dass man bekommt:

$$\left.\begin{aligned} P_X &= H_{KX}\ \chi_1\ \varrho \\ P_X &= H_{KY}\ \chi_2\ \varrho \\ P_Z &= H_{KZ}\ \chi_3\ \varrho \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

χ_1, χ_2 und χ_3 werden die Hauptsuszeptibilitäten genannt.

χ in einer vorgegebenen Richtung ist aus den Hauptsuszeptibilitäten zu berechnen nach der Formel:

$$\chi = \frac{\chi_1\ H_X^2 + \chi_2\ H_Y^2 + \chi_3\ H_Z^2}{H_X^2 + H_Y^2 + H_Z^2} \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

§ 8. Die Entmagnetisierung.

Bei der Definition der Suszeptibilität haben wir von der, nicht direkt zu messenden Vektorgrösse H gebrauch gemacht. Wir können aber, wenn wir mit einem homogenen isotropen [1]) Körper einfacher Form in einem homogenen äusseren Felde zu tun haben, H_K berechnen, wenn P bekannt ist und auch die Feldstärke H_0, die herrschen würde, wenn der Körper nicht vorhanden wäre, sonst aber die Verteilung von Strömen und Magneten genau dieselbe wäre, als bei der Messung von P.

H_0 ist leicht zu bestimmen, wenn die Rückwirkung des Körpers auf den Magnet, zu vernachlässigen ist (wofür man meistens sorgen kann).

Hat man mit einem homogenen isotropen Ellipsoid in einem homogenen Felde zu tun, so hat H, und also auch P, überall im Körper den nämlichen Wert. Man kann dann ansetzen: $\varepsilon P = H_0 - H_K$. ε wird dann wohl den Entmagnetisierungsfaktor genannt. Für Ellipsoide die sehr lang, oder sehr flach in der Magnetisierungsrichtung sind, ist $\varepsilon = 0$ bezw. $\varepsilon = 4\pi$; für eine Kugel ist $\varepsilon = 4\pi/3$.

Breit [2]) hat gezeigt dass auch in anderen Fällen der Entmagnetisierungsfaktor in erster Näherung $\varepsilon = 4\pi/3$ ist; z. B. für ein kugelförmig begrenztes Raumgitter kugelformiger Körper; für einen kugelförmiger Körper mit kugelförmigen Löchern, und für ein System regellos verteilter Gruppen flacher Lamellen. (P ist hierbei nicht die mittlere Magnetisierung im Agregat, sondern die Magnetisierung, welche herrscht in den Gebieten, wo sich homogene Substanz befindet). Im Falle eines kugelförmigen Pulverpreparats, scheint es also angebracht dem einen Entmagnetisierungsfaktor $\varepsilon = 4\pi/3$ zuzuschreiben.

---

[1]) Ist die Substanz magnetisch nicht isotrop, so muss man verschiedene Körperformen untersuchen, wenn man die Suszeptibilität richtig bestimmen will.

[2]) G. Breit, *Comm. Leiden, Supp.* 46.

Die zur Erhaltung von H_K an H anzubringende Korrektion beträgt also $-\varepsilon P$, eine Korrektion, die immer anzubringen ist wenn man die Suszeptibilität zu kennen wünscht. Es wäre aber ein Irrtum H_K zu identifizieren mit dem magnetischen Feld H_{eff} welches auf das einzelne Atom in der Substanz wirkt und das in den Betrachtungen der Paragraphen 4 und 5 aufgetreten ist.

Schlägt man nach LORENTZ[1]) um den betrachteten Atom eine Kugel, gross gegen die atomaren Dimensionen, aber klein gegen die Dimensionen des Körpers und die Abstände in welchen P sich beträchtlich ändert, so ist der Beitrag zum Felde der Atome und Magnetströme, die sich ausserhalb der Kugel befinden $H_K + (4\pi/3)P$, wie man einfach aus dem Vergleich des langgedehnten und eines kugelförmigen Hohlraums sieht.

Der Beitrag der innerhalb der Kugel gelegenen Atome ist nicht so leicht anzugeben. Tragen alle Atome gleiche Komponenten des Momentes in der Feldrichtung, und hat man ein kubisches Gitter, so kann man, mit Hilfe der Gl (2) einsehen, dass dann dieser Beitrag null ist. LORENTZ gibt dann auch an dass in der Gleichung

$$H_{\mathrm{eff}} = H_K + \frac{4\pi}{3}(1 + s)\, P \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (30)$$

s meistens klein sein wird.

Setzt man s = 0, so gilt für ein kugelförmiges Pulverpreparat:

$$H_{\mathrm{eff}} = H_0 + \frac{4\pi}{3}\left(1 + s - \frac{3\varepsilon}{4\pi}\right) P = H_0 \quad . \; . \; . \qquad (31)$$

und fallen die Entmagnetisierungskorrektion und die LORENTZ-Korrektion gegen einander weg; sodass es angebracht scheint in diesem Falle, wenn man sich nicht für die Abstraktion der Suszeptibilität interessiert, sondern für das Benehmen der atomaren Magnete unter Einfluss eines Magnetfeldes, die gebräuchliche Entmagnetisierungskorrektion nicht anzubringen[2]).

Wo die ganze Sachlage aber sehr unsicher[3]) ist, sollte man, wenn möglich, grosse P-Werte vermeiden, also im Temperaturgebiet des flüssigen Heliums mit grösster paramagnetischen Verdünnung arbeiten.

---

[1]) H. A. LORENTZ, *Theory of Electrons*, S. 138, 1909.

[2]) Im Gegensatz z. B. zu H. KAMERLINGH ONNES und H. R. WOLTJER, *Comm. Leiden* 167c.

[3]) Dass, wenn alle Atome nicht dieselbe Komponente des Momentes in der Feldrichtung haben, wie gerade in den wichtigen Fällen vorkommen wird, die LORENTZsche Abschätzung nicht gilt, und sogar Tendenz zur Schwarmbildung besteht, kompliziert die Sache noch mehr.

§ 9. Die Erscheinungen des Paramagnetismus der Salze.

Bekommt eine Substanz in einem äusseren Magnetfelde ein magnetisches Moment, dessen Komponente in der Feldrichtung dem Felde entgegen gerichtet ist, so nennen wir die Substanz diamagnetisch; hat die Komponente die Richtung des Feldes, so sprechen wir von Para- oder Ferromagnetismus.

Zu den ferromagnetischen Substanzen rechnen wir die drei Metalle: Fe, Co und Ni, die meisten ihrer Legierungen, einige ihrer Verbindungen, als Oxyde und Sulfide und die s.g. HEUSLER-Legierungen.

Zu den paramagnetischen Substanzen gehören viele Salze, Oxyde, Metalle und einige Gase.

Als Merkmale für den Ferromagnetismus werden wohl angegeben: grosse Werte der Suszeptibilität, Feldabhängigkeit derselben, und Hysteresis-Erscheinungen. Da aber bei tiefen Temperaturen auch immer als paramagnetisch betrachtete Salze, den ersten zwei Merkmalen genügen, und vom theoretischen und praktischen Gesichtspunkte das dritte Kriterium auch nicht zuverlässig scheint, ist die prinzipielle Trennung zwischen dem paramagnetischen und dem ferromagnetischen Gebiet nicht sehr einfach. Vom theoretischen Standpunkte scheint das beste Kriterium wohl in den überaus starken Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Dipolen zu liegen, die zur s.g. spontanen Magnetisierung führen kann.

Da es aber keine ferromagnetischen Salze gibt, und diese Zusammenfassung sich nur auf Salze bezieht, können wir an dieser Schwierigkeit vorläufig vorübergehen [1]).

Vom chemischen Standpunkte zerfallen die paramagnetischen Salze in zwei Gruppen.

Die erste, weitaus wichtigste, Gruppe wird von den Ionen-Salzen der Fe-Gruppe und denen der Seltenen Erden gebildet. Die Suszeptibilität folgt bei nicht zu tiefen Temperaturen fast immer dem CURIE-WEISS-schen Gesetz:

$$\chi = \frac{B}{T - \theta}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

---

[1]) Sieh indessen § 39.

wo χ eine mittlere Suszeptibilität (es sind fast nur Lösungen und Kristallpulver eingehend untersucht worden), und B und θ zwei Konstanten sind. Es gilt stets $|\theta| \ll T$. Berechnet man B pro Metall-Grammion, so findet man dass diese s.g. CURIE-Konstante C nur vom Metallion, nicht aber vom Anion oder von der Verdünnung bei Lösungen bezw. dem Kristallwassergehalt bei festen Stoffen, abhängt. θ aber ist hiervon ziemlich stark abhängig. Bei grossem Kristallwassergehalt oder nicht zu kleiner Verdünnung ist oft $\theta = 0$, man sagt dann dass das CURIE-sche Gesetz gilt.

$$\chi = \frac{B}{T} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

In der zweiten Gruppe muss das paramagnetische Benehmen auch Ionen zugeschrieben werden; es sind aber komplexe Ionen wie MnO_4^-, $Fe(CN)_6^{\equiv}$, und $Cr(CN)_6^{\equiv}$, einige von diesen z. B. die ersten zwei Ionen weisen einen temperatur-unabhängigen Paramagnetismus auf; andere, z. B. das dritte Ion, benehmen sich dem CURIE-WEISS-schen Gesetze nach.

Auch einige Salze der Pt- und Pd-, und U-Gruppen zeigen paramagnetische Eigenschaften.

Für nähere Beschreibung und Einzelheiten muss aber auf die betreffenden Kapittel verwiesen werden.

Es nur noch erwähnt, dass fast alle paramagnetischen Salze im sichtbaren oder nahen ultravioletten Gebiete intensive Absorptionsbanden haben, welche in den Salzen der Seltenen Erden oft fast ebenso schmal sind wie die Spektrallinien der Metalldämpfe. Manche von ihnen zeigen starke Aufspaltungen im Magnetfeld (ZEEMAN-Effekt).

Auch die Existenz gyromagnetischer Effekte, und das Auftreten starker Drehungen der Polarisationsebene bei longitudionalem Magnetfelde [1]), hängen mit dem Paramagnetismus zusammen.

---

[1]) Anmerkung bei der Korrektur: Neulich ist auch eine, mit paramagnetische Eigenschaften zusammenhängende magnetische Doppelbrechung aufgefunden worden. Sieh § 35.

KAPITTEL II.

§ 10. Prinzipielles über Suszeptibilitätsmessungen.

Wenn eine Substanz unter dem Einfluss eines magnetischen Feldes selbst Träger wird eines magnetischen Momentes, so bedingt die Anwesenheit der Substanz eine Änderung der Feldstärke in derer Nähe. Diese Änderung kann man auf zweierlei Weise für eine Messung des Momentes verwenden.

Erstens kann man die ponderomotorische Wirkung auf einen Probe-Magnet oder -Stromkreis bestimmen. Zweitens kann man den, von einer Änderung des Momentes hervorgerufenen, Induktionsstoss in einem Stromleiter auf elektrischem Wege beobachten.

Eine Anwendung des ersten Prinzips, ist die fast ausschliesslich für den Ferromagnetismus gebrauchte Magnetometermethode, in welcher eine Magnetnadel unter dem Einfluss des Momentes der Substanz einen Ausschlag bekommt [1]) (der Einfluss des primären Feldes ist dann vorher kompensiert.)

Die gebräuchlichste Anwendung des ersten Prinzips ist aber die, wobei der Probe-Magnet identisch ist mit dem Magnet, der das primäre Feld erzeugt [2]). Man bestimmt also die ponderomotorische Wechselwirkung zwischen Magnet und magnetisierte Substanz [3]).

Die dabei auftretende Kraft ist, wie in § 3 gezeigt wurde: $(\mu . \partial H/\partial x)$ wo $H = H_0$, die äussere Feldstärke ist (die Kräfte in Folge der Felder die von der Substanz selber hervorgerufen werden, verschwinden wegen Aktion = Reaktion) Der Vorteil der Methode ist ihre grosse Empfindlichkeit; der Nachteil liegt in der schwierigen Bestimmung von $\partial H/\partial x$. Bei Messungen des

---

[1]) Sieh z. B. E. Gumlich, *Hdb. der Phys.* 16, 750.

[2]) Sieh andrerseits P. Kapitza und W. L. Webster, *Proc. Roy. Soc., A*, 132, 442, 1931.

[3]) Die s.g. Faraday-Methode.

Paramagnetismus findet jedoch fast ausschliesslich diese Methode Verwendung.

Bei einer auf dem zweiten Prinzip beruhenden Methode beobachtet man ballistisch den Induktionsstoss in einer Spule, welche beim Umschalten des Magnetfeldes auftritt. Auch kann man Spule und Substanz zusammen im konstanten Felde umklappen. Der Induktionsstoss (wenn der Stoss des primären Feldes eliminiert ist) ist proportional zu μ.

Auch auf diesem Prinzip beruht die Methode der Änderung der Selbstinduktion einer Spule, wenn die zu messende Substanz darin gebracht wird. Diese Änderung ist proportional mit $\mathrm{d}\mu_H/\mathrm{d}H$.

Sieh für indirektere Methoden für paramagnetische Messungen § 14.

§ 11. Bemerkungen über die gebräuchlichen ponderomotorischen Messmethoden.

Da die vor Kurzem erschienene Leidener Dissertation von Wiersma [1]) eine ausgezeichnete Zusammensetzung der verschiedenen Messmethoden gibt mögen hier nur einige Bemerkungen Platz finden und verweisen wir weiter auf die genannte Arbeit.

Meistens wird die auf die Substanz wirkende Kraft durch Kompensierung, mittels Gewichten, mit Hilfe der Torsion oder auf elektrodynamische Weise, gemessen. In einem Einzelfall (Kapitza [2]) in hohen Feldern von kurzer Dauer) wurden die, bei Änderungen des Feldes erfolgende, Impulsstösse gemessen.

Die Aufhängung der Substanz erfolgt an einer Balanz oder Areometer für vertikal wirkende Kraft, und an einer Torsionswage, einem Draht, oder einem „beweglichen Wagen" nach Weiss und Foex [3]), für horizontale Kraft.

Man arbeitet, wo möglich im Maximum von $(\mu \, . \, \partial H/\partial \mathrm{x})$, also bei feldunabhängiger isotroper Suszeptibilität im Maximum von $(H_{\mathrm{x}} \, . \, \partial H/\partial \mathrm{x})$, damit die Kräfte möglichst gross sind, und bei Änderung der X-Koordinate sich möglichst wenig ändern. Man kann dann auch ein grösseres Quantum der Substanz verwenden.

Die Temperaturen über Zimmertemperatur werden meistens mit einem elektrischen Ofen erreicht, wobei man natürlich sehr sorgfältig auf Gleichmässigkeit und Konstanz der Temperatur achten muss.

---

[1]) E. C. Wiersma, *Diss. Leiden*, 1932.

[2]) P. Kapitza, *Proc. Roy. Soc.*, *A 131*, 224, 1931.

[3]) P. Weiss und G. Foex, *J. de Phys.*, *5*, *1*, 475, 744 und 895, 1911.

Die Temperaturen unter Zimmertemperatur werden erreicht durch Untertauchung in verflüssigten Gasen, oder Kühlung mit kaltem Gas oder Dampf. Bei der ersten Methode wird die Genauigkeit der Messung oft beschränkt durch die Nichtreproduzierbarkeiten die von Dampfbläschen oder sogar Dampfstösse der siedenden Flüssigkeit, herrühren. Im günstigsten Falle, im siedenden Wasserstoff oder siedenden Helium sind diese Unregelmässigkeiten noch von der Ordnung von einem mg. Man hat darum auch in einer geschlosseneng asgefüllten Metallröhre gearbeitet, welche vom flüssigen Gas umspült wird [1]). Auch ist wohl mit durchströmendem kalten Gas oder Dampf gemessen worden [2]) (Dampfkryostat).

Bei Untertauchung ist die Methode der vertikalen Bewegung kaum zu vermeiden. Deshalb ist um eine der empfindlicheren horizontalen Methoden gebrauchen zu können auch mit einem Dampfkryostat gemessen worden [2]). Gute Temperaturbestimmung ist bei diesem Kryostat immer weniger einfach.

Die Temperaturbestimmungen geschehen meistens mit Pt-Thermometer oder Thermo-Elemente. Wenn der verfügliche Raum es ermöglicht, ist, scheint uns, der Gebrauch eines Pt-Thermometers vorzuziehen.

Die Suszeptibilität in der Feldrichtung findet man direkt aus der Formel:

$$K_x = m\chi \left(H_k \, . \, \frac{\partial H}{\partial x} \right) \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (34)$$

wo K_x die wirkende Kraft in der X-Richtung und m die Masse des Preparats bedeuten.

Der schwache Punkt der Methode liegt in der Schwierigkeit dH/dx genau zu bestimmen; zwar kann man H ohne all zuviel Schwierigkeiten auf ungefähr 1°/₀₀ bestimmen, dH/dx wir dann selbstverständlich viel weniger genau [3]).

---

[1]) W. J. DE HAAS und P. M. VAN ALPHEN, *Comm. Leiden* 212*a*.

W. J. DE HAAS, E. C. WIERSMA und W. H. CAPEL, *Comm. Leiden* 201*b*.

Auch für den Siedepunkt des Wassers ist diese Anordnung angewandt worden: W. J. DE HAAS und C. J. GORTER, *Comm. Leiden* 215*a*.

[2]) E. C. WIERSMA und H. R. WOLTJER, *Comm. Leiden* 201c.

H. R. WOLTJER, C. W. COPPOOLSE und E. C. WIERSMA, *Comm. Leiden* 201*d*.

S. FREED, *Journ. Am. Chem. Soc.*, *52*, 2702, 1930.

[3]) Sieh § 37 für die indirekte Methode der WEISS-schen Schule.

Darum gebraucht man, wenn χ unabhängig von der Feldstärke ist oft den folgenden Kunstgriff [1]):

Man bestimmt die auf einen langen zylindrischen magnetisch isotropen Preparat in der Längsrichtung wirkenden Kraft. Diese beträgt dann:

$$K_x = \int \varrho\, \omega\, \chi \left(H \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathrm{x}} \right) \mathrm{d\,x} = \tfrac{1}{2}\, \varrho\, \omega\, \chi\, (|H_1|^2 - |H_2|^2) \ldots\ldots \quad (35)$$

wo ω den Durchschnitt des Zylinders bedeutet und ϱ die Dichte [2]).

$|H_1|$ und $|H_2|$ sind die Absolutwerte der Feldstärken an den Enden des Zylinders. Da $\varrho\,\omega = \mathrm{m}/\mathrm{l}$, wo m die Masse und l die Länge des Preparates bedeuten, braucht man nebst diesen beiden Grössen nur die Kraft in der Längsrichtung und $|H_1|$ und $|H_2|$ zu kennen. Man nimmt gewöhnlich H_1 im homogenen Feld des Magneten und H_2 auf ziemlich grossen Abstand so dass $|H_1|^2 \gg |H_2|^2$, die Genauigkeit hängt dann nur von die der Feldstärke im homogenen Teil des Feldes ab (man kann dieselbe bequem mit einer grossen Spule messen).

Die Methode hat auch noch den Vorteil, dass die Kräfte grösser werden; die einzige Gefahr ist, dass unkontrollierbare Ungleichmässigkeiten der Füllung der Röhren bestehen können.

Die Glasröhre, in welcher die Substanz sich befindet, kann symmetrisch zu den Polschuhen genommen werden. **Freed** [3]) hat bei Messungen an Lösungen auch das reine Lösungsmittel symmetrisch zur Lösung angebracht, um die Korrektion für die Suszeptibilität des Lösungsmittels automatisch zu kompensieren.

Eine Variation dieser Methode für Flüssigkeiten ist die s.g. Steighöhemethode, wo der Höhenunterschied l der Meniski einer Lösung innerhalb und ausserhalb eines Magnetfeldes gemessen wird. Hier gilt wieder

$$\mathrm{l}\, \omega\, \varrho = \tfrac{1}{2}\, \varrho\, \omega\, \chi\, (|\mathrm{H}_1|^2 - |\mathrm{H}_2|^2)$$

also

$$\mathrm{l} = \tfrac{1}{2}\, \chi\, (|H_1|^2 - |H_2|^2) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Es sind viele Kunstgriffe angewandt worden um den sehr störenden

---

[1]) Die s.g. Gouy-Methode.

[2]) Man muss eine kleine Korrektion für die Entmagnetisierung anbringen weil $H_k \neq H_o$. Sieh § 8.

[3]) S. **Freed** und C. **Kasper**, *Phys. Rev. 36*, 1002, 1930.

Einfluss verunreinigter Meniski zu eliminieren, wofür wir auf die Originalabhandlungen verweisen [1]).

Wenn man die ponderomotorischen Messungen nicht in Vakuum ausführt, bestimmt man, wie man direkt einsieht, eigentlich den Unterschied der Volumsuszeptibilitäten von der Substanz, und dem Medium in dem die Substanz sich befindet.

Wo diese Volumsuszeptibilitäten für diamagnetische Gase, aber auch für Luft, sehr klein sind im Vergleich zu den Volumsuszeptibilitäten fester und flüssiger Körper, kann man hierfür leicht eine, oft sehr kleine, Korrektion anbringen.

Diese Tatsache wird aber auch zu Messzwecken verwendet, z. B. indem man die in einem Magnetfelde wirkende Kraft auf einen Probekörper in zwei verschiedenen Medien (z. B. in der zu messenden Lösung und in verdünntem Gas) bestimmt [2]), oder die Konzentration einer Lösung variiert, bis die auf eine Substanz wirkende Kraft null ist [3]).

Schliesslich kann noch erwähnt werden, dass viele Autoren, um die umständlichen Kalibrationen der Magnetfelder zu umgehen, die Messungen relativ zu einer von anderen Forschern gut gemessenen Substanz ausgeführt haben (oft wird sehr reines Wasser gewählt).

§ 12. Die Induktionsmethoden.

Die Induktionsmethoden sind in Prinzip unzweifelbar weniger empfindlich als die ponderomotorischen. Auch eignen sie sich weniger zu Absolutmessungen. Sie haben aber den grossen Vorteil, dass es viel leichter sein wird die Substanz zu verwechseln, um es möglich zu machen eine Reihe Substanzen an einem Mess-Tag bei einer Temperatur mit derselben Apparatur zu untersuchen. Der Nachteil der geringeren Empfindlichkeit wiegt bei manchen Untersuchungen, besonders bei den grossen Suszeptibilitäten, welche bei tiefen Temperaturen auftreten können, nicht so schwer. Aber es wäre doch notwendig bei mindestens einer Temperatur eine Absolutmessung nach einer ponderomotorischen Methode vor zu nehmen.

Die Methode, das Magnetfeld einer Spule umzuschalten und den Induktionsstoss in einer kleinen, mit Substanz gefüllten Spule ballistisch zu bestimmen, scheint bisher nur von **Woltjer**, in einer bisher unpublizierten Leidener Untersuchung, angewandt worden zu sein. Selbstverständlich wurde dabei auch eine zweite, entgegengesetzt geschaltete Spule zugefügt, um den vom primären Feld herrührenden Stromstoss zu eliminieren.

---

[1]) A. Piccard, *Diss. Zurich,* 1913.
E. Bauer und A. Piccard, *J. de Phys. 1,* 97, 1920.
W. J. de Haas und P. Drapier, *Ann. der Phys. 62,* 673, 1913.

[2]) H. Decker, *Ann. der Phys. 79,* 324, 1926.

[3]) S. Freed, *Journ. Am. Chem. Soc. 49,* 2456, 1927.
I. I. Rabi, *Phys. Rev. 29,* 174, 1927.

Für die Verwendung grösserer Magnete scheint die Methode ohne weiteres weniger geeignet, da die für das Umschalten [1]) des Primärstromes nötige Zeit nicht mehr verschwindend klein ist gegen die Schwingungsdauer der gebräuchlichen ballistischen Galvanometer. Es dürfte also besser scheinen die beiden Spulen dann zusammen im Magnetfeld umzuklappen.

Die Bestimmung der Selbstinduktion ist mit einer Art Wechselstrombrücke [2]), und auch mit Hilfe einer Schwingungskreis-Anordnung vorgenommen worden [3]). Besonders die letzte Methode scheint auf dem ersten Blick sehr aussichtsreich.

Weil es möglich scheint auf eine der für sehr genaue Kapazitätsmessungen gebrauchten Methoden, (z. B. die „heterodyne beat-method") Änderungen in $\sqrt{CL}$ von $1/10^7$ zu messen (wo L die Selbstinduktion ist und C die Kapazität) könnte die Genauigkeit in der Bestimmung von χ etwa 10^{-8} betragen, eine Genauigkeit, die für die Messung der meisten paramagnetischen festen Körper sehr befriedigend wäre.

Bei der Selbstinduktionsmethode bestimmt man $d\mu_H/dH$. Es soll aber nicht vergessen werden, dass, wenn auch die Frequenz nicht so hoch sein wird, dass das thermodynamische Gleichgewicht sich nicht mehr einstellen kann, doch die Magnetisierung ungefähr adiabatisch, und nicht isotherm verlaufen wird. Für Zimmertemperatur ist dies ohne Bedeutung, aber bei tiefen Temperaturen wird diese Komplikation so störend wirken, dass es sehr fraglich ist, ob diese Methode sich dann als Suszeptibilitätsmessung noch lohnen wird.

---

[1]) Bei tiefen Temperaturen muss um-, nicht ab-geschaltet werden, um die Komplikation von ungleicher Anfangs- und Endtemperatur zu vermeiden; da im Allgemeinen bei Magnetisierung eine Erwärmung und bei Entmagnetisierung eine Abkühlung des Preparats auftritt (Sieh § 5).

[2]) G. **Falkenberg**, *Z. f. Phys. 5*, 70, 1921.

J. **Kunz** und E. C. **Fritts**, *Phys. Rev. 19*, 425, 1922.

[3]) M. H. **Belz**, *Phil. Mag. 44*, 479, 1922.

Es wird dann die in einem Schwingungskreis auftretenden Verstimmung, wenn ein Preparat in der Spule gebracht wird, kompensiert durch Regulierung von variabelen Kapazitäten oder Selbstinduktionen. Mit Hilfe eines zweiten, konstanten, Schwingungskreises kann man die Verstimmung im ersten Kreis studieren.

§ 13. Suszeptibilitätsmessungen an Kristallen.

Auch für Kristalle wird oft die Faraday-Methode gebraucht.

Man arbeitet oft in Feldern, wo Feldstärke und Inhomogenität derselben senkrecht auf einander stehen. Legt man dann die X-Achse in die Richtung der Inhomogenität, und die Y-Achse in die Richtung des Feldes, so ist die Kraft in der X-Richtung:

$$K_X = \mu_X \frac{\partial H_X}{\partial x} + \mu_Y \frac{\partial H_Y}{\partial x} + \mu_Z \frac{\partial H_Z}{\partial x} = \mu_Y \frac{\partial H_Y}{\partial x} = \chi_Y \, \mathrm{m} \left(H_Y . \frac{\partial H_Y}{\partial x} \right) \quad . \; . \quad (37)$$

So kann man also χ in einer willkürlichen Richtung bestimmen.

Ist, so wie es für paramagnetische Substanzen bei nicht zu tiefen Temperaturen immer zutrifft, χ unabhängig vom Absolutwert von H, so kann man, wenn aus kristallographischen Daten die Richtungen, in welchen die Hauptsuszeptibilitäten liegen, bekannt sind, deren Werte aus 3 Messungen bestimmen.

Sind diese Lagen nicht völlig bekannt, so muss man mehrere Messungen verrichten.

Eine von Weiss [1]) eingeführte Methode macht es möglich, all diese Messungen, bis auf eine, zu umgehen durch Bestimmung von Drehmomenten, welche auf den Kristall in einem Felde wirken. Diese Drehmomente werden nl. gegeben durch

$$D = [\mu \, . \, H] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (38)$$

wie man einfach einsieht mittels einer Betrachtung, welche analog verläuft mit der am Schluss des § 3 gegebenen Ausführung.

Man bestimmt auf diese Weise nicht Absolutwerte sondern Differenzen von Suszeptibilitäten. Liegen z. B. die Hauptsuszeptibilitäten in den Achsenrichtungen, so wird das Drehmoment um die Z-Achse

$$D_Z = \mathrm{m} \, H_X \, H_Y \, (\chi_X - \chi_Y) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39)$$

Man kann die Drehmomente sehr leicht, z. B. mit einer Drehwagen-Methode bestimmen.

Es muss, wie gesagt, dann noch immer die Suszeptibilität in einer Richtung, oder die Suszeptibilität des verpulverten Kristalls, auf andere Weise bestimmt werden.

---

[1]) P. Weiss, *J. de Phys.* 6, 55, 1907.

P. Weiss und H. Kamerlingh Onnes, *Comm. Leiden*, 114.

L. C. Jackson, *Comm. Leiden*, 163.

Eine dritte Methode ist von RABI [1]) angewandt worden. Er bringt den Kristall in eine paramagnetische Lösung (welche von vornherein in Bezug auf den untersuchten Kristall gesättigt ist) deren Suszeptibilität variiert wird bis (in der FARADAY-Anordnung) die Kraft in der Richtung der Inhomogenität null ist. Die Suszeptibilität in der Feldrichtung ist dann gleich der, leicht nach der GOUY-Methode zu messenden, Suszeptibilität der Lösung. Kann man, wie RABI, Kräfte in zwei Koordinatrichtungen beobachten und ist der Kristall um die dritte Koordinatrichtung drehbar, so kann man in 3 Messungen Richtung und Grösse der Hauptsuszeptibilitäten bestimmen. Leider ist die Methode natürlich nur in beschränktem Temperaturintervall zu gebrauchen.

Bei sehr tiefen Temperaturen sind manche Suszeptibilitäten nicht mehr unabhängig von H. Das Gesetz, welchem der Verlauf der Magnetisierungskurve, als Funktion der Richtung im Kristall, folgt, ist noch nicht bestimmt worden (Sieh indessen theoretische Ansätze von KRAMERS, § 34).

Schliesslich machen wir noch die Bemerkung dass es, wo möglich, angewiesen scheint, alle zusammengehörige Messungen an einem einzelnen Kristall und mit derselben Apparatur vorzunehmen.

§ 14. Prinzipielles über andere Methoden.

Als Erscheinungen, welche mit dem Paramagnetismus zusammenhängen sind genannt worden: die paramagnetische Drehung der Polarisationsebene, die gyrostatischen Effekte und die Absorbtionsspektren, besonders bei tiefen Temperaturen [2]).

In § 31 wird diskutiert, wie die von JEAN BECQUEREL und DE HAAS behandelte paramagnetische Rotation mit der Suszeptibilität zusammenhängt. Hier sei nur angegeben, dass in vielen Fällen, die Drehung der Polarisationsebene des Lichtes, welches sich in der Richtung der magnetischen Kraftlinien eines magnetisierten Kristalles fortpflanzt, proportional zur Magnetisierung ist.

---

[1]) I. I. RABI, *Phys. Rev. 29*, 174, 1927.

[2]) Von den indirekten Methoden welche für den Ferromagnetismus angewandt worden sind sind die DUBOIS-sche (welche an der paramagnetischen Rotation erinnert) und die STRUTT-sche Methoden merkwürdig, die erste beruht auf dem magneto-optischen KERR-Effekt, die zweite auf dem Skin-Effekt.

H. DUBOIS, *Phil. Mag. 29*, 263, 1890.

M. J. O. STRUTT, Z. f. *Phys. 68*, 632, 1931.

In der Richtung der optischen Achse kann die Messung dieser Drehung mit einem Halbschattenanalysator, oder im Spektrum nach der weniger empfindlichen ,,Streifenmethode", mit Hilfe eines BABINETschen Kompensators, durchgeführt werden.

Für Einzelheiten und für die Methode, welche für die Drehung senkrecht zur Achse eines einachsigen Kristalls zu gebrauchen ist, muss auf die Originalabhandlungen verwiesen werden [1]).

Die gyrostatischen Effekte beruhen auf der Zusammenhörigkeit eines mechanischen Momentes zum magnetischen Moment einer Substanz. Man bestimmt bei gyromagnetischen Messungen das Verhältnis der beiden Momente.

Wenn eine Substanz magnetisiert wird, ändert sich das zum magnetischen Moment gehörige mechanische Moment. Weil das totale mechanische Moment aber konstant bleiben soll, muss die angegebene Änderung dieses Momentes, von einer entgegengesetzten Änderung, i. c. durch eine Drehung des ganzen Preparats, kompensiert werden.

Dieser Drehungseffekt, der EINSTEIN-DE HAAS-Effekt, kann durch Resonanz der Schwingungsperiode des aufgehängten stabförmigen Preparats mit der Periode eines variabelen Magnetfeldes, sehr verstärkt werden.

Für ferromagnetische Substanzen ist der Effekt vielfach beobachtet worden [2]), bei den paramagnetischen bisher nur für Dy_2O_3 [3]).

---

[1]) JEAN BECQUEREL und W. J. DE HAAS, *Comm. Leiden* 193*a*, 204*a*, 211*b*, 211*c*.

[2]) A. EINSTEIN und W. J. DE HAAS, *Verh. d. D. Phys. Ges. 17*, 152, 1915 und *18*, 173, 1916.

W. J. de HAAS, *Rapport du Conseil de Physique Solvay*, 1923.

J. Q. STEWARD, *Phys. Rev. 11*, 100, 1918.

G. BECK, *Ann. der Phys. 60*, 109, 1919.

G. ARVIDSSON, *Phys. Z schr. 21*, 88, 1920.

A. P. CHATTOCK und L. F. BATES, *Phil. Trans. A 223*, 257, 1923.

W. SUCKSMITH und L. F. BATES, *Proc. Roy. Soc. A 104*, 499, 1923.

[3]) W. SUCKSMITH, *Proc. Roy. Soc. A 128*, 276, 1930.

Vor Kurzem hat derselbe Verfasser noch eine Reihe schöner Messungen an Salzen der Fe-Gruppe publiziert n.l. an: $CrCl_3$, $MnCO_3$, $FeSO_4$, $CoCl_2$ und $CoSO_4$.

W. SUCKSMITH, *Proc. Roy. Soc. A 133*, 179, 1931.

Der **Barnett**-Effekt ¹), der sich bezieht auf das magnetische Moment, das bei gleichmässiger Drehung einer Substanz entsteht, ist bei paramagnetischen Substanzen noch nicht beobachtet worden.

Was die Absorbtionsspektren anbelangt, sei hier besonders auf die Untersuchungen von **Becquerel** ²), **Freed** ³) und Mitarbeitern hingewiesen. Die Deutung dieser Spektren scheint nicht einfach zu sein. Da aber nur Spektraluntersuchungen, und besonders Untersuchungen der **Zeeman**-Effekte, endgültigen Aufschluss geben können über die Lagen der energetischen Niveaus in den verschiedenen Körpern, sind diese für die restlose Erklärung der paramagnetischen Eigenschaften einer Substanz sicher von ausschlaggebender Bedeutung.

---

¹) S. J. **Barnett**, *Phys. Rev.* *6*, 339, 1915 und *10*, 7, 1917.

S. J. **Barnett** und L. J. H. **Barnett**, *Phys. Rev.* *17*, 104, 1921 und *20*, 90, 1922. *Phys. Zschr.* *24*, 14, 1923.

²) **Jean Becquerel**, *le Radium*, *4*, 328, 1907 und *5*, 5, 1908.

Jean Becquerel und H. **Kamerlingh Onnes**, *Comm. Leiden*, 103.

Jean Becquerel, H. **Kamerlingh Onnes** und W. J. **de Haas**, *Comm. Leiden*, 177.

³) S. **Freed** und F. H. **Spedding**, *Phys. Rev.* *34*, 945, 1929 und *38*, 670, 1931.

KAPITTEL III.

§ 15. Das BOHRsche Atommodell.

Die BOHRsche Atomtheorie versuchte ein mechanisches Modell für das Atom zu geben, das bestand aus einem Kern und einem System von Elektronen, welche sich alle in der klassischen Mechanik gehorchenden Bahnen bewogen. Nicht alle klassisch möglichen Bahnen sollten realisiert sein, aber nur diejenige welche von den s.g. Quanten-Bedingungen erlaubt wurden; in diesen erlaubten Bahnen sollten die Elektronen sich ohne Strahlungsdämpfung bewegen können [1]). Das Atom befindet sich dann in einem stationären Zustand; man sagt auch: auf einem gewissen Energieniveau, dem ein gewisser Termwort in der spektroskopischen Analyse entspricht.

Es hat sich später gezeigt, dass ein solches Modell nicht von allen Eigenschaften des Atoms Rechenschaft zu geben vermag, und die Quantenmechanik hat angegeben in wie weit, und wie, die uns interessierenden Grössen der Atome berechnet werden können.

Viele Folgerungen des BOHRschen Modells bleiben auch nach der Quantenmechanik gültig. Man muss dann aber oft sg. Verfeineringen (die zum grössten Teil schon experimentell vor der Geburt der Quantenmechanik gefunden wurden) in den Formeln anbringen.

Im Bilde des BOHRschen Atommodells und besonders mit Hilfe des aus ihm abgeleiteten Vektormodells, kann man indessen oft noch am Besten die Resultate der Rechnungen in übersichtlicher Weise zusammenfassen.

---

1) Das zweite Postulat der BOHRschen Atomtheorie lautet bekanntlich, dass die Frequenz ν einer Emissions- oder Absorbtionslinie $\nu = (W_1 - W_2)/h$ ist, wo W_1 und W_2 zwei Energieniveaus sind. Wir brauchen hierauf aber nicht näher einzugehen.

Bekanntlich wird eine der Bewegungsweisen eines Elektrons durch vier Quantenzahlen karakterisiert. In einem Zentralfeld kann man diese z. B. folgenderweise wählen: die Hauptquantenzahl n_i, die azimutale Quantenzahl l_i, die innere Quantenzahl j_i, und die magnetische Quantenzahl m_i.

Die Hauptquantenzahl n_i gibt die Schale an, in welcher das Elektron sich befindet (K-, L-, M-, N-, ... wenn $n_i = 1, 2, 3, 4 \ldots$) und l_i die Unterschale oder Zelle in der Schale. Es gilt: $0 \leq l_i \leq n_i - 1$. Es gibt in einer Schale also n_i Unterschalen. Jede von diesen ist verteilt in 2 STONERsche Untergruppen mit $j_i = l_i + \frac{1}{2}$ und $j_i = l_i - \frac{1}{2}$. Schliesslich kann m_i die Werte $-j_i, -j_i + 1, \ldots, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, \ldots, j_i - 1, j_i$ haben.

Nach dem s.g. PAULI-Verbot können im Atom nicht zwei Elektronen die gleichen vier Quantenzahlen haben.

In einer Untergruppe sind also höchstens $2j_i + 1$ Elektronen, in einer Unterschale also $4l_i + 2$, und in einer Schale $2 + 6 + 10 \ldots + 4n_i - 2 = 2n_i^2$ Elektronen. In der K-Schale finden also 2, in der L-Schale 8, in der M-Schale 18, in der N-Schale 32 Elektronen Platz. Dies stimmt bekanntlich mit der Struktur des periodischen Systems, und den Ergebnissen der RÖNTGEN-Spektraluntersuchungen.

§ 16. Die Bedeutung der Quantenzahlen; das Vektor-Modell.

Die Hauptquantenzahl n_i hängt mit der Dimension[1]) der Bahn zusammen.

Die Quantenzahl l_i ist ein Mass für das Impulsmoment der Bahnbewegung des Elektrons. Der Absolutwert des Impulsmomentes ist

$$|\lambda_i| = \sqrt{l_i (l_i + 1)} \frac{h}{2\pi} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (41)$$

Im Vektormodell stellt man das Bahnmoment durch den Vektor $\boldsymbol{l}_i$ vor, welcher den Absolutwert $\sqrt{l_i (l_i + 1)}$ hat und die Richtung des Momentes besitzt. Aus dem Vergleich von Gl (1) mit Gl (4), sieht man dass zu jedem mechanischen Moment λ, das von der Bahnbewegung der Elektronen herrührt ein magnetisches Moment

---

[1]) In einem COULOMBfeld kann man ansetzen

$$\overline{\frac{1}{r}} = \frac{Z_{\text{eff}}}{a n_i^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (40)$$

wo Z_{eff} die s.g. effektive Kernladung ist und $a = h^2/4\pi e^2 m$

λ.e/2mc gehört. In unserem Falle also ein magnetisches Moment der Grösse

$$\mu_i = \sqrt{l_i (l_i + 1)}\, \frac{h}{2\pi}\, \frac{e}{2mc} \quad \ldots\ldots\ldots (42)$$

Ist ausser den abgeschlossenen Unterschalen (welche, wie wir sehen werden, nicht zum Moment beitragen) nur noch ein solches Elektron vorhanden, so ist der Absolutwert des totalen Impulsmomentes des Atoms $\sqrt{j_i (j_i + 1)}$. h/2 π, wo j_i, wie gesagt, $l_i + \frac{1}{2}$ oder $l_i - \frac{1}{2}$ ist. Der Vektor j_i, der die Richtung des totalen Momentes, und den Absolutwert $\sqrt{j_i (j_i + 1)}$ hat, liegt nicht in derselben Richtung wie l_i. Die Differenz der beiden Vektoren ist der Vektor s_i. Dessen Absolutwert ist $\sqrt{s_i (s_i + 1)} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$ wo s_i also gleich $\frac{1}{2}$ ist.

Durch die Bedingungen für die Absolutwerte von l_i, j_i und s_i werden die möglichen gegenseitigen Orientierungen zu einer endlichen Anzahl beschränkt.

Das Gesamtimpulsmoment des Atoms kann man sich in Einheiten h/2π vektoriell zusammengesetzt denken aus dem Bahnmoment l_i und dem s.g. Spinmoment s_i [1]). Das Elektron kann man sich nl. nach UHLENBECK und GOUDSMIT [2]) vorstellen als einen Kreisel mit einem mechanischen Momenten der Grösse $\frac{1}{2} \sqrt{3}$. h/2 π.

Das magnetische Moment, welches dem Kreisel zukommt, ist nun $\sqrt{3}$. (h/2π). e/2 mc. also ist das Verhältniss beim Spin zwischen magnetischem und mechanischem Momente, zweimal so gross wie bei der Bahnbewegung.

Das totale magnetische Moment des Atoms bekommt man aus der vektoriellen Zusammensetzung der magnetischen Momente von Spin und Bahn. Wie wir bei der Behandlung des ZEEMAN-Effekts sehen werden, ist die Projektion des magnetischen Momentes auf die Richtung des mechanischen Momentes eine sehr wichtige Grösse.

---

[1]) Wir gebrauchen eine neue Formulierung des Vektormodells, die auch in „L. PAULING and S. GOUDSMIT: *Linespectra*" angegeben wird. In der älteren Fassung waren die Absolutwerte der Vektoren l_i, j_i, und s_i, und die „Verfeinerungen" traten viel mehr in den Vordergrund; man durfte diese Vektoren dann z. B. nicht, wie die der neuen Formulierung einfach geometrisch zusammensetzen. Im Zusammenhang hiermit scheint es auch übersichtlicher dem Spinmoment den Wert $\frac{1}{2} \sqrt{3}$. h/2π zuzuschreiben (Absolutwert) als den gebräuchlichen Wert $\frac{1}{2}$. h/2π (Komponente einer bestimmten Richtung entlang).

[2]) G. E. UHLENBECK und S. GOUDSMIT, *Naturw. 13*, 953, 1925.

Diese Projektion sei:

$$\mu_j = j_i \cdot g \cdot \frac{h}{2\pi} \frac{e}{2mc} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

g ist der s.g. Aufspaltungsfaktor von LANDÉ[1]. Durch Auswertung der Kosini findet man für g den Ausdruck:

$$g = 1 + \frac{j_i(j_i+1) + s_i(s_i+1) - l_i(l_i+1)}{2\, j_i(j_i+1)} \quad \ldots\ldots \quad (44)$$

Ist also $l_i = 0$, hat man also nur mit den Spinmomenten zu tun, so ist $g = 2$. Wäre in der Form. (44) $s_i = 0$ so wäre $g = 1$. Wie man einfach einsieht, ist g das Verhältniss der Projektion des magnetischen auf der Richtung des mechanischen Momentes, zu dem magnetischen Moment, das zu gleichem totalen mechanischen Moment gehören würde, wenn diese nur von Bahnbewegungen herrührte.

Bestimmt man auf irgend eine Weise die Komponente des mechanischen Momentes in einer bestimmten Richtung, so wird man für diese Komponente $m_i \, . \, h/2\pi$ finden, wo m_i einen der Werte: j_i, $j_i - 1 \ldots\ldots -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \ldots\ldots, j_i - 1, j_i$ hat. (Diese Komponente bleibt also stets kleiner als der Absolutwert des Momentes).

Mittels einer Bestimmung des Aufspaltungsfaktors kann man also die Anteile, welche Bahnmoment und Spinmoment am Totalimpuls haben, trennen.

§ 17. Der Fall mehrerer Elektronen.

Betrachtet man den Fall mehrerer Elektronen, so müssen die mechanischen und magnetischen Momente der einzelnen Elektronen vektoriell zusammengesetzt werden. Aus dem im vorigen Paragraphen über die Bedeutung der Quantenzahlen gesagten, folgt dass vollständig besetzten Untergruppen und Unterschalen weder ein mechanisches, noch ein magnetisches Moment zukommt. Was die übrigen Elektronen anbelangt, ihre Momente können bei festgelegter n_i und l_i im Allgemeinen noch auf verschiedene, mit dem PAULI-Verbot verträgliche, Weisen zusammengesetzt werden.

In den meisten der bisher analysierten Spektren tritt das s.g. RUSSELL-SAUNDERSsche Koppelungsschema auf. Das heisst: die

---

[1] A. LANDÉ, *Z. f. Phys.*, *5*, 231, 1921.

Spinimpulsmomente werden zusammen zu einem Gesamtspinmoment $s \cdot h/2\pi$ gekoppelt, und die Bahnmomente zu einem Gesamtbahnmoment $l \cdot h/2\pi$; diese beiden werden dann zum Gesamtmoment des Atoms $j \cdot h/2\pi$ zusammengesetzt. Diese stufenweise Zusammensetzung der Vektoren bedeutet das Folgende: die Spinvektoren der verschiedenen Elektronen prezedieren schnell um ihre Resultante, die Bahnvektoren auch schnell um die ihrige, diese beiden prezedieren viel langsamer um die Totalresultante, welche fest im Raum orientiert ist. Es scheint also dass die Wechselwirkungen der Spins unter einander und der Bahnen unter einander, viel stärker ist, als die zwischen Spin und Bahn des einzelnen Elektrons. Auf die Ursachen dieser unerwartet starken Wechselwirkungen besonders zwischen den Spins, soll hier nicht näher eingegangen werden, und muss auf theoretische Verhandlungen verwiesen werden [1]).

Es treten aber auch andere Koppelungsarten auf; besonders wenn die Elektronen zu verschiedenen Schalen gehören, ist die Wechselwirkung zwischen Spin und Bahn-Moment des einzelnen Elektrons von relativ grösserer Bedeutung.

Die Koppelung geschieht solcherweise, dass die Absolutgrösse des Gesamtspinmomentes $\sqrt{s(s+1)} \cdot h/2\pi$ ist; wo s eine ganze Zahl ist, wenn die Anzahl der Elektronen gerade ist, und eine halb-ganze Zahl, wenn die Elektronenanzahl ungerade ist. Ebenso ist die Absolutgrösse des Gesamtbahnmomentes $\sqrt{l(l+1)} \cdot h/2\pi$ wo l eine ganze Zahl ist.

Die Zusammensetzung der mechanischen, ebenso wie der magnetischen Momente geschieht vektoriell; zu den im vorigen Absatz genannten Bedingungen für die Absolutwerte von s und l kommt auch noch die Bedingung, dass j den Absolutwert $\sqrt{j(j+1)}$ hat, wo j ganz oder halbzahlig ist je nachdem s ganz oder halbzahlig ist. Deshalb ist nur eine endliche Anzahl von Zuständen möglich.

Für die Projektion des magnetischen auf der Richtung des mechanischen Momentes schreibt man wieder:

$$\mu_j = j\, g \frac{h}{2\pi} \frac{e}{2mc},$$

wo wieder gilt [2])

---

[1]) z. B. W Heisenberg, *Z. f. Phys.*, *41*, 239, 1927.

[2]) Es bleibt immer $0 \leq g \leq 2$.

$$g = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}.$$

Da die Projektionen von s_i und l_i auf einer bestimmten Richtung immer höchstens gleich $s_i = \frac{1}{2}$ und l_i sind, gilt stets $s \leq \Sigma s_i$, und $l \leq \Sigma l_i$.

Man sagt, dass die verschiedenen Zustände, welche möglich sind bei einer Kombination von einem s- und einem l-Wert ein Multiplett bilden. Die Zahl $2s + 1$ wird die Multiplizität genannt.

§ 18. Termnomenklatur.

Will man einen gewissen stationären Zustand, ein Energieniveau, einen Spektralterm [1]) andeuten, so gibt man erst an in welchen Unterschalen die Elektronen sich befinden. Ein Elektron mit Quantenzahlen n_i, $l_i = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ nennt man ein n_is-, n_ip-, n_id-, n_if-, n_ig-, ... Elektron. [2]) Die Anzahl der Elektronen in einer Unterschale wird oben hinter der Andeutung der Unterschale gestellt.

Die Ar-Konfiguration mit zwei s-Elektronen in der K-Schale, mit zwei 2s- und sechs 2p-Elektronen in der L-Schale, und schliesslich zwei 3s- und sechs 3p-Elektronen in der M-Schale, wird dargestellt durch:

$$1s^2;\ 2s^2,\ 2p^6;\ 3s^2,\ 3p^6.$$

Dahinter schreibt man den Charakter des Termes. Einen Term mit $l = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ nennt man einen S-, P-, D-, F-, G-,... Term. Als Indizes werden dann noch die Werte von $2s + 1$ (Multiplizität) und j beigefügt: ${}^{2s+1}P_j$.

${}^6G_{3/2}$ bedeutet also: $l = 4$ (wegen G), $s = {}^5/_2$, (wegen Sextett; 6) $j = {}^3/_2$.

Der Grundterm des dreifach ionisierten freien Chromatoms wird z. B. bezeichnet mit:

$$1s^2;\ 2s^2,\ 2p^6;\ 3s^2,\ 3p^6,\ 3d^3\ .\ {}^4F_{3/2}$$

weil $l = 3$, $s = {}^3/_2$, $j = {}^3/_2$.

Weitere Beispiele findet man in § 26.

---

[1]) Der Termwert ist die spektroskopische (kinetische + potentielle) Energie dividiert durch + hc. Manche Verfasser haben durch — hc dividiert; um Verwirrung zu vermeiden gebrauchen wir immer die erstere Bezeichnung. Der niedrigste Term gehört also zum niedrigsten Energieniveau.

[2]) Früher schrieb man auch oft n_{i1}-, n_{i2}-, n_{i3}-, n_{i4}-, n_{i5}-, Elektron z. B. A. SOMMERFELD, *Atombau und Spektrallinien* 4e Aufl. 1924 später auch n_{i0}-, n_{i1}-, n_{i2}-, n_{i3}-, n_{i4}- Elektron, A. SOMMERFELD, l. c. 5e Aufl. 1931.

§ 19. Der ZEEMAN-Effekt.

Auf ein freies Atom, welches ein magnetisches Moment besitzt, wirkt in einem äusseren Magnetfelde ein Kräftepaar. Infolgedessen, führt das mechanische Moment, wenn es immer dieselbe Richtung hat als das magnetische Moment eine s.g. LARMORprezession aus, mit der Frequenz H.g.e/2mc um die Feldrichtung als Achse. Auch wenn die beiden Momente nicht dieselbe Richtung haben, aber die Prezession von l und s um j sehr schnell ist gegen eine LARMORprezession, führt das mechanische Moment solch eine Prezession aus.

In erster Näherung ist die Änderung der kinetischen Energie durch diese Prezession gleich dem Produkt der Prezessionsfrequenz mit der Projektion des mechanischen Momentes in der Feldrichtung, also:

$$\triangle W_K = g \frac{h}{2\pi} \frac{e}{2mc} (j . H) = \bar{\mu}_H . H \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (45)$$

da das mittlere magnetische Moment in der Feldrichtung, wegen der schnellen Prezession um die Richtung des mechanischen Momentes:

$$\bar{\mu}_H = \frac{(j . H) g}{H} \frac{h}{2\pi} \frac{e}{2mc} \quad \text{ist.}$$

In § 5 haben wir gesehen, dass die Änderung der kinetischen Energie (die Änderung der Feldenergie fällt gegen den Induktiosstoss heraus) auch die der spektroskopischen Energie ist (und auch noch in der BOLZTMANNschen Verteilungsfunktion auftritt).

Die Projektion m_j von j auf der Feldrichtung kann (analog an der von j_i in willkürlicher Richtung) nur einen der 2j + 1 Werte — j, — j + 1, ... j — 1, j haben.

Man sieht also dass die Energie eines Zustandes des freien Atoms sich im Magnetfeld in 2j + 1 Energien aufspaltet, welche aequidistant in energetischen Abständen von $g . (h/2\pi) . (e/2mc) . H$ liegen ¹), und mittlere magnetischen Momente in der Feldrichtung der Grössen $m_j . g . (h/2\pi) . e/2mc$ haben ²).

---

¹) Es wird nun auch der Namen „Aufspaltungsfaktor" für g klar.

²) Wir gebrauchen den Namen ZEEMAN-Effekt für diese Aufspaltung der spektroskopischen Energieniveaux im Magnetfelde; die Aufspaltung der Spektrallinien, die auch mit demselben Namen angedeutet wird, hängt damit eng zusammen mittels der BOHRschen Frequenzbedingung $h\nu = W_1 - W_2$, wo W_1 und W_2 zwei spektroskopische Energieniveaus sind und ν die Frequenz einer ausgesandten oder absorbierten Spektrallinie ist.

Die so erhaltenen Zustände sind „einfach", das heisst: sie sind durch äussere Einflüsse z. B. elektrische Felder nicht mehr aufzuspalten. Man sagt auch: die (2j + 1)-fache Entartung eines Zustandes wird durch das Magnetfeld aufgehoben. Einfache oder nichtentartete Zustände haben in der Statistik alle das aprioristische Gewicht $g_h = 1$. D. h.: bei unendlich hoher Temperatur treten sie alle gleich häufig auf; und bei einer Temperatur T mit der relativen Häufigkeit $g_h \, e^{-W_h/kT} = e^{-W_h/kT}$. Ein k-fach entarteter Zustand hat das aprioristische Gewicht $g_h = k$.

Ist die **Larmor**prezession nicht mehr langsam gegen die Prezession von l und s um j, so tritt der s.g. **Paschen-Back**-Effekt ein. Im vollständigen **Paschen-Back**-Effekt prezedieren l und s jedes für sich um die Feldrichtung, und ist die Wechselwirkung zwischen Spins und Bahnen erst in zweiter Näherung von Bedeutung. Da dieser Fall im Paramagnetismus nicht vorkommt diskutieren wir ihn nicht weiter.

§ 20. Das magnetische Moment bei BOLTZMANN-Verteilung über die Energieniveaus.

Spalten die Energieniveaus eines Systems isolierter Atome sich in einem äusseren Magnetfelde auf, so wird sich im thermodynamischen Gleichgewicht eine **Boltzmann**-Verteilung über die **Zeeman**-Komponenten eingestellt haben. Die Komponente des magnetischen Momentes in der Feldrichtung, welches das System dabei bekommt, kann man in einfacher Weise angeben.

Der Allgemeinheit wegen, wollen wir jetzt annehmen, dass die Atome nicht frei sind, sondern noch von ihren Nachbarn beeinflusst werden und zwar in solcher Weise dass man rechnen darf alsob jedes Atom sich in einem äusseren Kraftfelde befindet. Die magnetischen Atome aber mögen unabhängig von einander sein, und ferner möge jedes Niveau noch mindestens zweifach entartet sein [1].

Das magnetische Moment in der Feldrichtung ist dann pro Atom:

$$\mu_H = \frac{\Sigma_{(m)} \, g_m \, \mu_H(m) \, e^{-W_m/kT}}{\Sigma_{(m)} \, g_m \, e^{-W_m/kT}}, \quad \ldots \ldots (46)$$

wo die Zahl m die **Zeeman**-Komponenten der verschiedenen Niveaus karakterisiert und W_m den zu ihnen gehörigen Wert der spektroskopischen Energie angibt. Diese ist gleich der Summe der potentiellen und kinetischen Energien, in erster Näherung wird sie gegeben durch:

---

[1] Sieh § 21 für einen allgemeineren Fall.

$$W_m = W_h - \mu_H(h)\, H,$$
$$\text{wo } \mu_H(h) = \mu_H\,(m).$$

Wir nehmen an, was in vielen Fallen zutreffen wird, dass auch immer ein zweiter Zustand mit der spektroskopischen Energie $W_{-m} = W_h + \mu_H(h)\, H$ besteht. Nimmt man dann diese Zustände immer paarweise zusammen und entwickelt man die Exponentialfunktionen nach Potenzen von 1/T, so bekommt man in zweiter Näherung:

$$\mu_H = \frac{\overline{\mu_H^2\,(h)}\ .\ H}{k\,(T - \theta\,.\,.\,)}\ , \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (47)$$

wo

$$k\,\theta = \frac{\Sigma_{(h)}\, W_h\, g_h}{\Sigma_{(h)}\, g_h} - \frac{\Sigma_{(h)}\, W_h\, g_h\, \mu_H^2\,(h)}{\Sigma_{(h)}\, g_h\, \mu_H^2\,(h)} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (48)$$

und

$$\overline{\mu_H^2\,(h)} = \frac{\Sigma_{(h)}\, \mu^2_H\,(h)\, g_h}{\Sigma_{(h)}\, g_h} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (49)$$

Ist kT gross gegen die Energieunterschiede bei verschwindendem Felde, so bekommt man also in diesem Falle in zweiter Näherung das Curie-Weisssche Gesetz. $k\,\theta$ ist dann gleich dem energetischen Abstand zweier Schwerpunkte der Gruppe niedriger Niveaus: des „statistischen Schwerpunktes" (jedes Niveau hat sein statistisches Gewicht) und des magnetischen Schwerpunktes (jedes Niveau hat überdies noch das Gewicht $\mu_H^2\,(h)$).

§ 21. Der Paramagnetismus nach der Quantenmechanik.

Die im vorigen Paragraphen gegebenen Ausführungen bleiben zum Teile gültig, wenn man quantenmechanisch rechnet, und damit auch das gefundene Resultat dass man als Folge der Boltzmann-Verteilung über die Zeeman-Aufspaltungen einiger Niveaus, bei genügend hoher Temperatur, eine paramagnetische Suszeptibilität erwarten muss, die dem Curie-Weissschen Gesetz folgt.

Man muss daran denken, dass nach der Quantenmechanik eine willkürliche Funktion der Koordinaten und Impulse des Systems, als Matrix dargestellt werden soll. Ist diese Matrix, zugleich mit der Energie eine Diagonalmatrix, so ist jedem Energieniveau ein gewisser Wert dieser Funktion zuzuschreiben. Für das magnetische Moment ist dies z. B. der Fall, wenn l oder s null ist. Dann bleiben die oben gegebenen Ausführungen streng richtig.

Ist weder s noch l null, so enthält die Vektormatrix des magnetischen Momentes auch Nichtdiagonalelemente und treten Komplikationen auf.

Die quantenmechanische Berechnung zeigt 1), dass jedem **Zeeman**niveau (m) im Feld ein magnetisches Moment:

$$\mu_H(m) = M_H(m, m) + H \Sigma_{(m')} \frac{2\,|M_H(m, m')|^2}{W_{m'} - W_m} \quad . \; . \quad (50)$$

zukommt, wo $M_H(m, m')$ ein Element der Matrix des magnetischen Momentes in der Feldrichtung, und W_m und $W_{m'}$ die Energien der Zustände (m) und (m') bedeuten.

Ausser dem Moment, unabhängig von der Grösse des Magnetfeldes, das jeder **Zeeman**-Komponente zukommt, tritt also auch noch ein „Polarisationsmoment" auf, welches von den Nichtdiagonalelementen bestimmt wird. Ein Nichtdiagonalelement gibt im tiefsten der zwei Zustände, zu welchen es gehört, Anlass zu einem Beitrag positiven Vorzeichens, im höheren zu einem Beitrag negativen Vorzeichens. Der erste Beitrag wäre als paramagnetisch, der zweite als diamagnetisch zu bezeichnen. Sind die statistischen Gewichte der beiden Zustände gleich, so sind die beiden Terme, bis auf das Vorzeichen, gleich.

Setzen wir zur Vereinfachung H_K gleich H_{eff} (sieh § 8), was darauf hinausläuft dass wir den **Lorentz**faktor weglassen (der doch nur bei den sehr grossen Suszeptibilitäten, welche bei den Temperaturen des flüssigen Wasserstoffs und Heliums auftreten können, wichtig ist), so können wir, wenn k T gross gegen die **Zeeman**-Aufspaltungen ist, für die Suszeptibilität: $\chi = N \mu_H / H$ schreiben:

$$\chi = N \frac{\Sigma_{(h)} g_h e^{-W_h/kT} \cdot \left[\frac{|M_H(h, h)|^2}{kT} + \Sigma_{(h')} \frac{2\,|M_H(h, h')|^2}{W_h' - W_h} \right]}{\Sigma_{(h)} g_h e^{-W_h/kT}} \; . \; (51)$$

wo N die Totalanzahl der betrachteten magnetischen Moleküle im Gramm ist. Wir haben in (51), wenn zu einem Niveau (m) ein Niveau (-m) im Sinne des vorigen Paragraphen gehört, angesetzt:

$$M_H(h, m')|^2 = \tfrac{1}{2} [\,|M_H(m, m')|^2 + |M_H(-m, m')|^2] = \tfrac{1}{2}\,|M_H(m', h)|^2$$
$$\text{und } g_h = g_m + g_{-m} = 2.$$

In anderen Fallen ist einfach (h) für (m) eingeführt worden.

---

1) Sieh besonders J. H. van Vleck, *Phys. Rev.*, *31*, 587, 1928.

Im Allgemeinen wird also der Verlauf der Suszeptibilität als Funktion von T sehr kompliziert sein.

Kann man aber die Energieniveaus in zwei Gruppen verteilen, derart dass die Abstände der Niveaus der einen Gruppe (die niedrigen Niveaus (h, h') zum niedrigsten Niveau klein gegen kT sind; die Abstände der zweiten Gruppe (die hohen Niveaus (h'') zu diesem Niveau aber gross gegen kT sind, so findet man, bei Entwicklung der Exponentialfunktionen in zweiter Näherung:

$$\chi = \frac{N \Sigma_{(h)} \Sigma_{(h')} g_h \, |M_H(h, h')|^2}{\Sigma_{(h)} g_h \, . \, k(T - \theta)} + N\alpha \quad \ldots\ldots \quad (52)$$

wo

$$\alpha = \frac{2 \Sigma_{(h)} \Sigma_{(h'')} \dfrac{g_h \, |M(h, h'')|^2}{W_{h''} - W_h}}{\Sigma_{(h)} g_h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

und

$$k\theta = \frac{\Sigma_{(h)} g_h W_h}{\Sigma_{(h)} g_h} - \frac{\Sigma_{(h)} \Sigma_{(h')} g_h W_h \, |M(h, h')|^2}{\Sigma_{(h)} \Sigma_{(h')} g_h \, |M(h, h')|^2} \quad \ldots \quad (54)$$

Ausser dem erwarteten (meist kleinen) Temperatur-unabhängigen Term als Folge der Polarisationsmomente finden wir also wieder das CURIE-WEISSsche Gesetz.

Es scheint zunächst sonderbar, dass im Zähler die Diagonal- und die Nichtdiagonalelemente zwischen den niederen Zuständen, eine gleiche Rolle spielen. Dies wird aber klar, wenn man bedenkt, dass von zwei Niveaus als Folge des Polarisationsmomentes, das untere einen paramagnetischen Beitrag liefert, das obere aber einen diamagnetischen. Ist die Verteilung den aprioristischen Gewichten gemäss, so sind beide Beiträge, bis auf das Vorzeichen gleich und heben sie sich also gegenseitig auf. Da aber die Temperatur nicht unendlich hoch ist, resultiert ein paramagnetischer Effekt, der desto kleiner ist, je mehr die Verteilung den aprioristischen Gewichten gemäss ist, also je höher die Temperatur ist. In erster Näherung bekommt man aus dieser Betrachtung des Nichtdiagonalelementes zwischen zwei Zuständen einen Paramagnetismus, der umgekehrt proportional mit T ist.

Weiter sieht man dass k θ wieder als Differenz zweier energetischen Schwerpunkte auftritt; bei dem magnetischen Schwerpunkt spielen nun auch die Polarisationsmomente eine Rolle.

Man muss sich nun nicht etwa vorstellen, dass der Temperatur-unabhängige Term, der jedem Energieniveau zukommt, erst bei der quantenmechanischen Behandlung hervortreten kann, und nicht in unserem halb-klassischen Bilde des Vektormodells zu demonstrieren wäre. Im freien Atom hat z. B. der Spinvektor für sich, die Tendenz zweimal so schnell im Magnetfeld zu prezedieren als der, mit ihm gekoppelten, Bahnvektor. Ist diese Koppelung nun nicht unendlich stark, so äuszert sich diese Tendenz in einer kleinen Ungleichmässigkeit in der Prezession um j, welche Anlass gibt zu einem kleinen Polarisationsmomente, positiven oder negativen Vorzeichens, proportional mit H.

Auch die STARK-Effekte in elektrischen Feldern, können die Ursache des Auftretens von Nichtdiagonaltermen sein, welche dann zwischen den Komponenten einer STARK-Effektaufspaltung bestehen. Sowie im vorigen Beispiel eine Konkurrenz da war zwischen Spin-Bahn-Koppelung und Magnetfeld, besteht sie hier zwischen elektrischem Feld und Magnetfeld. Wegen der relativen Kleinheit der STARK-Effektaufspaltungen, können diese Beiträge zur Suszeptibilität bei tiefen Temperaturen sehr beträchtliche Werte haben.

Es muss noch bemerkt werden, dass mit dem Polarisationsmoment auch natürlich noch eine Änderung der spektroskopischen Energie zusammen geht¹) (es gilt $\mu_H = -dW_{Sp}/dH$, sieh § 4), dass aber diese Änderung meistens zu klein ist, um im BOLTZMANN-Faktor merklichen Einfluss auszuüben.

§ 22. Die Interpretation der CURIE-Konstante und der Konstante Θ.

Nach Gl (52) tritt als CURIE-Konstante (sich § 9) der Ausdruck auf:

$$C = N_L \frac{\Sigma_{(h)} \Sigma_{(h')} g_h \, | M_H(h, h') |^2}{\Sigma_{(h)} g_h} = N_L \frac{\Sigma_{(m)} \Sigma_{(m')} g_m \, | M_H(m, m') |^2}{\Sigma_{(m)} g_m} \quad (55)$$

Nun besagt das s.g. Prinzip der spektroskopischen Stabilität, welches von BORN, HEISENBERG und JORDAN²) aufgestellt und später von VAN VLECK³) allgemein bewiesen wurde, folgendes: Hat man eine willkürliche quantentheoretische Grösse F, also

---

¹) Der s.g. quadratische ZEEMAN-Effekt.

²) M. BORN, W. HEISENBERG und P. JORDAN, *Z. f. Phys.*, *35*, 557, 1926.

³) J. H. VLECK, *Phys., Rev.*, *29*, 727, 1927.

Vgl. besonders auch M. BORN und P. JORDAN, *Elem. Quantenmechanik*.

eine Matrix, die eine Funktion der Koordinaten und Impulse eines Systems ist, und hat die Quantenzahl t geringen ¹) Einfluss auf die Energie des Systems, so ist $\Sigma_{(m)} \Sigma_{(m')} F(s, t; s' t')$ wo s die anderen Quantenzahlen symbolisiert, unabhängig von der Weise, auf welche die Entartung des Systems in Bezug auf die Quantenzahl t aufgehoben wird.

Also sieht man, dass wenn man für $F(s, t; s' t')$ nimmt: $M_H^2 (s, m; s, m')$ die Curie-Konstante unabhängig sein wird von Art und Grösse der Aufspaltung der Grundterme; dies gilt zwar nur wenn die Aufspaltungen klein sind gegen die Abstände zu den hohen Niveaus, aber diese Bedingung ist von vornherein erfüllt, da kT gross gegen die Aufspaltungen der niedrigen Niveaus und klein gegen die Abstände zu den hohen Niveaus ist.

Die obige Betrachtung ist sehr wichtig für das Verständniss des Benehmens der paramagnetischen Substanzen. Sie gibt an, warum bei verschiedenen Stoffen, wo zwar immer dasselbe Ion vorliegt, dasselbe aber bestimmt nicht als frei betrachtet werden kann, die Curie-Konstante denselben Wert hat, wie sie beim freien Ion haben würde; die einzigen Bedingungen sind, dass die durch die Störungen der Nachbaratome bedingten Aufspaltungen klein gegen kT sind, und dass die Abstände der anderen Niveaus des freien Ions zum Grundterm gross gegen kT sind.

Die Grösse von θ aber wird gerade von den genannten kleinen Aufspaltungen bestimmt und ist, wie gesagt, einfach als Differenz zweier energetischen Schwerpunkte aufzufassen. Und es ist zu verstehen dass sie von Substanz zu Substanz variieren kann. ²)

Eine andere Frage ist, ob in allen vorkommenden Fällen θ auf diese Weise verstanden werden soll.

Von Weiss und seinen Mitarbeitern ist die Existenz von einem θ stets aufgefasst worden als Zeichen des Bestehens eines ,,molekularen Feldes.'' Denkt man sich nl., dass die potentielle Energie einen Term enthält proportional mit der Magnetisierung, so bekommt man, wenn man nur ein einziges Grundniveau des freien Ions betrachtet, streng das Curie-Weisssche Gesetz (über einer gewissen Temperatur: der Curie-Temperatur; und bei nicht allzu grossen Feldern). Weiss ³) hat versucht diese Auffassung, die dem Bilde entspricht,

---

¹) streng: keinen Einfluss.

²) Es soll hier aber ausdrücklich bemerkt werden dass auch θ nach Gl (54) berechnet in vielen Fällen in erster Näherung null zu sein scheint.

³) z. B. P. Weiss, *J. de Phys.*, *6*, 661, 1907 und *1*, 1, 1930.

das man sich vom Paramagnetismus ferromagnetischer Metalle über der CURIE-Temperatur gemacht hat, und die auch für flüssige Stickstoff-Sauerstoff-Gemische zuzutreffen scheint, zu stützen durch das Argument, dass die Messresultate auf eine strenge Gültigkeit des Gesetzes hinweisen und die Deutung des θ-Gliedes als zweiter Term einer Reihenentwicklung kaum zulassen würden.

Wir sind nicht dieser Meinung, und möchten bemerken, dass nur Messungen, wo T sich um eine Grössenordnung ändert oder bis zur Grössenordnung von θ herabgeht, diese Frage entscheiden könnten. Und gerade aus derartigen Messungen haben wir den Eindruck bekommen dass das CURIE-WEISS-sche Gesetz nur gilt, wenn $\theta \ll T$.

Da die Aufspaltung der Grundterme durch Wechselwirkung mit den Nachbaratomen, uns eine natürlichere [1]) Erklärung des Gesetzes zu liefern scheint als eine ziemlich rätselhafte Wechselwirkung zwischen oft ziemlich weit von einander liegenden magnetischen Atomen [2]), scheint es angebracht für die θ's in der Gruppe der Seltenen Erden vorläufig erstere Erklärung anzunehmen. Andererseits scheint für das Verständniss der Eigenschaften der anhydrischen Salze der Fe-Gruppe eine starke Wechselwirkung zwischen den magnetischen Atomen wirklich wichtig zu sein.

Auch schon DEBIJE [2]) und CABRERA und PALACIOS [3]) haben versucht in einer mit unseren Ausführungen verwandten Weise, θ zu deuten.

Mit dem Argument, das WEISS selber und seine Schüler aus der Unabhängigkeit von der Konzentration von θ bei einigen Lösungen, gegen ihre Auffassung anführen, sind wir nicht einverstanden; vielmehr scheint uns von sekundären Ursachen in diesen Fällen mit kleinen Temperaturintervallen ein θ vorgetäuscht zu sein.

§ 23. Der Paramagnetismus bei abnehmender Temperatur.

Wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, kann die Gültigkeit des CURIE-WEISSschen Gesetzes in einem Temperaturintervall so interpretiert werden, dass die Energieniveaus des

---

[1]) Sieh jedoch Note 2 auf der vorigen Seite.

[2]) P. DEBIJE, *Phys. Zschr.*, *27*, 72, 1926.

[3]) B. CABRERA und J. PALACIOS, *An. Soc. Esp. Fis. y Quim.*, *24*, 297, 1926.

Ions auseinander fallen in „hohe" und „niedrige" Niveaus in Bezug auf kT.

Wenn wir dann zu tieferen Temperaturen übergehen, und kT von der Grössenordnung der Energiedifferenzen der „niedrigen" Niveaus wird, sind Abweichungen vom Gesetze zu erwarten. Der Verlauf der Suszeptibilität wird dann durch Gl (51) wiedergegeben.

Bei noch tieferen Temperaturen aber, wenn kT von der Grössenordnung der **Zeeman**-Aufspaltungen wird (Heliumgebiet), treten neue Komplikationen auf: χ wird dann feldabhängig.

Die Phänomene vereinfachen sich sehr, wenn dann ohne Magnetfeld keine Niveaus mehr vorkommen, welche auf einem Abstand, klein gegen kT vom Grundniveau liegen.

Man kann die magnetischen Momenten, die zu den Komponenten der **Zeeman**-Aufspaltung gehören, mit Rücksicht auf dem **Boltzmann**faktor summieren, und bekommt dann eine sg. paramagnetische Sättigungskurve [1]) deren Gestalt von Anzahl und Abstand der Komponenten abhängt [2]). Die Nichtdiagonalelemente der Matrix des magnetischen Moments haben dann kaum einen Einfluss (die Wechselwirkungsmomente der **Zeeman**-Niveaus untereinander verschwinden):

$$\mu_H = \frac{\Sigma_m |M_H(m, m)|\, e^{\frac{|M_H(m, m)|H}{kT}}}{\Sigma_{(m)}\, e^{\frac{|M_H(m, m)|H}{kT}}} \quad \ldots\ldots \quad (56)$$

Ist das Grundniveau nur zweifach entartet, so hat die Sättigungskurve die Form eines tgh.:

$$\mu_H = |M_H(m, m)|\, \mathrm{tgh} \frac{|M_H(m, m)| \,.\, H}{kT} \quad \ldots\ldots \quad (57)$$

für jede Richtung des Kristalls (sieh § 32).

Ist das Grundniveau einfach, so existiert nur ein Temperaturunabhängiger Paramagnetismus.

Kommen auch ohne Feld noch Aufspaltungen vor, so muss man bei schwachen Feldern noch den Wechselwirkungsmomenten zwischen den Niveaus; Rechnung tragen bei stärkeren Feldern treten sogar **Paschen-Back**-Effekten auf und das Problem wird also sehr kompliziert ¹).

---

[1]) Eine Kurve, die für verschiedene Orientierungen des Kristalls gegen dem Magnetfeld verschieden sein wird.

[2]) Von **Brillouin** und von **Niessen** sind die zu erwartenden Sättigungskurven für frei Ionen angegeben worden. L. **Brillouin**, *Journ. de Phys.*, *8*, 74, 1927. K. F. **Niessen**, *Phys. Rev.*, *34*, 253, 1929.

Bemerkung bei der Korrektur:

Kürzlich hat **Halpern** einige interessante Bemerkungen gemacht über die paramagnetische Sättigung.

Der Kernpunkt seiner Betrachtungen ist wohl dass, es wegen des geringen Entropieinhalts der Kristallschwingungen bei den Temperaturen des flüssigen Heliums, unmöglich sein wird von einem Zustand paramagnetischer Sättigung adiabatisch einen Zustand zu erreichen wo zwei oder mehrere Niveaus pro Ion mit etwa gleicher Wahrscheinlichkeit besetzt sein können. Die Temperatur wird sich dann beim Abschalten des Feldes so lange erniedrigen bis kT kleiner ist als die Energieaufspaltungen bei verschwindendem Feld. Besonders bei ungerader Elektronenzahl, wo ein Term auch in willkürlichen elektrischen Feldern zweifach entartet bleibt, wird man sehr nahe an den absoluten Nullpunkt herankommen können, wenn nicht Resonanz-Austausch mit Nachbaratomen noch beträchtliche Aufspaltungen verursacht.

O. **Halpern**, *Ann. der Phys.*, *12*, 169, 1932.

P. **Debije**, *Ann. der Phys.*, *81*, 1124, 1926.

§ 24. Der Diamagnetismus.

In den Paragraphen 19 und 20 haben wir nur dem Term erster Ordnung in W_{Sp} Rechnung getragen. Schon in § 21 kamen wir zum Resultat, dass als Folge der Existenz von Nichtdiagonaltermen in der Matrix des magnetischen Momentes auch in W_{Sp} ein in H quadratisches Glied auftritt.

In diesem Paragraphen stossen wir noch auf einen solchen quadratischen **Zeeman**-Effekt, dessen Energie aber ebenfalls zu klein ist, um auf die **Boltzmann**-Verteilung einen merklichen Einfluss zu haben.

Sie tritt auf in der zweiten Näherung der kinetischen Energie der **Larmor**-Prezession und beträgt:

$$\triangle' W_{Sp} = H^2 \frac{e}{8\,m\,c^2} \Sigma \overline{R_\perp^2} ,$$

wo $\overline{R_\perp^2}$ das mittlere Quadrat des Abstands des Elektrons zum Kern, in einer Richtung senkrecht zum Felde, ist, und wo die Summation über alle Elektronen zu erstrecken ist. In der Quanten-

---

¹) Sie für den Fall zweier nicht entarteten Niveaus: H. A. **Kramers**, *Comm. Leiden Suppl.*, 68*b* und die Paragraphen 31 und 32.

mechanik ¹) tritt an Stelle von $\overline{R_\perp^2}$ das Diagonalelement auf der Matrix, die an Stelle von $R_\perp^2$ tritt.

Das dazu gehörige magnetische Moment, dass einfach von der Larmor-Prezession der negativen Ladungen der Elektronen herrührt, ist in Übereinstimmung mit:

$$\mu_H = -\frac{d W_{Sp}}{d H} : \quad \dots\dots\dots\dots \quad (21)$$

$$\mu_H = -H \frac{e}{4 m c^2} \Sigma \overline{R_\perp^2} \quad \dots\dots\dots \quad (58)$$

Da μ_H immer das negative Vorzeichen hat, heben sich diese. unter dem Einfluss des Feldes erhaltenen Momente nicht wie die Momente erster Ordnung bei vollbesetzten Schalen gegenseitig auf. Der Diamagnetismus ist also eine Sache des ganzen Atoms, und nur sehr schwach abhängig von der Orientierung der wenigen Elektronen die sich in einer unvollständig besetzten Schale befinden. Der Diamagnetismus, der meistens auch nur schwach von T abhängt, kann also als konstantes Zusatzglied zum Paramagnetismus betrachtet werden.

Die für $\overline{R_\perp^2}$ aus dem Diamagnetismus gewonnenen Werte stimmen ziemlich gut überein mit den theoretisch aus obigen Vorstellungen zu erwartenden ²). Das anomale Benehmen von Bi, Sb, Graphit, und noch einige anderen Stoffen scheint aber ein viel komplizierteres Phänomen zu sein ³).

---

¹) J. H. van Vleck, *Phys. Rev.*, *31*, 587, 1928.

²) L. Pauling, *Proc. Roy. Soc.*, *A*, *114*, 181, 1927.
P. Weiss, *J. de Phys.*, *VII*, *1*, 185, 1930.

³) Sieh z. B. P. Ehrenfest, *Z. f. Phys.*, *58*, 719, 1930.
W. J. de Haas und P. M. van Alphen, *Comm. Leiden*, 212*a*.
W. J. de Haas, *Nature*, *127*, 335, 1931
und besonders die bald zu erscheinende Leidener Dissertation van Alphen's.

KAPITTEL IV.

§ 25. Der Paramagnetismus der Salze und das periodische System.

Im Allgemeinen befinden die Elektronen in einem Ion sich in vollständig besetzten, s.g. abgeschlossenen Unterschalen. Hat man z. B. ein neutrales Metallatom, K oder Ca, so hat dieses 19 bezw. 20 Elektronen. Geht aber das Metallatom in den Ionenzustand über, so verliert es 1 bezw. 2 Elektronen. Das übrigbleibende Gebilde hat dann 1-bezw. 2-fache Elementarladung, und die 18 Elektronen haben die Ar-Konfiguration. In der K-Schale befinden sich dann 2, in der L-Schale 8 Elektronen, in den 3s- und 3p- Unterschalen 2 und 6 Elektronen, die 3d-Unterschale ist noch unbesetzt.

Beim neutralen Ca befinden sich die beiden Valenzelektronen in der 4s-Unterschale, haben da offenbar eine niedrigere Energie, als sie in der 3d-Unterschale haben würden. Bei zunehmender Kernladungszahl nimmt die Energie eines Elektrons in der 3d-Unterschale viel stärker ab als die eines Elektrons in der 4s- oder 4p-Unterschale, sodass schon bald ein Teil der Elektronen, die nicht zu den abgeschlossenen Unterschalen der Ar-Konfiguration gehören, in der 3d-Unterschale statt in den 4s- und 4p- Unterschalen der N-Schale einen Platz finden.

Geht nun ein Atom der auf Ca folgenden Eisen-Gruppe in den Ionenzustand über, so verliert es die Elektronen welche sich in der N-Schale befinden und oft noch eines (oder mehrere) seiner 3d-Elektronen. Die übrigen 3d-Elektronen haben dann eine zu niedrige Energie um sich unter dem Einfluss der Elektronenaffinität der Nachbar-Atome abtrennen zu lassen. Man kann aber verstehen dass, weil die übrigbleibenden 3d-Elektronen nicht sehr viel fester gebunden sind als die wohl abgelösten 3d- und 4s-Elektronen waren, verschiedene Wertigkeiten auftreten können.

Es bleiben also in der 3d-Unterschale noch mehrere Elektronen zurück und diese können dem freien Atom ein magnetisches Moment geben, und, wie wir im vorigen Kapittel gesehen haben, darum paramagnetische Erscheiningen verursachen. In der Tat zeigen die Ionen, welche den Ionen der Ar-Konfiguration folgen, paramagnetische Eigenschaften. (Fe-Gruppe)[1].

Es kommen noch andere Gebiete im periodischen System vor, wo Ionen unvollständig besetzte Unterschalen enthalten: die Gruppe der Seltenen Erden, wo die 4f-Unterschale, die Pd-Gruppe, wo die 4d-, die Pt-Gruppe, wo die 5d- und die U-Gruppe, wo die 6d-Unterschale vollendet werden.

Diese Gruppen sind auch die einzige im periodischen System, in welchen paramagnetische Eigenschaften in Ionen[2]) auftreten. In der Fe-Gruppe und der Gruppe der Seltenen Erden ist der paramagnetische Charakter am stärksten ausgeprägt.

Wenn man nun aus der Anzahl der Elektronen angeben könnte, wie die l_i und s_i der einzelnen Elektronen mit einander gekoppelt sind, also den Charakter des niedrigsten Energieniveaus des freien Ions angeben könnte, so würde man auch deren ZEEMAN-Effekt kennen und so die CURIE-Konstante unter den in § 21 gegebenen Bedingungen.

Dies leisten die HUNDschen Regeln.

§ 26. Die HUNDschen Regeln und ihre Anwendung auf die Ionen der Seltenen Erden.

Die HUNDschen Regeln sind von HUND bei der Analyse der komplizierten Bogen- und Funkenspektren der Fe-gruppe aufgestellt worden, und haben sich nachher auch in anderen Gebieten des periodischen Systems bewährt. Sie haben in quantenmechanischen Rechnungen nullter Näherung von SLATER neulichst auch eine theoretische Begründung bekommen[3]).

Sie gelten für Elektronen in einer Unterschale eines freien Atoms und lauten:

---

1) Sieh R. LADENBURG, *Naturw.*, *8*, 5, 1920.

2) Wir lassen also dem Paramagnetismus von Molekülen und von Metallen ausser Betracht.

3) SLATER gibt auch an, wo Abweichungen von den Regeln erwar et werden können. J. C. SLATER, *Phys. Rev.*, *34*, 1239, 1929.

1°. Es gilt das Koppelungsschema von RUSSELL-SAUNDERS. Also werden die l_i zu einem l gekoppelt, die s_i zu einem s und diese beide zusammen zu j.

2°. Man wähle den Maximalwert von s, der mit dem PAULI-Prinzip verträglich ist.

3°. Man wähle dann den Maximalwert von l, der noch mit dem PAULI-Prinzip verträglich ist; man bekommt dann das niedrigste Multiplett.

4°. Der niedrigste Term hat: $j = l - s$, wenn die Unterschale weniger als halb besetzt ist, und $j = l + s$, wenn sie mehr als halb besetzt ist.

Beispiele:

Das Ce^{+++}-Ion hat die Konfiguration $1s^2$; $2s^2$, $2p^6$; $3s^2$, $3p^6$, $3d^{10}$; $4s^2$, $4p^6$, $4d^{10}$, $4f^1$; $5s^2$, $5p^6$ hat also 1 Elektron in der 4f-Unterschale; der niedrigste Term hat:

$$s = s_i = \tfrac{1}{2} \quad , \quad l = l_i = 3 \quad j = l - s = 5/2 \quad ;$$

ist also ein $^2F_{5/2}$-Term.

Befinden sich 2 Elektronen in der nämlichen Unterschale (Pr^{+++}), so hat der niedrigste Term:

$$s = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 \quad l = 3 + 2 = 5 \quad j = 5 - 1 = 4 \quad ;$$

ist also ein $^3H_4$-Term,

denn man sieht ein, dass $l = 3 + 3 = 6$ vom PAULI-Prinzip ausgeschlossen wird: wenn z. B. dann $j = 5$ und $m = 5$ wäre, so hätten die zwei Elektronen dieselben vier Quantenzahlen [1]).

Hat man 6 Elektronen, in der Unterschale (Eu^{+++}), so hat der niedrigste Term:

$$s = 6/2 = 3 \quad l = 3 + 2 + 1 + 0 - 1 - 2 = 3 \quad j = 3 - 3 = 0;$$

ist also ein $^2F_0$-Term.

Ein Term mit $j = 0$, also ohne magnetisches Moment, geht immer dem S-Term, der die Mitte der Gruppe bildet, voran.

Hat man 7 Elektronen (Gd^{+++}), so hat der niedrigste Term:

$$s = 7/2 \quad l = 3 + 2 + 1 + 0 - 1 - 2 - 3 = 0 \quad j = 7/2 - 0 = {}^7/_2;$$

ist ein $^8S_{7/2}$-Term.

Jetzt müssen die folgenden Elektronen, da alle mögliche Projektionen von l_i auf j besetzt sind, ihre Spins entgegengesetzt zu denen der anderen Elektronen haben; s nimmt also wieder ab.

---

[1]) Weil die Quantenzahlen j_i und m_i wegen der Entkoppelung von Spin und Bahn des einzelnen Elektrons eigentlich nicht gut mehr definiert sind, kann man statt sie z. B. die mittlere Summe von s_i und l_i in der Richtung von j, bezw. der Richtung des Feldes nehmen.

Mit 8 Elektronen (Tb^{+++}) hat der niedrigste Term:
$s = 7/2 - 1/2 = 3 \quad l = 0 + 3 = 3 \quad j = 3 + 3 = 6$;
ist ein $^7F_6$-Term.

Mit 10 Elektronen (Ho^{+++}) hat der niedrigste Term:
$s = 7/2 - 3/2 = 2 \quad l = 0 + 3 + 2 + 1 = 6 \quad j = 6 + 2 = 8$;
ist ein $^5J_8$-Term.

Und so weiter bis 14 Elektronen (Lu^{+++}, auch wohl Cp^{+++} genannt); dann ist die Unterschale vollständig besetzt, und ist das Multiplett ein Singulett geworden:
$s = 0 \quad l = 0 + 1 + 2 + 3 - 1 - 2 - 3 = 0 \quad j = 0 + 0 = 0$;
ein $^1S_0$-Term.

§ 27. Die Magnetonenzahlen der Ionen der Seltenen Erden.

Kennt man den Grundterm so kann man leicht den zu diesem gehörenden Aufspaltungsfaktor

$$g = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$$

berechnen; die Projektion des magnetischen Momentes in der Richtung des mechanischen ist dann:

$$\mu_j = g\sqrt{j(j+1)} \cdot \frac{e}{2mc} \cdot \frac{h}{2\pi}$$

Die CURIE-Konstante[1]) wird:

$$C = \frac{N_L}{k} \frac{\Sigma_{(m)} \Sigma_{(m')} g_m |M_H(m, m')|^2}{\Sigma_{(m)} g_m} = \frac{N_L}{3k} g^2 j(j+1)\left(\frac{e}{2mc}\,\frac{h}{2\pi}\right)^2 \quad . . . (60)$$

oder auch:

$$C = \frac{N_L \mu_j^2}{3k} = \frac{(N_L \mu_j)^2}{3R} \quad . . . . (61)$$

Jetzt kann man zum Vergleich mit den experimentellen Daten übergehen.

Man ist gewohnt, als Mass für die CURIE-Konstante die Anzahl WEISS-Magnetonen anzugeben; es wird dann $\mu_j = \mu$ aus der, auch in der klassischen Theorie[2]) geltenden Gl (61) berechnet und in einer gewissen Einheit dem „WEISS-Magneton" ausgedrückt.

---

[1]) Wegen des Prinzips der spektroskopischen Stabilität gilt
$$\Sigma_{(m)} \Sigma_{(m')} g_m |M_H(m, m')|^2 = \Sigma\Sigma g_m |M_X|^2 = \Sigma\Sigma g_m |M_Y|^2 = \Sigma\Sigma g_m |M_Z|^2 = \\ = \tfrac{1}{3} \Sigma_{(m)} \Sigma_{(m')} g_m [|M_X|^2 + |M_Y|^2 + |M_Z|^2 = \tfrac{1}{3}\mu_j^2 . \Sigma_{(m)} g_m \quad . . (59)$$

[2]) Einstellung von Dipolen der Stärke μ, in einem Magnetfeld, ohne Einführung von Quantenbedingungen; Θ ist dann null.

Das Weiss-Magneton [1]) beträgt 1123,5 erg . gauss^{-1} mol.$^{-1}$ (pro Grammion). Die Anzahl Weiss-Magnetonen berechnet man also aus der Formel:

$$p = \frac{\sqrt{3RC}}{1123,5} = 14,05^7 \sqrt{C} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (62)$$

In der Spalte 5 der Tab. I sind die also berechneten Magnetonenzahlen angegeben und in Fig. 1 sind sie gegen die Anzahl der Elektronen im Ion aufgetragen. Sieh § 34 für die Verantwortung der angegebenen Magnetonenzahlen.

Das Moment (e/2 m.c.) h/2 π nennt man wohl das Bohr-Magneton, es beträgt pro Grammion [2]), wenn man den spektroskopischen Wert [3]) von e/m verwendet 5564 erg gauss^{-1} mol^{-1}.

TABELLE I.

Anzahl Elektronen.	Ionen.	Grundterm.	p_{Hund}	p_{exp}
55	Ce+++, Pr++++	$^2F_{5/2}$	12,56	12,4^5, 13
56	Pr +++	$^3H_4$	17,72	17,9
57	Nd+++	$^4J_{9/2}$	17,92	18,1
58	Il +++	$^5J_4$	13,29	—
59	Sm+++	$^6H_{5/2}$	4,19	—
60	Eu+++	$^7F_0$	0.00	—
61	Gd+++	$^8S_{7/2}$	39,31	39,1
62	Tb+++	$^7F_6$	48,14	47,9
63	Dy+++	$^6H_{15/2}$	52,72	52,2
64	Ho+++	$^5J_8$	52,53	52,0
65	Er +++	$^4J_{15/2}$	47,45	47,3
66	Tu+++	$^3H_6$	37,44	36
67	Yb+++	$^2F_{7/2}$	22,46	22,5

---

[1]) Wir gebrauchen des Weiss-Magneton als experimentelle Einheit; da Abänderungen einer experimentelle Einheit vermeden werden sollen, setzen wir der „klassischen" Wert des Weiss-Magnetonen an, obwohl Weiss selber in letzterer Zeit den Wert 1125, 6 erg. gauss^{-1} mol.$^{-1}$ angibt. Cabrera gebraucht 1124,9 erg.gauss^{-1} mol^{-1}.

[2]) Als Loschmidtsche Zahl ist der aus den Millikanschen e-Bestimmungen folgende Wert gebraucht worden: 6,017.^{6}10^{23}. Sieh: R. T. Birge, *Phys. Rev. Supp. 1*, 1929, C. J. Gorter, *Vlaamsch W. en N. Tijdschrift, 5*, 103, 1931.

[3]) Da die paramagnetischen Erscheinungen aufs engste mit dem Zeeman-Effekt zusammenhängen, aber gar nicht mit der in Elektronenstrahlmessungen verwendeten Bundel freier Elektronen scheint es angemessen den „spektroskopischen" e/m-Wert zu gebrauchen. Ausserdem weisen die letzten Elektronenstrahl-Messungen auch auf den „sprektroskopischen" Wert hin. C. T. Perry und E. L. Chaffée, *Phys. Rev.*, *36*, 904, 1930.

Das Verhältnis der beiden Einheiten beträgt 4,952.

Die von der Hundschen Theorie vorhergesagten Magnetonenzahlen (in Weiss-Einheiten) betragen also [1]:

$$p = 4{,}952\, g \sqrt{j\,(j+1)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (63)$$

Sie sind in die Spalte 4 der Tab. I eingetragen worden, und als ausgezogene Linie in Fig. 1.

Wie man sieht ist die Übereinstimmung mit den aus den Hundschen Regeln anzugebenden Zahlen sehr gut.

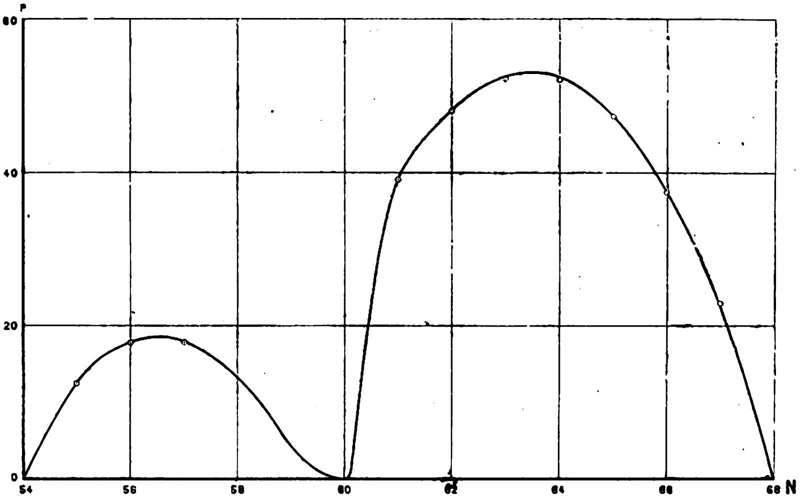


Fig. 1.

Für Il^{+++}, Sm^{+++}, und Eu^{+++} sind keine Magnetonenzahlen angegeben worden; Il ist noch nicht genügend rein hergestellt worden [2], um für magnetische Messungen in Betracht zu kommen; und Sm^{+++} und Eu^{+++} folgen das Curie-Weisssche Gesetz nicht, die Suszeptibilität variiert zu wenig mit der Temperatur. Früher sind für diese Ionen wohl Magnetonenzahlen angegeben worden [3];

---

[1] C. J. Gorter, *Nature*, *128*, 68, 1931.

[2] Nach einer Privatmitteilung von Prof. Urbain soll es sogar sehr fraglich sein ob das Element 61 überhaupt als entdeckt gelten kann.

[3] z. B. B. Cabrera, *C. R.*, *180*, 669, 1925.
St. Meyer, *Phys. Z.schr.*, *26*, 51 und 478, 1925.
H. Decker, *Ann. der Phys.*, *79*, 324, 1926.
B. Cabrera und A. Duperier, *C. R.*, *188*, 1640, 1929.

diese beruhen aber entweder auf Messungen bei nur einer Temperatur, unter der falschen Annahme $\theta = 0$ (waren also identisch mit unserer „effektiven Magnetonenzahl" sieh § 33) oder auf eine Anwendung des CURIE-WEISS-schen Gesetzes, bei einem grossen $|\theta|$-Wert.

Die prinzipielle Erklärung dieser Tatsachen wird im nächsten Paragraphen gegeben.

§ 28. Der VAN VLECKsche temperaturunabhängige Paramagnetismus.

Wie wir in § 21 gesehen haben, hat VAN VLECK [1]) zuerst angegeben, dass die Nichtdiagonalelemente in der Matrix des magnetischen Momentes Anlass geben können zu einer temperaturunabhängigen Polarisation. Er hat auch zwei Gründe angegeben, warum dieser temperaturunabhängige Term kurz vor der Mitte einer Periode besonders hervortreten soll.

Erstens werden die Wechselwirkungsmomente $|M(h,h'')|^2$ besonders gross zwischen den neben einanderliegenden Niveaus eines Multipletts, wenn l und s entgegengesetzt gerichtet sind, sie werden nl. für das freie Atom:

$$\left[|M(h,h'')|^2 = \frac{[(s+l+1)^2 - (j+1)^2]\,[(j+1)^2 - (s-l)^2]}{4\,(j+1)} \left(\frac{e}{2mc}\,\frac{h}{2\pi} \right)^2 \right] \qquad (64)$$

wenn $j'' = j + 1$

Zweitens ist gerade in diesem Falle die im Nenner von Gl (50) vorkommende Energiedifferenz zwischen dem niedrigsten und dem zweitniedrigsten Term besonders klein [2]).

Und drittens ist, wegen der entgegengesetzten Orientierung von Spin und Bahn der Diagonalterm des magnetischen Momentes nicht gross, sodass der temperaturunabhängige Term in der Suszeptibilität bald relativ grossen Einfluss bekommt.

Nach GOUDSMIT [3]) ist der Energieunterschied zwischen den niedrigsten Termen des freien Ions

$$\triangle W_{Sp} = R h \left(\frac{2\pi e}{h c} \right)^2 \frac{(Z-\delta)^4\,(j+1)}{n_i^3\, l_i\,(2\,l_i+1)\,(l_i+1)} \quad \ldots\ldots \quad (65)$$

wo δ die s.g. partielle Abschirmungskonstante und R die RYDBERG-

---

[1]) J. H. VAN VLECK, *Phys. Rev.*, *31*, 587, 1928.

[2]) Schwache Koppelung zwischen Spin- und Bahn-Vektor.

[3]) S. GOUDSMIT, *Phys. Rev.*, *31*, 946, 1928.
J. H. VAN VLECK und A. FRANK, *Phys. Rev.*, *34*, 1494, 1929.

Konstante ist ¹). Nimmt man für δ den oft gebrauchten Wert 34, so folgt für den Abstand der zwei niedrigsten Niveaus vom freien Sa^{+++}-bezw. Eu^{+++}-Ion: 930 bezw. 255 cm^{-1} und für die temperaturunabhängige Suszeptibilität des niedrigsten Niveaus 780.10^{-6} bezw. 7950.10^{-6} pro Grammion, während bei $T = 300°$ der dem Curie-Weissschen Gesetze folgende Term 296.10^{-6} bezw. 0 sein müsste.

Obgleich die Grössenordnung stimmt, ist bei genauerer Betrachtung die Übereinstimmung keineswegs gut zu nennen, ²) ein Grund davon könnte sein, dass die eingesetzte Abschirmungskonstante zu viel von der wirklichen abweicht, aber man hat doch auch den Eindruck, dass besonders für Eu^{+++}, die Aufspaltungen von den Nachbaratomen herrührend, nicht mehr klein genug sind gegen die Multiplettaufspaltungen des freien Ions, um sie vernachlässigen zu dürfen.

Es scheint, dass auch für Pr^{+++}, aber besonders für Nd^{+++}, der temperaturunabhängige Term der Suszeptibilität, bei hohen Temperaturen einen sehr wesentlichen Beitrag zur Gesamtsuszeptibilität liefert ³); für Bestimmungen der Magnetonenzahlen sind dann Messungen angewiesen, an Substanzen mit kleinem $|\theta|$, bei tieferen Temperaturen.

§ 29. Die Magnetonenzahlen in der Fe-Gruppe.

In Tabelle II und Fig. 2 sind die Magnetonenzahlen zusammengestellt, welche unserer Meinung nach am Besten die Beobachtungsresultate beschreiben.

Eine Verantwortung der angegebenen Zahlen kann man in den Paragraphen 34 und 38 finden. Hier soll nur bemerkt werden, dass wir scharfe Selektion auf die für die Magnetonenzahlen gebrauchten Messungen geübt haben. Es sind fast ausschliesslich

---

¹) Die „partielle" Abschirmungskonstante ist unabhängig von den Elektronen in den O- und P-Schalen, die „totale" Abschirmungskonstante, die in den Ionisierungsspannungen auftritt, nicht. Sieh A. E. Ruark und H. C. Urey, *Atoms, Molecules, Quanta, 1930,* S. 255 und G. Wenzel, *Z. f. Phys., 16,* 51, 1922.

²) Sieh jedoch A. Frank, *Phys. Rev. 37*, 467, 1931, und A. Serres, *Dissertation Strassburg,* 1931 und § 35.

³) C. J. Gorter, W. J. de Haas und J. v. d. Handel, *Comm. Leiden* 218*b*; der temperaturunabhängige Term wird bei $\delta = 34$ für Pr^{+++} und Nd^{+++} bezw. 96.10^{-6} und 220.10^{-6}, während der temperaturabhängige Teil bei $T = 300°$: 5300.10^{-6} bezw. 5420.10^{-6} pro Grammion betragen muss.

Messreihen gebraucht worden, wo bei verschiedenen Temperaturen gemessen wurde. Wenn sich nicht als erste gute Näherung das CURIE-sche Gesetz ergab, haben wir die Messungen für unseren Zweck gestrichen; mehrere anhydrische Salze und alle Oxyde blieben daher ausser Betracht; Messungen mit $|\theta| > 20$ sind selten gebraucht worden.

Die Messungen an Lösungen sind nur gebraucht worden, wenn das CURIE-sche Gesetz mit einer nur sehr kleinen Korrektion galt, und die Magnetonenzahl unabhängig von der Verdünnung war.

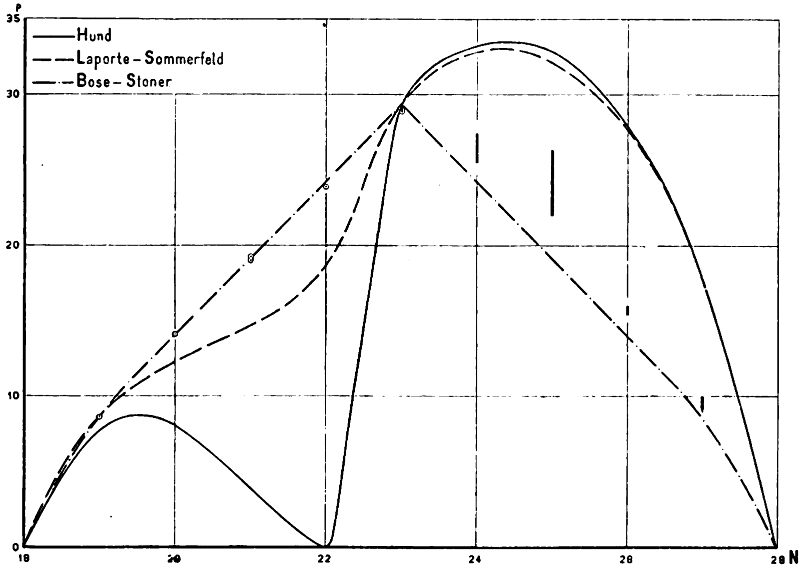


Fig. 2.

Da bei Lösungen die Weckselwirkungen mit den Nachbaratomen mehr als bei festen Stoffen mit der Temperatur variabel sein dürften, muss man mit denselben sehr vorsichtig sein; eine ziemlich kleine Änderung der Wechselwirkung wird leicht zu einem beträchtlichen scheinbaren $|\theta|$ Wert Anlass geben. Obwohl FREED (1) die Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität seiner Lösungen von V-Salzen nicht bestimmt hat, haben wir doch seine Zahlen angenommen, weil diese mit grösster Sorgfalt ausgeführten Messungen noch die beste Garantie geben, dass die angegebenen Konzentrationen der verschiedenen Ionen, wirklich vorhanden waren. Da das bei den meisten Lösungen zutrifft, haben wir mit Freed angenommen, dass bei den gebrauchten variierenden Verdünnungen $\theta \sim 0$ war. Wir geben diesen Fall so weitläufig wieder, weil es einer der wenigen Fälle ist, worin Mangel an Messungen es unmöglich machte eine strenge Auswahl auszuüben.

---

(1) S. FREED, *Journ. Am. Chem. Soc.*, *49*, 2456, 1927.

Die aus den Hundschen Regeln folgende Magnetonenzahlen sind in Spalte 4 angegeben worden, und in der Figur wieder von der ausgezogenen Kurve.

Man sieht, dass die gefundenen Magnetonenzahlen in der zweiten Hälfte der Gruppe von Substanz zu Substanz variabel sind. Für Cr, Fe und Mn ist dies jedenfalls weniger der Fall.

TABELLE II.

Anzahl Elektronen	Ionen.	Grundterm.	p_{Hund}	$p_{\mathrm{L\text{-}S}}$	$p_{\mathrm{B\text{-}St}}$	$p_{\mathrm{Exp.}}$
19	V++++; Ti+++	$^2D_{3/2}$	7,67	8,4; 10,4	8,58	8,6;—
20	V+++; Ti++	$^3F_2$	8,09	13,3; 15,8	14,01	14;—
21	Cr+++; V++	$^4F_{3/2}$	3,48	13,0; 16,0	19,18	19,1; 19,0
22	Mn+++; Cr++	$^5D_0$	0,00	15,6; 18,5	24,26	—; 23,9
23	Fe+++; Mn++	$^6S_{5/2}$	29,30	29,3	29,30	29,0; 29,1
24	Fe++	$^5D_4$	33,22	31,9	24,26	25,5—27,5
25	Co++	$^4F_{9/2}$	32,85	32,5	19,18	22—26,5
26	Ni++	$^3F_4$	27,68	27,5	14,01	16—17
27	Cu++	$^2D_{5/2}$	17,58	17,5	8,58	9—10

In der zweiten Hälfte der Gruppe kann man dem Ion keine wohldefinierte Magnetonenzahl zuschreiben. Man findet für verschiedene Substanzen verschiedene Werte. In der Tabelle sind die äussersten Zahlen angegeben worden. Die Magnetonenzahlen von Cr+++, Fe+++ und Mn++ sind gewiss viel besser definiert.

Nur für Mn++ und Fe+++ stimmen die Magnetonenzahlen gut mit den Hundschen Werten überein.

§ 30. Die Theorien von LAPORTE-SOMMERFELD und BOSE-STONER.

Zur Erklärung der Abweichungen der experimentellen Magnetonenzahlen, von den aus den Hundschen Regeln erhaltenen, haben Laporte und Sommerfeld [1]) schon in 1926 bemerkt, dass, wegen der geringeren „effektiven Kernladungszahl" [1] ($Z - \delta$), die Multiplettaufspaltungen in der Fe-Gruppe nicht mehr, wie die der Seltenen Erden, gross gegen kT sind. Man müsste dann, statt mit **Hund** an zu nehmen, dass nur der niedrigste Term besetzt sei, eine **Boltzmann**-Verteilung über die verschiedenen Multipletterme ins Auge fassen.

---

[1]) O. Laporte und A. Sommerfeld, *Z. f. Phys.*, *40*, 333, 1926.

Es wurden die Magnetonenzahlen der meist vorkommenden der von Laporte angegebenen Ionen in der Figur eingezeichnet. O. Laporte, *Z. f. Phys.*, *47*, 761, 1928.

Die quantitative Auswertung dieses Gedanken auf Grund der ziemlich gut bekannten partiellen Abschirmungszahlen ergab, wie man aus dem Vergleich der Spalten 5 und 7 und aus Fig. 2 sieht, eine vielleicht etwas bessere, aber doch keineswegs befriedigende, Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. **Laporte** gab eigentlich unsere „effektiven Magnetonenzahlen" an, sieh § 33, denn er mittelte mit Rücksicht auf die statistischen Gewichte und **Bolzmann**-Faktoren einfach über die p's der einzelnen Niveaus.

Die **Laporte-Sommerfeld**sche Auffassung musste aber völlig verlassen werden auf Grund der Messungen bei tiefen Temperaturen. **de Haas** und **Gorter** [2]) haben gezeigt, dass Chromalaun bis in das Gebiet des flüssigen Heliums (wo die paramagnetische Sättigung, sich schon bemerkbar macht) sehr gut dem **Curie**-schen Gesetz folgt, mit einer Magnetonenzahl von 19,07, während man nach der **Laporte-Sommerfeld**-schen Theorie bei tiefen Temperaturen den Wert $p = 3{,}84$ erwarten müsste.

Andererseits hat **Bose** [3]) bemerkt, dass, wenn man annimmt, nur die Resultante der Spinvektoren könne sich im Magnetfeld einstellen, die Übereinstimmung, besonders in der ersten Hälfte der Gruppe nicht schlecht wird. Die so zu erwartenden Magnetonenzahlen sind in der Spalte 6 von Tab. II und in Fig. 2 angegeben worden.

Dieser Gedanke ist später von **Stoner** [4]) und anderen Autoren [5]) ausgearbeitet worden, und man kann jetzt zu dem folgenden Bilde kommen, welches den Charakter des Paramagnetismus in der Fe-Gruppe in grossen Zügen gut wiedergibt.

---

[1]) Sieh die Paragraphen 16 und 28.

[2]) W. J. **de Haas** und C. J. **Gorter**, *Comm. Leiden* 208c.

[3]) D. M. **Bose**, *Z. f. Phys.*, *43*, 864, 1927.
Siehe auch A. **Sommerfeld**, *Z. f. Phys.*, *19*, 221, 1923.

[4]) E. C. **Stoner**, *Phil. Mag.*, *8*, 250, 1929.

[5]) W. J. **de Haas** und C. J. **Gorter**, *Comm. Leiden*, 210*d*.
J. H. **van Vleck**, *Phys. Rev.*, *37*, 467, 1931.
C. J. **Gorter**, *Physica*, *11*, 171, 1931.

Die Wechselwirkung zwischen dem Metallion und seiner Umgebung ist derart, dass die Energieniveaus des freien Ions hierdurch Aufspaltungen erfahren, welche gross sind gegen die ursprüngliche Multiplettaufspaltung. (Das Ion der Fe-Gruppe ist viel weniger abgeschlossen als das einer Seltenen Erde, wo die magnetischen Elektronen von den voll besetzten 5s- und 5p-Unterschalen besser gegen äussere Einflüsse abgeschirmt sind; es kommen da auch keine Komplex-Verbindungen vor).

Die Folge solcher Aufspaltungen, wenn sie z. B. von den elektrischen Feldern der Nachbaratome verursacht werden, und die Feldern nicht zu symmetrisch sind, ist, dass so zu sagen nur der resultierende Spinvektor frei bleibt sich im Magnetfelde zu orientieren.

Wie VAN VLECK angegeben hat, sind die zwei Bedingungen für dieses verhalten:

$$\text{I} \qquad kT \gg \frac{(\triangle W_M)^2}{\triangle W_{St}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

$$\text{II} \qquad kT \ll \triangle W_{St}$$

wo $\triangle W_M$ die Multiplettaufspaltung des freien Ions ist und $\triangle W_{St}$ von die STARK-Effektaufspaltung [1]).

Aus diesen zwei Bedingungen folgt:

$$\text{III} \qquad \triangle W_{St} \ggg \triangle W_M \quad \ldots\ldots\ldots \quad (67)$$

eine Bedingung, die den Vorteil hat sich nur auf die Energieaufspaltungen zu beziehen.

Wie gesagt, darf die Symmetrie des elektrischen Feldes nicht zu hoch sein, sonst besteht doch noch die Möglichkeit, dass auch der Bahnvektor sich einstellen kann. (Sieh z. B. bei KRAMERS [2]) den zylindrisch-symmetrischen Fall). Diese Möglichkeit ist vorhanden wenn die Symmetrie des Feldes das zur Aufspaltung der Grössenordnung $\triangle W_{St}$ führt, derartig ist, dass das Atom auf einer drei- oder vier-zähligen Symmetrieache liegt.

Trifft die Voraussetzung III zu, so hat man eine Gruppe „niedrige" Niveaus (h, h'), wobei:

$$\frac{\Sigma_{(h)} \Sigma_{(h')} g_h \,|M_H(h, h')|^2}{\Sigma_{(h)} g_h} = 4 s (s+1) \left(\frac{e}{2mc} \frac{h}{2\pi}\right)^2 \ldots . \quad (68)$$

---

[1]) Wenn in dieser Arbeit über STARK-Effekt gesprochen wird, bezieht sich das auf die Aufspalting in einem *inhomogenen* elektrischen Felde.

[2]) H. A. KRAMERS, *Comm. Leiden Supp.* 68*b*.

Bei mittleren Temperaturen, wo kT also gross ist gegen die Aufspaltungen der niedrigen Niveaus (Bed. I), aber klein zu den Abständen der hohen Niveaus (Bed. II), findet man, dass das CURIE-WEISS-sche Gesetz gilt:

$$\chi = \frac{B}{T - \Theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (69)$$

wo k θ wieder die bekannte Differenz [1]) zweierenergetisch en Schwerpunkte bedeutet. Als Magnetonenzahl findet man den BOSE-STONER-schen Wert:

$$p = 4{,}952 \sqrt{4\,s\,(s+1)}\, \ldots\ldots\ldots \quad (70)$$

Erniedrigt man die Temperatur, so wird kT von der Ordnung der niedrigen Aufspaltungen, und man bekommt Abweichungen vom CURIE-WEISS-schen Gesetz.

Ist aber die Bedingung III nicht so streng erfüllt, so kann $\Sigma_{(h)}\, \Sigma_{(h')}\, g_h\, |\, M_H\,(h, h')\, |^2 \,/\, \Sigma_{(h)}\, g_h$ ziemlich bald beträchtliche Abweichungen von dem BOSE-STONER-schen Wert bekommen. Dies wird auftreten können, wenn $\triangle W_M$ verhältnismässig gross ist, ein Fall der verwirklicht scheint im zweiten Teil der Fe-Gruppe. Ist z. B. nach LAPORTE für die Dublettaufspaltung des freien Ti^{+++}-Ions 385 cm.$^{-1}$ zu erwarten, für die des freien Cu^{++}-Ions ist dies (wegen der grösseren effektiven Kernladung) 2130 cm.$^{-1}$. Bei Erniedrigung der Temperatur wird man keine Änderung der Magnetonenzahl erwarten; Abweichungen vom CURIE-WEISS-schen Gesetze werden nur auftreten, wenn kT von der Ordnung von $(\triangle W_M)^2 / \triangle W_{St}$ wird. Wohl wird die Abweichung vom BOSE-STONER-schen Wert abhängen vom Charakter der elektrischen Felder, also von der Substanz, in welcher das Ion sich befindet. In der Tat sind gerade in dem zweiten Teil der Fe-Gruppe die Magnetonenzahlen variabel mit der Substanz, bisweilen sogar mit der Vorbehandlung derselben.

Die Abweichungen sind bei Co^{++} am grössten. Hier scheint bei Zimmertemperatur kT auch nicht mehr gross gegen $(\triangle W_M)^2 / \triangle W_{St}$ zu sein (Bed. I), denn es treten grosse θ-Werte auf und bei tiefen Temperaturen immer beträchtliche Abweichungen (immer imselben Sinne) vom CURIE-WEISS-schen Gesetze.

---

[1]) Sieh die Paragraphen 20 und 21.

§ 31. Die Paramagnetische Drehung der Polarisationsebene.

Wenn ein polarisierter Lichtstrahl sich in einer Substanz parallel zu magnetischen Kraftlinien fortpflanzt, wird die Polarisationsebene des Lichtes gedreht.

In diamagnetischen Substanzen hat diese Drehung immer dasselbe Vorzeichen: die Drehung, wenn das Licht sich in der Richtung der Kraftlinien fortpflanzt, ist (für den Beobachter) eine Gegenzeigerdrehung. Man sagt, dass die Drehung dann das positive Vorzeichen hat.

Die Erklärung dieser Drehung ist die Folgende: die meisten Absorbtionslinien spalten sich im Magnetfeld auf in ZEEMAN-Komponenten (wenn die höher liegenden Energieniveaus wohl magnetisch sind). Die kurzwelligen Komponenten absorbieren Licht, das in der Richtung des Magnetstromes zirkular polarisiert ist. Nun pflanzt sich immer als Folge der anomalen Dispersion, das Licht, das die selbe Drehrichtung hat wie die langwellige zweier Komponenten, langsamer fort, als das Licht, dass zur kurzwelligen Komponente gehört [1]). Also bekommt man, wenn das Licht sich in der Richtung der Kraftlinien fortpflanzt, eine Gegenzeigerdrehung der Polarisationsebene; geht das Licht dieser Richtung entgegen, so ist die Drehung im Sinne der Zeiger.

Diese Drehung wird von BECQUEREL und DE HAAS [2]) die diamagnetische Drehung genannt, sie wird also durch die entgegengesetzte Verschiebung der Absorbtionslinien für verschieden polarisiertes Licht, verursacht.

In paramagnetischen Substanzen hat man aber oft das andere Vorzeichen der Drehung; und beim Passieren einer Absorbtionslinie wechselt sogar häufig das Vorzeichen.

Die Ursache dieser Drehung ist nach JEAN BECQUEREL [3]) darin zu suchen, dass, als Folge der BOLTZMANN-Verteilung über die ZEEMAN-Komponenten des Grundzustandes, die Intensitäten der Absorbtionslinien für die beiden Drehrichtungen des Lichtes auch nicht mehr gleich sind.

---

[1]) Dies gilt nur nicht zwischen den Komponenten einer magnetischen Aufspaltung.

[2]) JEAN BECQUEREL und W. J. DE HAAS, *Comm. Leiden.*

[3]) JEAN BECQUEREL, *Le Radium, 4*, 56, 1907 und *5*, 17, 1908, *Comm. Leiden*, 193^a.

Sieh auch R. LADENBURG, *Z. f. Phys.*, *34*, 898, 1925 und *46*, 168, 1927.

Da eine Absorbtionslinie zu beiden Seiten von anomaler Dispersion begleitet ist, tritt auch Ungleichheit dieser Dispersion auf[1]).

Denken wir uns, dass der Grundzustand sich nur in zwei ZEEMAN-Komponenten (m) — und (— m) aufspaltet, und dass ein Kristall, nur aus Atomen im m-Zustand bestehend, eine Drehung der Polarisationsebene von $\varrho_{m}^{\infty}(\lambda, T)$ verursachen würde, und wenn der Kristall nur aus Atomen —m bestünde, eine Drehung $\varrho_{-m}^{\infty}(\lambda\, T)$, so ist die totale Drehung:

$$\varrho = \frac{\varrho_{m}^{\infty}\, e^{\frac{\mu_H H}{kT}} + \varrho_{-m}^{\infty}\, e^{-\frac{\mu_H H}{kT}}}{e^{\frac{\mu_H H}{kT}} + e^{-\frac{\mu_H H}{kT}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (71)$$

wenn $\mu_H H$ die Energieaufspaltung des Grundzustandes angibt.

Sind mehrere ZEEMAN-Komponenten da, so muss über alle Paare summiert werden.

Hat man nur zwei Komponenten und liegt die gebrauchte Wellenlange des Lichtes, weit von den „drehenden" Absorbtionslinien (ist also die diamagnetische Drehung dieser Absorbtionslinien zu vernachlässigen), so wird:

$$\varrho_{m}^{\infty}(\lambda, T) = -\varrho_{-m}^{\infty}(\lambda, T) \quad \ldots\ldots \quad (72)$$

und also

$$\frac{\varrho}{\varrho_{m}^{\infty}(\lambda, T)} = \text{tgh.}\, \frac{\mu_H H}{kT} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (73)$$

ein Gesetz, welches experimentell von BECQUEREL und DE HAAS bei Tysonit- und Xenotimkristallen gefunden wurde. $\varrho_{m}^{\infty}(\lambda, T)$ ist sehr langsam mit T, aber ziemlich schnell mit λ variabel.

Wird die zweifache Entartung aber von einem elektrischen Felde aufgehoben, und zieht man immer nur die zwei, bei dieser letzten Aufhebung entstandenen Zustände in Rechnung, die einen energetischen Abstand von 2K haben mögen, so wird die Drehung nach KRAMERS 1)

---

[1]) Und da die, einer Absorbtionslinie begleitende, anomale Dispersion ihr Vorzeichen ändert, wenn man die Wellenlänge der Linie passiert, ändert auch der Beitrag der Linie zur Drehung das Vorzeichen; die Änderung kann beide Vorzeichen haben. (sieh § 34).

$$\varrho = \varrho^{\infty}(\lambda, \mathrm{T}) \frac{\mu_{\mathrm{H}} \mathrm{H}}{\sqrt{\mathrm{K}^2 + \mu_{\mathrm{H}}^2 \mathrm{H}^2}} \operatorname{tgh} \frac{\sqrt{\mathrm{K}^2 + \mu_{\mathrm{H}}^2 \mathrm{H}^2}}{\mathrm{k\,T}} \quad . \; . \; . \quad (74)$$

Ist K verschwindend klein gegen kT, so geht diese Formel in (73) über. Wird K von der Grössenordnung von kT, so ändert sich die Gestalt der Sättigungskurve. Ist K gross gegen kT, so hat man eine temperatur-unabhängige Drehung, welche bei den erreichbaren Feldern proportional mit H ist.

Die Formeln (73) und (74) sind analog mit den für die Magnetisierung aufzuschreibenden Formeln 2)

$$\mu_{\mathrm{H}} = \mathrm{M_H}(\mathrm{h}, \mathrm{h}) \operatorname{tgh} \frac{\mathrm{M_H}(\mathrm{h}, \mathrm{h}) | \mathrm{H}}{\mathrm{k\,T}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (75)$$

und

$$\mu_{\mathrm{H}} = \frac{\mathrm{M_H}(\mathrm{h}, \mathrm{h}) |^2 \mathrm{H}}{\sqrt{\mathrm{K}^2 + (\mathrm{M_H}(\mathrm{h}, \mathrm{h}) |^2 \mathrm{H}^2}} \operatorname{tgh} \frac{\sqrt{\mathrm{K}^2 + \mathrm{M_H}(\mathrm{h}, \mathrm{h}) |^2 \mathrm{H}^2}}{\mathrm{k\,T}}. \quad (76)$$

die men erhält, wenn man die Polarisationsmomente als Folge der Anwesenheit höherer Niveaus vernachlässigt. Dasselbe ist eigentlich bei der Drehung vernachlässigt worden; streng genommen gehören auch zu den Polarisationsmomenten optische Drehungen; diese sind aber keineswegs proportional zu den Moduli der Polorisationsmomenten.

Dies ist die Ursache, dass, was den temperaturunabhängigen Teil anbelangt Suszeptibilität und Drehung nicht einfach proportional sind.

Wenn diese temperaturunabhängige Drehungen klein sind, und man weit genug von den Absorbtionslinien entfernt bleibt, kann man aber mit Hilfe der Drehung sehr schön und schnell die Gestalt paramagnetischer Sättigungskurven bestimmen. Absolutwerte findet man natürlich nicht, aber wenn das tgh.-Gesetz gilt, kann man, wo die Messungen grosser Drehungen sehr genau sind, gut das magnetische Momente μ_{H} des Grundzustandes aus der Gestalt der Sättigungskurve bestimmen.

---

1) H. A. KRAMERS, *Comm. Leiden Supp.*

5) Sieh § 32.

§ 32. Paramagnetische Kristalle.

Ansätze zu einer Theorie der paramagnetischen Erscheinungen in Kristallen sind von BETHE ¹) und von KRAMERS ²) gemacht worden.

Vernachlässigt man die Wechselwirkung der magnetischen Ionen untereinander, so geht das Problem darauf hinaus, die möglichen Energieniveaus der magnetischen Ionen im Kristall zu bestimmen und den Charakter der Aufspaltungen und Verschiebungen, welche sie unter dem Einfluss von Magnetfeldern verschiedener Richtung aufweisen.

Die beiden Autoren beschreiben den Einfluss der Nachbaratome auf die magnetischen Ionen als die eines inhomogenen elektrischen Feldes, und suchen die Aufspaltungen die hierdurch in den Niveaus der freien Ionen zustandekommen, zu ermitteln. Es werden also erstens alle homöopolaren Wechselwirkungen, und zweitens alle zeitlichen Änderungen der elektrischen Felder ausser Betracht gelassen.

Mit Hilfe gruppentheoretischer Betrachtungen hat BETHE für verschiedene Fälle die Terme angeben können, welche bei den Aufspaltungen entstehen ³).

Die Eigenfunktionen eines entarteten Termes (h), bestehen aus einer willkürlichen linearen Kombination von g_h Eigenfunktionen. Diese Entartung wird nun im elektrischen Felde teilweise aufgehoben. In nullter Näherung treten noch Kombinationen der nämlichen g_h Eigenfunktionen auf, aber nur solche, die der Symmetrie des elektrischen Störungspotentials genügen.

Gehört nun zu einem Eigenwert (Energieniveau) nur eine Eigenfunktion, so kann er sich in einem Magnetfeld nicht mehr aufgespalten werden; $M(h, h)$ ist dann also null. Aber es kann auch vorkommen, dass noch zweifache Entartung vorliegt, dann ist $M(h, h) \neq 0$ und wird der Term sich im Magnetfeld wohl aufspalten. Auch bei mehrfacher Entartung wird dies der Fall sein, aber dieser Fall wird bei nicht zu symmetrischen Feldern nur bei S-Termen vorkommen.

---

¹) H. BETHE, *Ann. der Phys.*, *3*, 133, 1929, *Z. f. Phys.*, *60*, 218, 1930.

²) H. A. KRAMERS, *Comm. Leiden Supp.* 68*b* und *Proc. Ac. Amst.*, *33*, 959, 1930.

³) Ein S.-Term spalet sich z. B. überhaupt nicht auf, ein P-Term sich nicht in einem kubischen Felde (in nullter Näherung).

Kramers hat bewiesen, dass ein nicht entarteter Term in einem elektrostatischen Felde nur vorkommen kann, wenn die Anzahl der Elektronen im System gerade ist. Jedes Ion mit einer ungeraden Anzahl Elektronen wird also nur magnetische Terme haben können [1]). Auf diesem Theorem, dass auch eine experimentelle Bestätigung gefunden hat, kommen wir in § 35 noch zurück.

Kramers hat auch folgendes gezeigt: Wenn in den betrachteten elektrischen Feldern ein Term noch zweifach entartet bleibt, so wird die Aufspaltung des Termes im Magnetfeld gegeben durch

$$\triangle W_{Sp} = \pm \sqrt{\mu_1^2 H_X^2 + \mu_2^2 H_Y^2 + \mu_3^2 H_Z^2} \quad \ldots \quad (77)$$

wenn die Koordinatachsen günstig gewählt worden sind. (Man kann durch eine Hauptachsentransformation $\triangle W_{Sp}$ auf diese einfachen Form bringen, sieh auch § 13).

Das magnetische Moment des Ions wird dann gegeben durch:

$$\left.\begin{aligned} \mu_X &= \frac{\mu_1^2 H_X}{\triangle W_{Sp}} \\ \mu_Y &= \frac{\mu_2^2 H_Y}{\triangle W_{Sp}} \\ \mu_Z &= \frac{\mu_3^2 H_Z}{\triangle W_{Sp}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (78)$$

Aus (75) und (76) folgt:

$$\frac{\mu_X^2}{\mu_1^2} + \frac{\mu_Y^2}{\mu_2^2} + \frac{\mu_Z^2}{\mu_3^2} = 1, \ldots \quad \ldots \quad (79)$$

also wird das magnetische Moment gegeben durch den Fahrstrahl aus dem Ursprung zu einem Punkte der μ-Ellipsoids; die Normale auf der Tangentialebene in diesem Punkte gibt die Richtung des Feldes.

Für die Magnetisierung eines Systems von diesen Ionen, findet man dann, wenn nur die zwei betrachteten Niveaus besetzt sind, und die Polarisationsmomente, welche auftreten wegen der Anwesenheit der höheren Niveaus, zu vernachlässigen sind [2]):

---

[1]) In einem System mit einem Kern wird die Entartung durch ein äusseres Magnetfeld völlig aufgehoben.

[2]) Einige Messungen von Jean Becquerel und de Haas über die Sättigungs kurve der paramagnetischen Rotation in Tysonit-Kristallen, scheinen vorläufig mit diesem Resultat nicht zu stimmen.

Jean Becquerel und W. J. de Haas, *Comm. Leiden* 211*b*.

$$\left.\begin{aligned}\bar{\mu}_X &= \mu_X \operatorname{tgh} \frac{\triangle W_{Sp}}{kT}\\ \bar{\mu}_Y &= \mu_Y \operatorname{tgh} \frac{\triangle W_{Sp}}{kT}\\ \bar{\mu}_Z &= \mu_Z \operatorname{tgh} \frac{\triangle W_{Sp}}{kT}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (80)$$

In erster Näherung also:

$$\left.\begin{aligned}\chi_1 &= N\frac{\mu_1^2}{kT}\\ \chi_2 &= N\frac{\mu_2^2}{kT}\\ \chi_3 &= N\frac{\mu_3^2}{kT}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (81)$$

Als entarteter Term, dessen Entartung vom elektrischen Felde aufgehoben wird, muss, wenn die STARK-Effektaufspaltungen klein gegen die Multiplettaufspaltungen des freien Ions sind, das einzelne Niveau des freien Ions betrachtet werden. Ist dies aber nicht der Fall, so muss das ganze Multiplett als „entarteter Term" angesehen werden, und macht die Koppelung zwischen Spin und Bahn sich nur in zweiter Näherung bemerkbar. Der Übergang zwischen den beiden Fällen (also allmähliche Entkoppelung von Bahn und Spin) ist, für ein magnetisches Elektron in einem zylindrisch-symmetrischen elektrischen Felde, von KRAMERS behandelt worden.

Quantitativ zu verifizierende Rechnungen über die Lage der Terme im Kristall sind leider noch kaum gemacht worden.

In der oben zitierten Abhandlung von KRAMERS finden sich einige Angaben über die Grösse der Aufspaltungen, die beim Einelektronproblem im zylindrischen Felde auftreten[1]. Der Vergleich mit den magnetischen Beobachtungsdaten hat nur geliefert, dass von Entkoppelung in der Gruppe der Seltenen Erden kaum die Rede sein kann. Sieh weiter § 30 für das korrespondierende Resultat in der Fe-Gruppe, wo Entkoppelung wohl auftritt.

BETHE hat einige Rechnungen angestellt über das Einelektronproblem in Feldern tetragonaler Symmetrie. Eins der wichtigen

---

[1] Auch das Auftreten einer geringen Aufspaltung eines zweifach entarteten Niveaus, als Folge einer Abweichung der zylindrischen Symmetrie ist von KRAMERS behandelt worden.

Resultate dieser Rechnungen ist, dass die Auswahlregeln für Quantensprünge eine andere Gestalt annehmen als für das freie Atom, sodass die von JEAN BECQUEREL gefundene Ungültigkeit der Polarisationsregeln für ZEEMAN-Komponenten, ebenso wie die grossen Werte der Aufspaltungen erklärt werden.[1])

Da aber der Basis für Rechnungen von den zwei Autoren gelegt worden ist, wäre es sicher möglich schon jetzt, auf Grund von bekannten Kristallstrukturen eine nähere Konfrontation der theoretischen Vorstellungen mit den Beobachtungsdaten durchzuführen.

---

[1]) Jede Eigenfunktion ist in nullter Näherung eine lineare Kombination von den Eigenfunktionen mit m-Werten $m = \omega$ (mod. 4). Statt der Auswahlregel $\triangle m = 0, \pm 1$, tritt $\triangle \omega = 0, \pm 1$ auf.

Weiter kann bemerkt werden, dass die Eigenwerte mit ungeradem oder halb-zahligem ω (und m's) zweifach entartet, die mit geradem ω einfach sind.

KAPITTEL V.

§ 33. Die Seltenen Erden; Übersicht Messmethoden und Material.

Über den Verlauf der Suszeptibilitäten als Funktion der Temperatur liegen Messungen von Cabrera und seinem Mitarbeiter Duperier, und von der Leidener Schule vor, ausserdem noch einige älteren Messungen von Williams und eine Messreihe von Freed.

Wegen der geringen Anzahl der Messreihen sind auch Messungen, die nur bei Zimmertemperatur durchgeführt worden sind noch keineswegs ohne Belang. Wir beschränken uns also nicht auf die obengenannten Bestimmungen der Suszeptibilitäten bei verschiedenen Temperaturen, aber betrachten auch die Messungen von St. Meyer, Zernike und James, Decker, Cabrera und Williams, welche nur bei Zimmertemperatur ausgeführt worden sind [1]).

Auch brauchen wir uns nicht auf die Salze zu beschränken, weil die Oxyde sich mit diesen sehr analog benehmen, und die Seltene Erde sicher auch als ausgesprochenes Ion darin vorkommt.

Auch die Herkunft der Seltenen Erden, scheint, wegen der schwierigen Trennung, wichtig; daher geben wir auch diese immer an.

Die Messungen von Cabrera und von Duperier.

Diese Messungen sind im Temperaturgebiet von 293°—630° ausgeführt worden, nach der Faraday-Methode. Die Absolutwerte beruhen auf einem Etalon von Manganpyrophosphat, welches von Foex, Forrer, und Brunet gemessen war. Duperier hat auch einige Messungen im Weiss-schen Laboratorium in Strassburg mit der dortigen Standart-Apperatur ausgeführt.

---

[1]) Wir betrachten aber nur Messungen, welche in neuerer Zeit stattgefunden haben (seit 1910).

Die gebrauchten Substanzen rührten von **Auer v. Welsbach**, **Urbain** und **Prandtl** her. Leider ist zum Vergleich niemals eine selbe Verbindung von verschiedener Herkunft gemessen worden.

Es zeigte sich, dass nur die Suszeptibilitäten der stärkst magnetischen Ionen (die Gruppe Gd^{+++}, Tb^{+++}, Dy^{+++}, Ho^{+++}, Er^{+++}), dem **Curie-Weiss**-schen Gesetz sehr genau folgen. Im gebräuchlichen $1/\chi'$: T-Diagramm [1]) (wo eine gerade Linie Übereinstimmung mit dem **Curie**-schen Gesetz angibt zeigen die Ionen, welche der genannten Gruppe vorangehen, einen konvexen, die welche ihr folgen, einen konkaven Verlauf.

Cabrera und **Duperier** suchen dann die Beobachtungen durch ein erweitertes **Curie-Weiss**-sches Gesetz zu beschreiben, welches lautet:

$$\chi' + K = \frac{B}{T - \theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (82)$$

Die Messgenauigkeit lässt dann zu, die auf die gewöhnliche Weise aus B berechnete Magnetonenzahl um 0,3-0,4 **Weiss**-Magneton zu variieren. **Cabrera** und **Duperier** wählen sie dann so, dass sie ungefähr genau einer ganzen Zahl gleich wird. Für einige Fälle weicht die dann erhaltene Kurve im Diagramm nur um etwa 1% von der geraden Linie ab; dann haben wir, der Übersichtlichkeit wegen, auch die p und θ-Werte, welche eine möglichst gut an der Kurve anschliessenden geraden Linie definieren, angegeben.

Es sind meistens nicht die Messpunkte, sondern nur die erhaltenen p, K und θ Werte publiziert worden.

Die Leidener Messungen.

Das Temperaturgebiet der Leidener Messungen liegt meistens zwischen Zimmertemperatur und dem Tripelpunkt des Wasserstoffs (rund 14°—290°). $Gd_2(SO_4)_3.8\,H_2O$ wurde auch in dem Temperaturgebiet des flüssigen Heliums untersucht (bis 1,3°). Einige anhydrischen Salze wurden auch bei 373° gemessen.

Die gebrauchte Methode war meistens die **Gouy**-Methode; in einzelnen Fällen ($Gd_2(SO_4)_3 . 8H_2O$; $Er_2(SO_4)_3 . 8H_2O$) die **Faraday**-Methode. Die Magnetfelder sind ballistisch, zur Kontrolle auch einmal mit der COTTON-Wage kalibriert worden. Die Substanzen waren auf die von KAMERLINGH ONNES und PERRIER [1]) herrührende Quecksilber-Areometermethode aufgehängt worden.

---

[1]) χ' ist nach Leidener Gebrauch χ, korrigiert für den diamagnetischen Beitrag des Anions und des Kristallwassers; der diamagnetische Beitrag des Kations ist wohl zu vernachlässigen.

Die meisten der gebrauchten Substanzen waren reinste Produkte von URBAIN.

Die untersuchten Verbindungen bilden nicht, wie die von CABRERA und DUPERIER gemessenen, eine abgeschlossene Reihe. Vielmehr betrifft es gesonderte Untersuchungen um ein bestimmtes Problem aufzuklären, oder sind diejenigen Verbindungen gemessen worden, die zufälligerweise zu erhalten waren.

Die auftretenden Typen der Abweichungen bei tiefen Temperaturen sind in den Figuren 3 und 4 reproduziert worden.

Für die niedrigste und die höchste Temperatur wird häufig p_{eff}, die „efektive Magnetonenzahl", aufgegeben:

$$p_{eff} = 14{,}057 \sqrt{\chi M T}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (85)$$

wo M das Molekulargewicht pro magnetisches Ion bedeutet.

p_{eff} ist also die Magnetonenzahl, welche man aus der Messung bei der einen Temperatur angeben würde, wenn man annähme dass $\theta = 0$ sei.

Die Messungen von WILLIAMS.

Diese beziehen sich auf einige Oxyde, deren Suszeptibilität nach der FARADAY-Methode mit einer Drehwage bestimmt wurde.

Das Temperaturgebiet lag zwischen 133° und 573°.

Die gebrauchten Substanzen rührten von HOPKINS (University of Illinois) her.

Es ist nicht angegeben worden, wie der Magnet kalibriert wurde.

Die Messungen von FREED des $Sm(SO_4)_3 \cdot 8\,H_2O$.

Diese sind nach der GOUY-Methode ausgeführt worden mit einer Mikrowage bei Temperaturen zwischen 74° und 290°. Die Absolutwerte wurden ermittelt durch Vergleich mit einer Lösung von $NiCl_2$ (eine Substanz, die eingehend von BRANT und anderen Autoren untersucht worden ist [2]). Die gebrauchte Substanz rührte von JAMES her.

---

[1]) Sieh § 11. H. KAMERLINGH ONNES und A. PERRIER, *Comm. Leiden*, 116.

[2]) L. BRANT, *Phys. Rev.*, *17*, 678, 1921.

P. WEISS und E. D. BRUINS, *Proc. Ac. Amst.*, *18*, 346, 1915.

B. CABRERA, E. MOLES und J. GUZMAN, *Arch. Sc. Phys. et. Nat.*, *37*, 325, 1914.

Die Messungen von St. Meyer.

Diese sind bei Zimmertemperatur ausgeführt worden an verschiedenen Verbindungen der Seltenen Erden, meist Sulfat-Oktahydrate. Es wird angegeben, dass die Temperatur etwa 291° sei. Es wurde die Faraday-Methode gebraucht. Die Substanzen wurden an einer empfindlichen Wage aufgehängt. Die Absolutwerte sind durch Vergleich mit einer Messung mit Quecksilber erhalten. Die Suszeptibilität des Hg ist leider nicht sehr zuverlässig bekannt, sodass der gewählte Wert ein bischen willkürlich scheint. Es wird die mittlere Suszeptibilität pro Gramm-Ion angegeben, und nicht die für jede Substanz gesondert. Wir haben unten angenommen, dass der gegebene Mittelwert für alle untersuchten Substanzen gegolten hat, und haben eine Korrektion für den Diamagnetismus von Anion und Kristallwasser angebracht.

Die gebrauchten Substanzen waren reinste Produkte von Auer von Welsbach.

Die Messungen von Zernike und James.

Die Messungen von Zernike und James sind an Sulfat-Oktahydraten ausgeführt worden (für Ce^{+++} nur am Pentahydrat). Die Messungen geschahen nach der Faraday-Methode bei 293°. Es wurde auch sehr roh die Temperaturabhängigkeit bestimmt, dieselbe scheint uns aber nicht zuverlässig.

Zur Erhaltung von Absolutwerten wurde ein Vergleich mit anhydrischem $CoSO_4$ und $MnSO_4$ (deren Suszeptibilitäten von Théodoridès bestimmt worden sind) angestellt.

Die gebrauchten Substanzen waren von James und Mitarbeitern hergestellt worden.

Die Messungen von Decker.

Diese beziehen sich auf Lösungen der Nitrate bei 290°.

Die Methode beruhte auf die Ablenkung in der Lösung eines an einer Drehwage aufgehangten diamagnetischen Stäbchens in einem inhomogenen Felde. Da man drei Gleichungen braucht um die Konstante des Apparats und die Suszeptibilität des Stäbchens zu eliminieren, sind auch Messungen vorgenommen worden in Luft und reinem Wasser, deren Suszeptibilitäten genügend bekannt sind.

Die gefundenen Suszeptibilitäten waren unabhängig von der Konzentration. Die gebrauchten Substanzen rührten von Auer von Welsbach und Prandtl her.

Andere Untersuchungen.

Brunetti untersuchte die Temperaturabhängigkeit von $CePO_4$ zwischen 290 und 985. Es wurden keine Absolutwerte angegeben. Die Substanz wurde auch nicht von anderen Autoren untersucht.

Selwood untersuchte die Abhängigkeit von der Konzentration der Suszeptibilität von $Nd(NO_3)_3$ in wässeriger Lösung mit der Steighöhemethode. Absolutwerte wurden durch Vergleich mit Wasser erhalten.

Die Messungen an festen Stoffen sind immer an Kristallpulver gemacht worden.

Von den untersuchten Verbindungen sind nur die Kristallstrukturen der Oxyde, und die von CeF_3 untersucht worden. Letztere Substanz kristallisiert hexagonal [1]), während PrO_2 [2]) kubisch ist. Von den Trioxyden M_2O_3 liegen bei verschiedenen Temperaturen verschiedene Strukturen vor [3]). Es gibt kubische, hexagonale und monokline oder rhombische Modifikationen. Es wäre interessant den Zusammenhang zwischen Kristallstruktur und magnetischen Eigenschaften hier näher zu untersuchen.

§ 34. Die Beobachtungsdaten.

55 Elektronen; Ce^{+++}

Beobachter.	Herkunft Subst.	Subst.	Temp. Int.	Θ	p oder $p_{eff.}$
de Haas und Gorter [4])	Auer. Ges.	CeF_3	170–293	—62,0	12,49
Gorter, de Haas und v. d. Handel [5])	Auer Ges.	$CeCl_3$	137–373	—20,0	12,45
Cabrera [6])	Prandtl	$Ce_2(SO_4)_3.5H_2O$	290	—	11,89 (eff.)
Zernike und James [7])	James	„	293	—	11,74 (eff.)
Decker [8])	Prandtl	$Ce(NO_3)_3$.sol.	292	—	10,5 (eff.)
Brunetti [9])	de Haen	$CePO_4$	290–985	—	—

---

[1]) I. Oftedahl, *Z. f. Phys. Chem.*, *B*, *5*. 271, 1929 und *13*, 196, 1931.

[2]) P. P. Ewald und C. Hermann, *Strukturbericht* S. 197.

[3]) P. P. Ewald und C. Hermann, *Strukturbericht* S. 262.

[4]) W. J. de Haas und C. J. Gorter, *Comm. Leiden*, 210c.

[5]) C. J. Gorter, W. J. de Haas und J. v. d. Handel, *Comm. Leiden*, 218c.

[6]) B. Cabrera, *C. R.*, *180*, 669, 1925.

[7]) J. Zernike und C. James, *Journ. Am. Chem. Soc.*, *48*, 2827, 1926.

[8]) H. Decker, *Ann. der Physik*, *79*, 324, 1926.

[9]) R. Brunetti, *Il Nuovo Cimento*, *6*, 85, 1929.

CeF_3 und $CeCl_3$ sind bis zu 14° hinunter gemessen; der Typus der Abweichung vom CURIE-WEISS-schen Gesetz war der von Fig. 4 ($Nd_2(SO_4)_3.8H_2O$). $p_{eff.}$ nahm von 11,33 bis 7,55 bezw. von 12,11 bis 10,31 ab.

Nach BRUNETTI nimmt im untersuchten Temperaturgebiet $p_{eff.}$ um etwa 24% des Wertes bei 290° zu.

Als beste Magnetonenzahl nehmen wir $12{,}4^5$ an.

Pr^{++++}.

Beobachter.	Herkunft Subst.	Subst.	Temp. Int.	Θ	K. 10^6	p oder $p_{eff.}$
Cabrera und Duperier ¹)	Prandtl	PrO_2	293–630	—128,8 —163,1	—80 —	13,05 13,80
Williams ²)	Hopkins	„	293	—	—	11,7 (eff)

Wir geben als Magnetonenzahl 13 an.

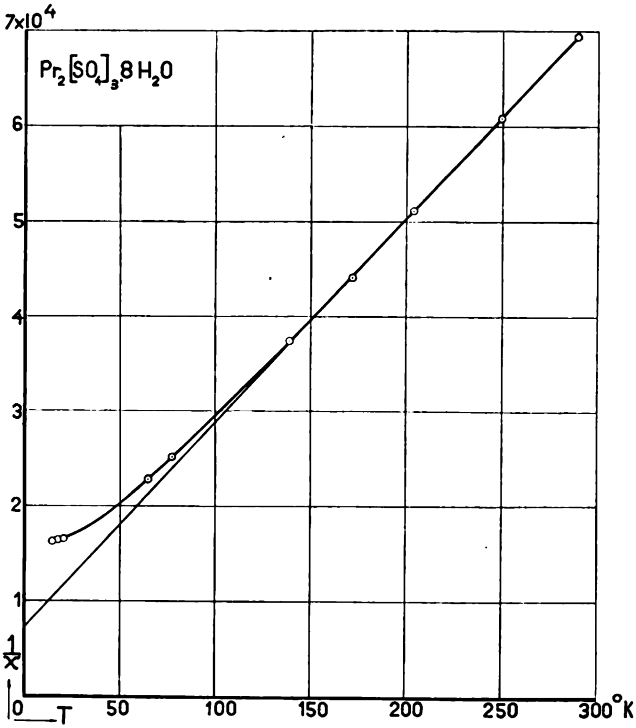


Fig. 3.

---

¹) B. CABRERA und A. DUPERIER, *C. R.*, *188*, 1640, 1929.

²) E. H. WILLIAMS, *Phys. Rev.*, *27*, 484, 1926.

56 Elektronen; Pr^{+++}.

Beobachter.	Herkunft Subst.	Subst.	Temp. Int.	Θ	K. 10^6	p oder $p_{eff.}$
Cabrera und Duperier 1)	Auer v. W.	$Pr_2(SO_4)_3$	293-630	—41,2	—160	18,05
				(—66,8)	—	19,00)
Gorter, de Haas u. v. d. Handel 1)	Urbain	$Pr_2(SO_4)_3$	77-373	—45,0	—	17,99
Gorter und de Haas 2)	Urbain	$Pr_2(SO_4)_3.8H_2O$	150-289	—32,0	—	17,89
Cabrera 1)	Auer v. W.	,,	290	—	—	17,89 (eff.)
St. Meyer 3)	Auer v. W.	$Pr_2(SO_4)_3.8H_2O, Pr_2O_3$ $P_2(SO_4)_3$, $Pr_2(C_2O_4)_3$	291	—	—	17,5 (eff.)
Zernike und James 1)	James	$Pr_2(SO_4)_3.8H_2O$	293	—	—	17,2 (eff.)
Cabrera 1)	Prandtl	Pr_2O_3	293-630	—65,5	—120	17,91
				(-87,7	—	18,71)
Decker 1)	Auer v. W.	$Pr(NO_3)_3$.sol.	292	—	—	16,95 (eff.)

$Pr_2(SO_4)_3$ und $Pr_2(SO_4)_3.8H_2O$ sind in Leiden bis zu $T = 14°$ hinunter gemessen. Die Abweichung bei der ersten Substanz vom CURIE-WEISS-schen Gesetz war vom Typus der Fig. 4 ($Nd_2(SO_4)_3.8H_2O$); $p_{eff.}$ nahm von 16,97 bis 9,43 ab. Die Kurve im $1/\chi'$: T-Diagramm der zweiten Substanz ist in Fig. 3 wieder gegeben worden. $p_{eff.}$ nimmt von 16,96 bis 7,79 ab.

Als beste Magnetonenzahl nehmen wir 17,9 an.

57 Elektronen; Nd^{+++}.

Beobachter.	Herkunft Subst.	Subst.	Temp. Int.	Θ	K. 10^6	p oder $p_{eff.}$
Cabrera und Duperier 4)	Auer v. W.	$Nd_2(SO_4)_3$	293-630	—18,3	—460	17,19
Gorter und de Haas 4)	Urbain	$Nd_2(SO).8H_2O$,,	77-288	—45,0	—	17,93
Cabrera 4)	Auer v. W.	,,	290	—	—	18,00 (eff.)
Z. und J. 1)	James	,,	293	—	—	17,5 (eff.)
St. Meyer 3)	Auer v. W.	$Nd_2(SO_4)_3.8H_2O, Pr_2O_3$ $Nd_2(SO_4)_3, Nd_2(C_2O_4)_3$	291	—	—	17,6 (eff.)
Cabrera und Duperier 1)	Prandtl	Nd_2O_3	293-630	—26,0	—350	16,97
Williams 5)	Hopkins	,,	296-556	—	—	—
Decker 1)	Auer v. W.	$Nd(NO_3)_3$.sol.	292	—	—	17,1 (eff.)

---

1) l. c.

2) C. J. GORTER und W. J. DE HAAS, *Comm. Leiden*, 218*b*.

3) ST. MEYER, *Phys. Z.schr.*, *26*, 51 und 478, 1925.

4) C. J. GORTER und W. J. DE HAAS, *Comm. Leiden*, 218*b*.

5) E. H. WILLIAMS, *Phys. Rev.*, *12*, 158, 1918.

Beobachter.	Herkunft Subst.	Subst.	Temp. Int.	Θ	K. 10^6	p oder $p_{eff.}$
Selwood [1]	Hopkins	$Nd(NO_3)_3$.sol.	293	—	—	17,1-16,9

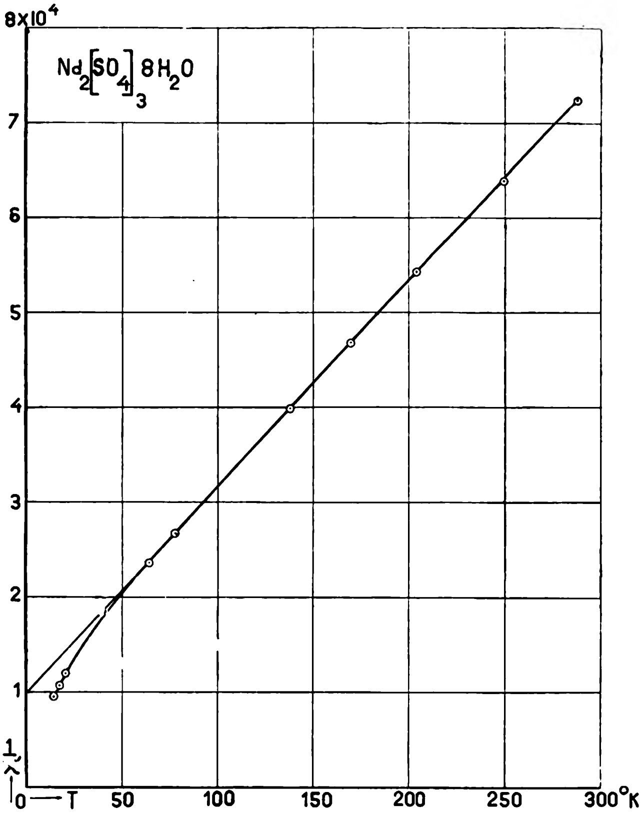


Fig. 4.

$Nd_2(SO_4)_3.8H_2O$ wurde in Leiden bis zu T = 14° hinunter gemessen. Die Resultate sind in Fig. 4 reproduziert; $p_{eff.}$ nahm von 16,68 bis 10,26 ab.

Williams gibt an, dass besonders bei tiefen Temperaturen die Kurve im $1/\chi'$: T-Diagramm sehr konvex verläuft.

Selwood gibt an das bei Verdünnung von 0,3 bis 3 mol. pro Liter $p_{eff.}$ von 17,1 bis 16,9 abnimmt.

Als beste Magnetonenzahl geben wir 18,1 an.

---

[1] P. Selwood, *Journ. Am. Chem. Soc. 53*, 1799, 1931.

58 Elektronen; Il^{+++}, Sa^{++++}.

Keine Messungen.

59 Elektronen; Sm^{+++}.

Beobachter.	Herkunft Subst.	Subst.	Temp. Int.	Θ	K. 10^6	p oder $p_{eff.}$
Cabrera 1)	Auer v. W.	$Sm_2(SO_4)_3$	293–630	—	975	∾ 2
			293	—	—	7,9 (eff.)
Freed 2)	James	$Sm_2(SO_4)_3.8H_2O$	74–291	—	—	—
Z. und J. 1)	James	,,	293	—	—	7,6 (eff.)
Cabrera 1)	Auer v. W.	,,	290	—	—	7,64 (eff.)
St. Meyer 1)	Auer v. W.	,,	291	—	—	7,5 (eff.)
Cabrera und Duperier 1)	Prandtl	Sm_2O_3	293–630	—	935	∾ 1
			293	—	—	7,57 (eff.)
Williams 1)	Hopkins	Sm_2O_3	295–343	—	105	—
			295	—	—	7,8 (eff.)
Decker 1)	Auer v. W.	$Sm(NO_3)_3$.sol.	292	—	—	8,08 (eff.)

Freed findet, dass bei Zimmertemperatur die Suszeptibilität fast unabhängig von der Temperatur ist; bei tieferen Temperaturen nimmt sie aber ziemlich stark zu; $p_{eff.}$ variiert von 7,76 bis4, 53.

Wir geben keine Magnetonenzahl an.

60 Elektronen; Eu^{+++}

Beobachter.	Herkunft Subst.	Subst.	Temp. Int.	Θ	K. 10^6	p oder $p_{eff.}$
Cabrera und Duperier 1)	Auer v. W.	$Eu_2(SO_4)_3$	293–630	—101,9	1116	18,6
Cabrera 1)	Auer v. W.	$Eu_2(SO_4)_3.8H_2O$	290	—	—	17,92 (eff.)
St. Meyer 1)	Auer v. W.	,,	291	—	—	18,1 (eff.)
Cabrera und Duperier 1)	Urbain	Eu_2O_3	293–630	—135,3	848	18,04
Decker 1)	Auer v. W.	$Eu(NO_3)_3$.sol.	292	—	—	19,68 (eff.)

Wir geben keine Magnetonenzahl an.

---

1) l. c.

2) S. Freed, *Journ. Am. Chem. Soc. 52*, 2702, 1930.

61 Elektronen; Gd^{+++}

Beobachter.	Herkunft Subst.	Subst.	Temp. Int.	Θ	K. 10^6	p oder $p_{eff.}$
Cabrera und Duperier 1)	Auer v. W.	$Gd_2(SO_4)_3$	293–630	0,6	—	39,14
Z. und J. 1)	James	,,	293	—	—	38,65 (eff.)
Woltjer und K. Onnes 2)	Urbain	$Gd_2(SO_4)_3.8H_2O$	1,3–294	0,0	—	38,6
Cabrera 1)	Auer v. W.	,,	290	—	—	40,07 (eff.)
St. Meyer 1)	Auer v. W.	,,	291	—	—	40,3 (eff.)
Z. und J. 1)	James	,,	293	—	—	38,73 (eff.)
Jackson und K. Onnes 3)	Urbain	$Gd(C_2H_5.SO_4)_3.9H_2O$	14–290	0,0	—	37,3
Cabrera und Duperier 1)	Urbain	Gd_2O_3	293–630	—13,3	—	39,09
Williams 4)	Hopkins	,,	133–573	— 9	—	37,5
Decker 1)	Auer v. W.	$Gd(NO_3)_3$.sol.	292	—	—	39,08 (eff.)

In Leiden wurde die paramagnetische Sättigungskurve des $Gd_2(SO_4)_3.8H_2O$ bestimmt. Die gefundene Kurve stimmt gut mit derjenigen, welche theoretisch zu erwarten wäre überein. Sieh den nächsten Paragraphen. Es wurde auch gefunden dass Krystalle von $Gd.(C_2H_5.SO_4)_3.9H_2O$ bis im Wasserstoffgebiet magnetisch isotrop sind.

Als beste Magnetonenzahl geben wir 39,1 an.

62 Elektronen; Tb^{+++}

Beobachter.	Herkunft Subst.	Subst.	Temp. Int.	Θ	K. 10^6	p oder $p_{eff.}$
Cabrera und Duperier 1)	Auer v. W.	$Tb_2(SO_4)_3$	293–630	—2,3	—	47,83
Cabrera 1)	Auer v. W.	$Tb_2(SO_4)_3.8H_2O$	290	—	—	47,92 (eff.)
Z. und J. 1)	James	,,	293	—	—	46,5 (eff.)
St. Meyer 1)	Auer v. W.	Tb_2O_3	291	—	—	44,8 (eff.)
Decker 1)	Auer v. W.	$Tb(NO_3)_3$.sol.	292	—	—	48,52 (eff.)

Cabrera hat noch das höhere Oxyd von Tb : Tb_4O_7 gemessen und berichtet $\Theta = —23,2$.

Als beste Magnetonenzahl geben wir 47,9 an.

---

1) l. c.

2) H. R. Woltjer und H. Kamerlingh Onnes, *Comm. Leiden*, 167*c*. Die weniger zuverlässige Messung eines andern Preparats ergab p = 39.8

3) L. C. Jackson und H. Kamerlingh Onnes, *Comm. Leiden*, 168*b*.

4) E. H. Williams, *Phys. Rev.*, *14*, 348, 1920.

63 Elektronen; Dy^{+++}

Beobachter.	Herkunft Subst.	Subst.	Temp. Int.	Θ	K. 10^6	p oder $p_{eff.}$
Cabrera und Duperier [1])	Auer v. W.	$Dy_2(SO_4)_3$	293–630	—10,8	—	52,04
Cabrera [1])	Auer v. W.	$Dy_2(SO_4)_3.8H_2O$	290	—	—	52,25 (eff.)
St. Meyer [1])	Auer v. W.	,,	291	—	—	53,1 (eff.)
Cabrera und Duperier	Urbain	Dy_2O_3	293–630	—19,0	—	58,95
K. Onnes und Oosterhuis [2])	Urbain	,,	14–294	—16	—	50,6
Williams [3])	Hopkins	,,	133–573	—14	—	53,5
Decker [1])	Auer v. W.	$Dy(NO_3)_3$.sol.	292	—	—	53,95 (eff.)

Sucksmith hat an Dy_2O_3 den Einstein-de-Haas-Effekt bestimmt. Sieh den nächsten Paragraphen.

Als beste Magnetonenzahl geben wir 52 an.

64 Elektronen; Ho^{+++}

Beobachter.	Herkunft Subst.	Subst.	Temp. Int.	Θ	K. 10^6	p oder $p_{eff.}$
Cabrera und Duperier [1])	Auer v. W.	$Ho_2(SO_4)_3$	293–630	—8,1	—	52,27
Cabrera [1])	Auer v. W.	$Ho_2(SO_4)_3.8H_2O$	290	—	—	52,00 (eff.)
St. Meyer [1])	Auer v. W.	,,	291	—	—	52,0 (eff.)
Z. und J. [1])	James	$Ho_2(SO_4)_3.8H_2O$	293	—	—	51,4 (eff.)
Cabrera und Duperier [1])	Auer v. W.	Ho_2O_3	293–630	—13,9	—	51,85
Williams [1])	Hopkins	,,	293	—	—	53,0 (eff.)

Als beste Magnetonenzahl geben wir 52,0 an.

65 Elektronen; Er^{+++}

Beobachter.	Herkunft Subst.	Subst.	Temp. Int.	Θ	K. 10^6	p oder $p_{eff.}$
Cabrera und Duperier [1])	Auer v. W.	$Er_2(SO_4)_3$	293–630	—10,8	—	47,32
de Haas, Wiersma und Capel [4])	Auer v. W.	$Er_2(SO_4)_3.8H_2O$	14–285	— 1,9	—	44,82

---

[1]) l. c.

[2]) H. Kamerlingh Onnes und A. Perrier, *Comm. Leiden*, 122*a*.
H. Kamerlingh Onnes und E. Oosterhuis, *Comm. Leiden*, 132*e*, 139*e*.
Nur wenig Messpunkte; die Kurve scheint im $1/\chi'$: T-Diagram etwas konvex zu verlaufen.

[3]) Die Kurve verläuft wieder etwas konvex im $1/\chi'$: T-Diagram. l. c.

[4]) W. J. de Haas, E. C. Wiersma und W. H. Capel, *Comm. Leiden*, 201*b*.

Beobachter.	Herkunft Subst.	Subst.	Temp. Int.	Θ	$K. 10^6$	p oder $p_{eff.}$
Cabrera 1)	Auer v. W.	$Er_2(SO_4)_3.8H_2O$	290	—	—	46,98 (eff.)
St. Meyer 1)	Auer v. W.	,,	291	—	—	46,8 (eff.)
Z. und J. 1)	James	,,	293	—	—	47,7 (eff.)
Cabrera und Duperier 1)	Auer v. W.	Er_2O_3	293-630	—15,0	—	47,24
Williams 2)	Hopkins	,,	133-553	—12	—	46,7

$Er_2(SO_4)_3.8H_2O$ folgt bis T = 14° gut dem CURIE-WEISS-schen Gesetz; der Absolutwert scheint, mit Rücksicht auf die übereinstimmende Resultate anderer Forscher (es wurde nach der FARADAY-Methode gemessen, im Gegensatz zu den meisten anderen Leidener Untersuchungen) nicht sehr zuverlässig. 3)

Wir geben als beste Magnetonanzahl 47,3 an.

66 Elektronen; Tu^{+++}

Beobachter.	Herkunft. Subst.	Subst.	Temp. Int.	Θ	$K. 10^6$	p oder $p_{eff.}$
Cabrera und Duperier 1)	Auer v. W.	$Tu_2(SO_4)_3$	293-630	—42,6	867	37,95
				—11,1	—	35,66
Duperier 4)	Auer v. W.	,,	293-677	—11,7	—	35,38
Cabrera und Duperier 5)	Auer v. W.	Tu_2O_3	293-630	—41,6	257	36,16
				—31,2	—	35,45
St. Meyer 1)	Auer v. W.	,,	291	—	—	37,5 (eff.)

Als beste Magnetonenzahl nehmen wir 36 an.

67 Elektronen; Yb^{+++}

Beobachter.	Herkunft. Subst.	Subst.	Temp. Int.	Θ	$K.10^6$	p oder $p_{eff.}$
Cabrera und Duperier 1)	Auer v. W.	$Yb_2(SO_4)_3$	293-630	—82,1	323	23,98
				(—48	—	22,4)
Duperier 4)	Auer v. W.	,,	293-705	—88,1	335	24,21
				(—48	—	22,4)
Cabrera 1)	Auer v. W.	$Yb_2(SO_4)_3.8H_2O$	290	—	—	21,64 (eff.)
St. Meyer 1)	Auer v. W.	,,	291	—	—	22,7 (eff.)
Z. und J. 1)	James	,,	293	—	—	22,0 (eff.)
Cabrera und Duperier 6)	Urbain	Yb_2O_3	293-630	—104,5	160	22,86
				— 84,5	—	22,1

Als beste Magnetonenzahl geben wir 22,5 an.

---

1) l. c. 2) Die Kurve verläuft wieder etwas konvex, l. c.

3) Eine Wiederholung dieser Messungen im Leidener Laboratorium ist in Vorbereitung.

4) A. DUPERIER. *An. Soc. Esp. Fis. y Quim.* *28*, 47, 1930.

5) Verunreinigt durch Karbonat, l. c.

6) Verunreinigt mit Lu, l. c.

§ 35. Interpretation der Beobachtungsdaten.

Es ist auffallend, dass nach den Untersuchungen CABRERA'S über die Oxyde und die anhydrischen Sulfaten, nur die Verbindungen der Ionen Gd^{+++}, Tb^{+++}, Dy^{+++}, Ho^{+++} und Er^{+++}, dem CURIE-WEISS-schen Gesetz innerhalb der Messgenauigkeit gehorchen. Wie in § 33 schon bemerkt worden ist sind die Kurven der Verbindungen von Tu^{+++} und Yb^{+++} im $1/\chi'$: T-Diagramm ein wenig konkav, und die Kurven der Verbindungen von Pr^{++++}, Pr^{+++}, Nd^{+++}, Sm^{+++} und Eu^{+++} dagegen mehr oder weniger konvex. Auch WILLIAMS beobachtete bei Nd_2O_3 eine stark konvex verlaufende Kurve (allerdings glaubte er das auch in geringerem Masse bei Gd_2O_3, Dy_2O_3, und Er_2O_3 zu finden).

Es liegt vor der Hand anzunehmen, dass man hier mit dem VAN VLECK-schen temperaturunabhängigen Paramagnetismus zu tun hat.

Man würde dann auch theoretisch genau die von CABRERA und DUPERIER aufgestellte Formel erwarten müssen. Nur sind die aus den aufgegebenen Zahlen folgenden temperaturunabhängigen Terme für die ersten Ionen etwa zweimal so gross wie diejenigen, welche aus der Annahme, dass die „partielle Abschirmungskonstante 34 ist, folgen [1]). Man hat einerseits den Eindruck, dass die VON CABRERA und DUPERIER angegebenen K-Werte (besonders bei Nd^{+++}) etwas zu gross sind; andrerseits ist es keineswegs ausgeschlossen, dass die partielle Abschirmungskonstante um einige Einheiten von dem Wert 34 abweicht [2]).

In § 28 ist schon betont worden, dass es nicht gelingt den von FREED beobachteten Verlauf der Suszeptibilität von $Sm_2(SO_4)_3 \cdot 8H_2O$ aus der mit freien Ionen arbeitenden Vorstellung zu verstehen. Man muss wohl, um den Verlauf zu verstehen dem STARK-Effektaufspaltungen unbedingt Rechnung tragen.

Das nämliche gilt wohl auch für Eu^{+++}; dass die Suszeptibilität noch so stark mit der Temperatur variiert, kann man aber schon für das freie Ion so verstehen, dass auch der zweitniedrigste Term des Multipletts bei höherer Temperatur stärker besetzt wird. Dieses Niveau hat zwar eine Magnetonenzahl von $p = 10{,}5$, aber auch einen nicht unbedeutenden temperaturabhängigen Diamagnetismus; sodass er in das betreffende Temperaturgebiet viel schwächer magnetisch ist als der Grundterm ¹).

---

[1]) **Man errechnet so bezw. für Ce^{+++} und Pr^{++++} : 39.10^{-6}, und 33.10^{-6}, für Pr^{+++} : 96.10^{-6}, für Nd^{+++} : 220.10^{-6} pro Grammion.**

[2]) **(Z-δ) tritt in Gl. (65) in der vierten Potenz auf!**

Was nun den Tu^{+++}- und Yb^{+++}-Verbindungen anbelangt, scheint kein Grund vorzuliegen um hier irgend einen temperaturunabhängigen Diamagnetismus zu erwarten. Die Abweichungen von dem Curie-Weiss-schen Gesetz sind aber nur sehr klein (höchstens ½ %). In einem Falle ($Tu_2(SO_4)_3$) findet Duperier sogar bei nachheriger Messung mit anderer Apparatur wieder genau das Curie-Weiss-sche Gesetz. Die Substanzen sind auch oft verunreinigt, die Autoren geben dies selbst für die Oxyde an.

Es scheint plausibel, dass die sehr kleinen Abweichungen daher rühren, dass kT nicht mehr sehr gross gegen die Stark-Effekt aufspaltungen ist. ($k\theta$ ist hier auch grösser als in der Mittelgruppe). Man wird dann sehr oft gerade eine konkave Kurve im $1/\chi'$: T-Diagramm erwarten müssen. Es scheint denn auch besser, für die Ermittlung der Magnetonenzahl eine gerade Linie im Diagramm durch die Messpunkten zu ziehen, wie wir gemacht haben, als die Zahl nach der Methode von Cabrera und Duperier abzuleiten.

Es sind noch wenig Messungen bei tiefen Temperaturen ausgeführt worden. Bei denjenigen über die wir jetzt verfügen, fällt es aber auf dass, solbald T von der Ordnung von $|\theta|$ wird, Abweichungen vom Curie-Weiss-schen Gesetze auftreten. Dies wäre in Übereinstimmung mit der in § 22 angegebenen Möglichkeit, dass θ vom Aufspaltung des Grundniveaus durch Stark-Effekte herrührt. θ ist immer negativ, was dann bedeuten sollte dass der magnetische Schwerpunkt energetisch höher liege als der statistische. Ein theoretischer Grund hierfür ist noch nicht angegeben worden.

Es ist schon längst bekannt, dass die Salze mit viel Kristallwasser kleinere $|\theta|$ Werte haben als die anhydrische. Aber dass $|\theta|$ dennoch beträchtliche Werte haben kann, zeigen die Beispiele von $Pr_2(SO_4)_3 . 8H_2O$ und $Nd_2(SO_4)_3 . 8H_2O$, wo θ: —32,0 bezw. —45,0 ist.

Dass der $|\theta|$-Wert von CeF_3 grösser ist als der welcher bei $CeCl_3$

---

¹) Setzt man wieder $\vartheta = 34$, so findet man für den Energieunterschied zwischen den beiden Termen 255 cm^{-1}, für den niedrigsten einen temperaturunabhängigen Paramagnetismus von 7950 . 10^{-6} für den nächsten einen Diamagnetismus von 490 . 10^{-6} pro Grammion. Der Beitrag der 10,5 W.M. beträgt bei 400° : 1300 . 10^{-6}.

auftritt, wäre nach der obigen Auffassung auch zu erwarten, da F^{--} wegen seines kleineren Radius im allgemeinen zu grösseren Aufspaltungen Anlass geben wird als Cl^{-}.

Weiter ist es auffallend, dass bei 9 von den 10 bei tiefen Temperaturen untersuchten Stoffen, die Kurve im $1/\chi'$: T-Diagramm konvex nach der T-Achse gekrümmt ist oder gerade bleibt; nur bei $Pr_2(SO_4)_3 . 8H_2O$ ist die Kurve konkav, und scheint die Suszeptibilität bei sehr tiefen Temperaturen unabhängig von der Temperatur zu werden.

Dann müsste sich also der Grundterm im Magnetfeld nicht aufspalten, also nicht entartet sein (denn eine BOLTZMANN-Verteilung über die Komponenten einer ZEEMAN-Aufspaltung gibt Anlass zu einem temperaturabhängigen Glied).

Wie in § 34 schon bemerkt worden ist, ist ein nicht entarteter Term nur möglich, wenn die Anzahl der Elektronen gerade ist. Unser Ergebnis steht hiermit im Einklang, denn Pr^{+++} hat 2 Elektronen in der 4f-Unterschale. Alle anderen bei tiefer Temperatur untersuchten Ionen haben ungerade Elektronenanzahl, die Ursache davon ist wohl, dass die Atome mit gerader Atomnummer am häufigsten vorkommen und also leichter zu erhalten sind.

Dass $Pr_2(SO_4)_3$ bei tiefen Temperaturen sich anders benimmt, ist so zu verstehen dass der niedrigste Term bei gerader Elektronenzahl nicht-entartet sein kann, es aber nicht zu sein braucht. Es ist indessen auch nicht ausgeschlossen, dass auch hier der niedrigste Term nicht-entartet ist, die Aufspaltung aber zu klein ist um sich schon bei den erreichten Temperaturen bemerkbar zu machen in der Suszeptibilität.

Die für das freie ¹) Gd^{+++}-Ion nach § 23 zu erwartenden Sättigunskurve hat die Form:

$$\bar{\mu}_H = \frac{\sum_{(n)} 2n \frac{e}{2mc} \frac{h}{2\pi} e^{-\frac{n.H.(e/2mc)\,h/2\pi}{kT}}}{\sum_{(n)} e^{-\frac{n.H.(e/2mc)\,h/2\pi}{kT}}}, \quad \ldots\ldots \quad (83)$$

wo n die Werte $-{}^7/_2$, $-{}^5/_2$, ..., $+{}^7/_2$ hat.

---

¹) Da ein S-Term sich in nullter Näherung nicht aufspaltet in elektrischen Feldern, muss man auch in einem Kristall diese Kurve erwarten. Auch die von JACKSON beobachtete magnetische Isotropie des Gd-Aethylsulfats, und die vorläufigen Ergebnisse des Studiums der Absorbtionsspektren weisen darauf hin.

S. FREED und F. H. SPEDDING, *Phys. Rev.*, *38*, 670, 1931.

F. H. SPEDDING und G. C. NUTTING, *Phys. Rev.*, *38*, 2294, 1931.

Um die experimentellen Resultaten hiermit zu vergleichen ist es erst notwendig die Temperaturen zu korrigieren, die seit der Publikation von WOLTJER und K. ONNES besser als Funktion vom Dampfdruck bestimmt worden sind ¹). Weiter scheint es angebracht eine, die Entmagnetisierungskorrektion aufhebende Korrektion für die LORENTZ-Polarisation anzubringen (sieh § 8) Durch Anbringung dieser Korrektionen kommen die Messungen wesentlich besser auf eine Kurve zu liegen. Die experimentellen Werte liegen im Gebiete der Sättigung etwa 1 % über die theoretische. Die Messgenauigkeit in Betracht genommen ist die Übereinstimmung also gewiss nicht unbefriedigend.

Die Messungen stimmen aber auch ebenso gut mit der auf klassischer Basis berechneten LANGEVIN-Kurve:

$$\bar{\mu}_H = \coth \frac{\mu H}{kT} - \frac{kT}{\mu H} .$$

Es ist dann angenommen worden, dass alle Orientierungen des Momentes μ gegen das Feld möglich sind; die beide Kurven unterscheiden sich nur wenig obgleich die Sättigungswerte 7 . (e/2 mc). h/2π bezw. etwa $\sqrt{63}$ (e/2 mc) . h/2π sind. Die Messpunkte liegen im Gebiet der Sättigung auch etwa 1 % unter diese Kurve. Obgleich die LANGEVIN-sche Kurve jetzt nur noch historische Bedeutung hat, kann man aus den Sättigungsmessungen also kein Argument für oder gegen sie ableiten.

SUCKSMITH ²) hat den DE HAAS-EINSTEIN-Effekt für Dy_2O_3 gemessen. Wie in § 14 bemerkt worden ist, bestimmt man das Verhältnis zwischen magnetischem und mechanischem Moment; also den Aufspaltungsfaktor. Theoretisch wird man für das Dy^{+++}-Ion: g = 4/3 erwarten. Experimentell wurde in guter Übereinstimmung hiermit g = 1,28 ± 0,07 gefunden.

RAMAN und CHINCHALKAR ³) haben vor kurzem eine sehr schwache magnetische Doppelbrechung (COTTON-MOUTON-Effekt) an Lösungen von Salzen der Seltenen Erden beobachtet.

Im Gegensatz zu den andern Seltenen Erden, bei welchen der Magnetismus auch von der Bahnbewegung der Elektronen herrührt, zeigt Gd^{+++} diesen Effekt nicht. Auch für das unmagnetische La^{+++} besteht der Effekt nicht.

---

¹) W. H. KEESOM, S. WEBER und G. NORGAARD, *Comm. Leiden* 202*b*.
W. H. KEESOM, S. WEBER und G. SCHMIDT, *Comm. Leiden* 202*c*.

²) C. V. RAMAN und S. W. CHINCHALKAR, *Nature, 128*, 758, 1931.

³) W. SUCKSMITH, *Proc. Roy. Soc. A, 128*, 276, 1930.

Ein Vergleich zwischen den experimentellen Ergebnissen und den aus den theoretischen Vorstellungen zu erwartenden wäre instruktiv.

Auf die Interpretation der Absorbtionsspektren werden wir hier nicht näher eingehen. Es liegen noch sehr viele Probleme vor, es ist nicht einmal sicher bekannt ob die Linien Übergangen zur 5d-Unterschale zu zuschreiben sind, oder Umordnungen in der 4f-Unterschale. ¹)

§ 36. Interpretation der Drehungsmessungen.

In § 31 haben wir betont, dass wenn die paramagnetische Drehung dem von JEAN BECQUEREL und DE HAAS aufgestellten Gesetz:

$$\varrho = \varrho^{\infty}\ (\lambda,T)\ \mathrm{tgh}\frac{\mu_H H}{k T}$$

folgt, man aus der Form der Sättigungskurve die Grösse des magnetischen Momentes in der Feldrichtung ableiten kann.

Bisher ist über solche Bestimmungen von μ_H in den natürlichen Kristallen Tysonit und Xenotim ²) berichtet ³) worden. Für Tysonit wurde in der Richtung der optischen Achse 1,0 . (h/2 π) . e/2 mc gefunden; senkrecht auf diese Richtung 0,68⁷ bezw. 0,54⁷ (h/2 π) . e/2 mc in zwei den hexagonalen Achsen nahe liegenden Richtungen. Für Xenotim 7 . (h/2 π) . e/2 mc in der Richtung der Achse. Bei Xenotim wurde bei sehr tiefen Temperaturen eine Abweichung von dem BECQUEREL-DE HAASschen Gesetz gefunden, die zu erst von KRAMERS und BECQUEREL ⁴) gedeutet wurde als die Folge einer kleinen Aufspaltung des zweifach entarteten Grundterms; später hat KRAMERS auf eine natürlichere Erklärung hingewiesen und betont, dass bei den dünnen Plättchen, die Entmagnetisierung nicht vernachlässigt werden darf. KRAMERS und

---

¹) Vgl. S. FREED, *Phys. Rev.*, *38*, 2122, 1931.

F. H. SPEDDING und G. C. NUTTING, *Phys. Rev.*, *38*, 2294, 1931.

²) JEAN BECQUEREL und W. J. DE HAAS, *Comm. Leiden*, 193*a*, 199*a*, 199*b*, 204*a*, 211*b*, 211c.

JEAN BECQUEREL, W. J. DE HAAS und H. A. KRAMERS, *Comm. Leiden*, 204*b*.

³) Kürzlich auch über $2\,Ce(NO_3)_3 . 3\,Mg(NO_3)_2 . 24\,H_2O$ und einige Kristalle der Fe-Gruppe.

JEAN BECQUEREL, W. J. DE HAAS und J. v. D. HANDEL, *Comm. Leiden* 218*a*.

⁴) JEAN BECQUEREL und H. A. KRAMERS, *Comm. Leiden Supp.* 68.

Becquerel [1]) geben an, dass die Drehung im Xenotim (Y, Er, Ce, Gd, . . PO_4) wahrscheinlich dem Gd^{+++}-Ion zugeschrieben werden muss. Es wäre nach unserer Meinung plausibeler die Drehung dem Er^{+++} zuzuschreiben, besonders weil man bisher auf keinerlei [2]) Weise eine Aufspaltung des achtfachen Grundterms des Gd^{+++} in Kristallen hat beobachten können.

Zur Erklärung der Drehung bei Tysonit (La, Ce, Pr, Nd, . . F_3), die gewiss [3]) dem Ce^{+++}-Ion zugeschrieben werden muss, haben Becquerel und Kramers [1]) angenommen, dass das elektrische Feld Entkoppelung zwischen Spin und Bahn bewirkt. Ist die Entkoppelung vollständig, so könnte man in allen Richtungen $\mu_H = 1 \, . \, (h / 2\pi) \, . \, e / 2\, mc$ erwarten. Ist die Entkoppelung nicht vollständig, so wird man z. B. bei zylindrisch-symmetrischen Felde in der Richtung der Achse noch ungefähr den nämlichen Wert finden; in der Richtung senkrecht zur Achse aber ziemlich bald bedeutend niedrigere Werte. Dies stimmt alles gut mit den Beobachtungen, nur findet man dass die zylindrische Symmetrie nicht streng realisiert ist, sondern nur als erste Näherung gelten kann.

Der fragliche Punkt ist nur, ob die Stark-Effektaufspaltung wirklich grösser als die Dublettaufspaltung des freien Ions sein kann. Man muss erwarten, dass letztere von der Grössenordnung von 2000 cm^{-1} ist. Die Stark-Effektaufspaltung muss also noch bedeutend grösser sein. Auf jeden Fall müsste man bei Zimmertemperatur (k T von der Ordnung von 200 $cm)^{-1}$ auch noch das niedrige Moment von etwa $1 \, . \, (h / 2\pi) \, . \, e / 2\, mc$ finden. Dies korrespondiert mit einem Absolutwert des Momentes von 8,6 Weiss-Magnetonen [4]). Bei einer zur Aufklärung dieser Frage angestellten Untersuchung finden de Haas und Gorter [5]) bei CeF_3, das die nämliche Kristallstruktur wie Tysonit [6]) hat, dass zwar im Wasserstoffgebiet die effektive Magnetonenzahl sogar bis 7,55 abnimmt, dass aber die Magnetonenzahl bei Zimmertemperatur genau den

---

[1]) Jean Becquerel und H. A. Kramers, *Comm. Leiden. Supp.* 68.

[2]) Paramagnetische Sättigung, magnetische Isotropie, Absorbtionsspektren. Sieh § 35.

[3]) Pr^{+++}- und Nd^{+++}- Gläser geben im Gegensatz zu Ce^{+++}- Glas nur schwache magnetische Drehungen. Jean Becquerel und W. J. de Haas, *Comm. Leiden*, 199*a*.

[4]) Sieh § 16.

[5]) W. J. de Haas und C. J. Gorter, *Comm. Leiden* 210c.

[6]) I. Oftedahl, *Z. f. Phys., Chem. B 5*, 272, 1929 und *13*, 196, 1931.

Hund-schen Wert hat (12,49 statt 12,56). Von Entkoppelung kann also nicht die Rede sein, und der Wert des Momentes in der Richtung der Achse beruht auf der „zufälligen" Beschaffenheit der elektrischen Felder in der Umgebung des Ce^{+++}-Ions [1]).

Es scheint, dass nur vielleicht in den Fällen von Sm^{+++} und Eu^{+++} die Aufspaltungen des **Stark**-Effektes vergleichbar werden können mit den Mutiplettaufspaltungen des freien Ions.

§ 37. Die Fe-Gruppe; Übersicht über die Messungen.

In der Fe-Gruppe werden wir fast ausschliesslich achtgeben auf die Untersuchungen, wobei χ als Funktion der Temperatur untersucht wurde. Die anderen Untersuchungen, welche seit 1910 noch angestellt worden sind, hatten mehr einen besonderen Zweck.

So untersuchten **Finke** [2]) und **Rabi** [3]) Kristalle, **Brant** [4]) und einige Forscher aus der Schule von **Weiss** und **Cabrera** [5]) den Einfluss der Verdünnung von Lösungen auf die Suszeptibilität, **Veil** [6]) versuchte chemische Änderungen auf magnetischem Wege zu demonstrieren und **Falkenberg** [7]) und **Belz** [8]) probierten neue induktive Messmethoden aus.

Die Bedingung der chemischen Reinheit der gebrauchten Substanzen spielt eine geringe Rolle, da im Gegensatz zur Gruppe der Seltenen Erden, die Reinheit der von den grossen chemischen Firmen gelieferten „Reinstpreparate" für magnetische Messungen vollkommen genügt.

---

[1]) Für Parisit $[(Ce, La, Nd, Pr\ .\ .)\ CaF_2(CO_3)_3]$ wurde in der Achsenrichtung auch etwa $1\ (h/2\pi)\ .\ e/2\,mc)$ gefunden; für $2\,Ce\,(NO_3)_3\ .\ 3\,Mg\,(NO_3)_2\ .\ 24\,H_2O$ kürzlich aber ein Moment $< 0{,}2\ .\ (h/2\pi)\ .\ e/2\,mc$.

[2]) W. **Finke**, *Ann. der Phys.*, *31*, 149, 1910.

[3]) I. I. **Rabi**, *Phys. Rev.*, *29*, 174, 1927.

[4]) L. **Brant**, *Phys. Rev.*, *17*, 678, 1921.

[5]) B. **Cabrera** und E. **Moles**, *Arch. Sc. Phys. et Nat.*, *40*, 284, 1915.
B. **Cabrera** und M. **Marquina**, *An. Soc. Esp. Fis. y Quim.*, *15*, 199, 1917.
B. **Cabrera**, E. **Moles** und J. **Guzman**, *Arch. Sc. Phys. et Nat.*, *37*, 325, 1914.
B. **Cabrera**, J. **Jimeno** und M. **Marquina**, *An. Soc. Esp. Fis. y Quim.*, *14*, 367, 1916.
P. **Weiss** und C. A. **Frankamp**, *Proc. Ac. Amst.*, *18*, 254, 1915.
P. **Weiss** und E. D. **Bruins**, *Proc. Ac. Amst.*, *18*, 246, 1915.
A. **Piccard** und E. **Charbuliez**, *Arch. Sc. Phys. et Nat.*, *42*, 324, 1916.
A. **Trumpler**, *Diss. Zurich*, 1917.

[6]) S. **Veil**, *C. R.*, *183*, 1286, 1926 und *186*, 80, 1928.

[7]) G. **Falkenberg**, *Z. f. Phys.*, *5*, 70, 1921.

[8]) M. H. **Belz**, *Phil. Mag.*, *44*, 479, 1922.

Schwerer war bisweilen (bei Lösungen) die Bestimmung der Wertigkeit der Ionen, welche bei der Messung vorlagen, somit die Erhaltung dieser Lösungen.

Die Messungen sind ausgeführt worden von den Japanischen Forschern **Honda** und **Ishiwara**, von der **Weiss**-schen Schule, von der spanischen Schule und von der Leidener Schule; auch **Welo** hat eine Reihe Messungen ausgeführt.

Die Messungen von **Honda** und **Ishiwara** sind die ältesten. Sie sind besonders für ein Übersicht über das Gebiet sehr wertvoll gewesen. Es wurde mit einer Torsionswage nach der **Faraday**-Methode gemessen. Die Magnetfelder wurden ballistisch kalibriert. Das Messgebiet lag zwischen 80° und 1000°.

Die Messungen der **Weiss**schen Schule, von der wir als Vertreter **Foex**, **Bruins**, **Frankamp**, **Jacobsohn**, **Collet**, **Serres**, **Kessler**, **Trümpler**, **Théodoridès**, **Chatillon**, **Perrakis**, **Birch** nennen, beziehen sich auf feste Stoffe (meist in Pulverform) und Lösungen. Es wurde fast immer nach der **Faraday**-Methode gemessen, oft mit derselben Apparatur; die Beschreibung derer findet man bei **Foex** und **Forrer** ¹) (beweglicher Wagen).

Die Magnetfelder wurden sehr genau kalibriert auf ballistischer Methode und mit einer **Cotton**-Balanz. Der Gradient der Feldstärke wurde bestimmt durch Vergleich von Steighöhemessungen mit Messungen nach der Faraday-Methode an derselben Lösung.

Für Lösungen wurde auch bisweilen die Steighöhemethode nach **Piccard** ²) gebraucht.

Die gebrauchten Temperaturen lagen meist über Zimmertemperatur (bis 850°); in einigen Fällen ging man bis 190° hinunter.

Als Vertreter der Leidener Schule nennen wir: **Kamerlingh Onnes**, **Oosterhuis**, **Woltjer**, **Jackson**, **de Haas**, **Wiersma**, **Gorter**, **v. d. Handel**. Die Untersuchungen beziehen sich besonders auf die Suszeptibilitäten bei tiefen Temperaturen. Die Messmethoden sind schon in den Paragraphen 11 und 33 angegeben worden. Nur bei Messungen an Kristallen und bei feldabhängiger

---

¹) G. **Foex** und R. **Forrer**, *J. de Phys.*, *VI*, *7*, 180, 1926.

²) A. **Piccard**, *Diss. Zürich*, 1913.

Suszeptibilität wurde nach der **Faraday**-Methode gemessen.

Cabrera und seine Mitarbeiter (**Moles**, **Marquina**, **Guzman**, **Jimeno**, **Pina**, **Duperier**) haben sich mit den Suszeptibilitäten von Lösungen beschäftigt. Es wurde sowohl die Steighöhemethode als die **Faraday**-Methode (mit einer Drehwage) gebraucht. Als Vergleichssubstanz wurde die von **Bauer** und **Piccard** und anderen Forschern sehr genau gemessene Suszeptibilität des Wassers gebraucht.

Welo hat eine lange Reihe organischer Salze und Komplexsalze gemessen bei 3 Temperaturen (203°, 275° und 390°). Er gebrauchte die Methode von **Weiss**, **Foex** und **Forrer**. Das Feld wurde mit Preparaten von $Fe\,SO_4\,.\,(NH_4)_2\,SO_4\,.\,6\,H_2O$ und $Fe_2\,(SO_4)_3\,.\,(NH_4)_2\,.\,SO_4\;24\,H_2O$, welche Substanzen von **Foex** und in Leiden genau gemessen worden sind, kalibriert. Weiter hat er noch vorläufige Untersuchungen angestellt über dem Verhalten der Suszeptibilität beim Schmelzen der Substanz [1]).

In § 29 wurde angegeben auf welche Weise die Auswahl der Messungen welche die angegebene experimentelle Magnetonenzahlen bestimmen, statt fand.

Von den magnetisch untersuchten Salzen sind röntgenographisch die Kristallstrukturen einiger anhydrischen Chloriden, die einiger Sulfat-Heptahydrate und die der Alaunen untersucht worden.

$CrCl_3$ ist hexagonal [2]); $MnCl_2$ und $NiCl_2$ sind rhomboëdrisch [3]) $FeSO_4\,.\,7H_2O$ und $CoSO_4\,.\,7H_2O$ sind monoklin [4]), während $NiSO_4\,.\,7H_2O$ rhombisch ist [4]). Die Alaune sind kubisch [5]).

---

[1]) L. A. **Welo**, *Nature*, *124*, 575, 1929.
[2]) N. **Wooster**, *Z. f. Kryst.*, *74*, 363, 1930.
G. **Natta**, *Rend. Ac. d. Lincei*, *5*, 592, 1927.
[3]) P. **Pauling**, *Proc. Nat. Ac.*, *15*, 709, 1929.
G. **Bruni** und A. **Ferrari**, *Rend. Ac. d. Lincei*, *2*, 457 und *6*, 56, 1927.
A. **Ferrari**, *Rend. Ac. d. Lincei*, *6*, 56, 1927.
[4]) H. G. K. **Westenbrink**, *Proc. Ac. Amst.*, *29*, 1223 und 1374, 1926.
[5]) R. W. G. **Wykoff**, *Z. f. Kryst.* *57*, 595, 1923.
L. **Vegard** und E. **Esp**, *Ann. der Phys.*, *85*, 1152, 1928.
Siehe auch P. P. **Ewald** und C. **Hermann**, *Strukturbericht* S. 390.

§ 38. Die Beobachtungsdaten 1).

19. Elektronen; V^{++++}

Beobachter.	Substanz.	Temperatur-intervall.	Θ	p
Perrakis 2)	$V_2O_2Cl_4.5H_2O$	194–305	—29——45	7,94
Perrakis 2)	$VO.SO_4.3^1/_2H_2O$	194–339	—25——38	8,96
Perrakis 2)	V_2O_4	194–320	—400	8
Freed 3)	$VO(ClO_4)$.sol.	293	—	8,6 (eff.)

Bei den Untersuchungen von Perrakis zeigten sich Variationen mit der Zeit. Die gebrauchten Temperaturintervalle waren klein.

Bei der Untersuchung von Freed war die Suszeptibilität unabhängig von der Verdünnung und vollkommen reproduzierbar. (sieh § 29).

Als beste Magnetonenzahl geben wir 8,6 an.

22 Elektronen; V^{+++}

Beobachter.	Substanz.	Temperatur-intervall.	Θ	p
Perrakis 2)	V_2O_3	194–317	—500——600	9,5
Bose und Bhar 4)	$V_2(SO_4)_3.H_2SO_4.12H_2O$	293	—	12,6 (eff.)
Freed 3)	$(VO)_2SO_4$.sol.	293	—	14,0 (eff.)
Freed 3)	$V_2(SO_4)_3$.sol.	293	—	13,7 (eff.)

Als beste Magnetonenzahl geben wir 14 an.

21 Elektronen; V^{++}

Beobachter.	Substanz.	Temperatur-intervall.	Θ	p
Freed 3)	V_2SO_4.sol.	293	—	19,0 (eff.)

Wir geben als beste Magnetonenzahl 19,0 an.

---

1) Es muss ausdrücklich hervorgehoben werden, dass wir häufig Gebrauch gemacht haben von den Zahlen, welche in einer, in der spanischen Sprache erschienenen Zusammenfassung Cabrera's enthalten sind: B. Cabrera, *An. Soc. Esp. Fis. y Quim.*, *28*, 431, 1930.

2) N. Perrakis, *J. de Phys.*, *VI*, *8*, 473, 1927.

3) S. Freed, *Journ. Am. Chem. Soc.*, *49*, 2456, 1927.

4) D. M. Bose und H. G. Bhar, *Z. f. Phys.*, *48*, 716, 1928.

21 Elektronen; Cr^{+++}

Beobachter.	Substanz.	Temperatur-intervall.	Θ	p
Ishiwara 1)	$CrCl_3$	100–490	61,0	18,2
Woltjer 2)	„	135–290	32,5	17,9
Serres 3)	$[CrCl_2.4H_2O]Cl.2H_2O$	92–291	0,2	19,08
Honda und Ishiwara 4)	$Cr_2(SO_4)_3$	93–923	—10,5	19,0
Serres 3)	„	292–331	—16,5	19,09
Serres 3)	$Cr_2(SO_4)_3.15{,}68\ H_2O$	91–295	—2–0	19,05
Serres 3)	„ geschm.	273–396	—6,5	18,57
Serres 3)	$Cr_2(SO_4)_5.K_2SO_4$	289–677	—7–0	19,44
Serres 3)	$Cr_2(SO_4)_3.K_2SO_4.24H_2O$	90–292	0	19,2
de Haas, Gorter und v. d. Handel 5)	„	1,3–280	0.00	19,07
Serres 3)	„ geschm.	291–412	—25	18,2
Ishiwara 1)	$Cr_2O_3.7H_2O$	100–350	—33	18,9
Welo 6)	versch. org. Salze	203–390	versch.	18,9
Cabrera, Marquina und Piña 7)	Lösungen	293	—	19,0 (eff.)

$CrCl_3$ und $Cr_2(SO_4)_3$. $K_2(SO_4)$. $24H_2O$ sind bis im Heliumgebiet gemessen worden. $CrCl_3$ bekommt schon im Wasserstoffgebiet eine feldabhängige Suszeptibilität, welche nur langsam mit der Temperatur variiert. Bei zunehmender Feldstärke nimmt die Suszeptibilität ab. Es wurde 84% der „quantenmechanischen Sättigung" erreicht (65% derjenigen welche man nach der klassischen Formel berechnet).

Chromalaun folgt bis zu sehr tiefen Temperaturen gut das CURIEsche Gesetz. Die Sättigungskurve stimmt gut mit der nach BOSE-STONER zu erwartenden Kurve überein; die Abweichung von einer LANGEVINkurve ist beträchtlich.

Als beste Magnetonenzahl geben wir 19,1 an.

---

1) T. ISHIWARA, *Toh. Imp. Univ. Sc. Rep.*, *3*, 303, 1915.

2) H. R. WOLTJER, *Comm.* 173*b und c, Leiden.*

3) A. SERRES, *Dissertation Strassburg*, 1931.

4) K. HONDA und T. ISHIWARA, *Toh. Imp. Univ. Sc. Rep.*, *4*, 215, 1915.

5) W. J. DE HAAS und C. J. GORTER, *Comm. Leiden*, 208*c*.
W. J. DE HAAS, C. J. GORTER und J. V. D. HANDEL, *unpubl. Messungen.*

6) L. A. WELO, *Phil. Mag.*, *6*, 481, 1928.

7) B. CABRERA und M. MARQUINA, *An. Soc. Esp. Fis. y Quim.*, *15*, 199, 1917.
B. CABRERA und S. PIÑA, *An. Soc. Esp. Fis y Quim.*, *17*, 149, 1919, *20*, 175 und 509, 1922.
De Suszeptibilitäten waren nicht völlig unabhängig von Konzentation und Säuregrad.

22. Elektronen; Cr^{++}

Beobachter.	Substanz.	Temperatur-intervall.	Θ	p
Cabrera und Piña 1)	$CrSO_4$.sol.	293	—	24,0 (eff.)
Cabrera und Piña 1)	$CrCl_2$.sol.	293	—	23,8 (eff.)

Als beste Magnetonenzahl geben wir 23,9 an.

23 Elektronen; Mn^{++}

Beobachter.	Substanz.	Temperatur-intervall.	Θ	p
Honda und Ishiwara 2)	$MnCl_2$	80–820	17	27,3
Théodoridès 3)	,,	288–848	3	28,5
Onnes und Oosterhuis 4)	,, (nicht völlig anhydrisch)	14–290	— 2	––
Honda und Sone 5)	$MnSO_4$	100–400	—19	29,0
Théodoridès 3)	,,	273–823	—19,0	29,1
K. Onnes und O. 4)	,,	77–294	—24	29,0
Foex 6)	$MnSO_4.4H_2O$	224–302	0	29,1
K. Onnes und O. 4)	,,	14–289	—1,1	29,2
Jackson und K. O. 7)	$MnSO_4.(NH_4)_2SO_4.6H_2O$	14–290	0	29,2
Jackson und de Haas 8)	,,	14–20	2,0,—4	29,4
Foex und Brunet 9)	$Mn_2P_2O_7$	293–758	—23,0	30,1
Cabrera und Duperier 10)	$MnCl_2$.sol.	293–376	24–28	28,1
Cabr. und Dup. 10)	$MnSO_4$.sol.	293–372	23–27	28,1

Ein Manganammoniumsulfatkristall ist von Jackson und de Haas im Wasserstoffgebiet untersucht worden. Nach Krishnan 11) folgt die Suszeptibilität ziemlich gut dem Curie-Weiss-

---

1) B. Cabrera und S. Piña, *An. Soc. Esp. Fis. y Quim.*, *17*, 149, 1919.

2) l. c.

3) Ph. Théodoridès, *J. de Phys.*, *VI*, *3*, 1, 1922.

4) H. Kamerlingh Onnes und E. Oosterhuis, *Comm. Leiden*, 129*b*.

5) K. Honda und T. Soné, *Toh. Imp. Univ. Sc. Rep. 3*, 139, 1914.

6) G. Foex, *Ann. de Phys.*, *16*, 174, 1921.

7) L. C. Jackson und H. Kamerlingh Onnes, *Comm. Leiden*, 168*b*.

8) L. C. Jackson und W. J. de Haas, *Comm. Leiden*, 187*c*.

9) G. Foex und A. Brunet, *C. R.*, *184*, 443, 1927.

10) B. Cabrera und A. Duperier, *Journ. de Phys.*, *VI*, *6*, 121, 1925.

11) K. S. Krishnan, *Z. f. Phys.*, *71*, 137, 1931.

schen Gesetz; die Hauptsuszeptibilitäten geben dieselbe Magnetonenzahl, aber θ's von 2, 0 und —4. Auch das Resultat von RABI [1]) ist hiermit in Übereinstimmung.

$MnCl_2$ scheint (obgleich das Salz nicht ganz anhydrisch vorlag) im Gegensatz zu den anderen anhydrischen Chloriden der Fe-Gruppe ziemlich gut dem CURIE-WEISSschen Gesetz zu folgen.

$MnSO_4$ ist das klassische Beispiel der s.g. kryomagnetischen Anomalie [2]); die Abweichung vom CURIE-WEISSschen Gesetz ist der von $Pr_2(SO_4)_3 . 8H_2O$ (Fig. 3) ähnlich.

$MnSO_4 . 4H_2O$ folgt bis zu den tiefsten Temperaturen gut dem CURIE-WEISSschen Gesetz.

Die abweichende Magnetonenzahl der Lösungen wird vielleicht daher rühren, dass sekundäre Effekte einen grossen θ-Wert vortäuschen; $p_{\text{eff.}}$ ist 29,5.

Als beste Magnetonenzahl nehmen wir 29,1 an.

23 Elektronen; Fe^{+++}

Beobachter.	Substanz.	Temperatur-intervall.	θ	p
Honda und Ish. [3]).	$FeCl_3$	99–865	— 3,0	28,7
Honda und Ish. [3])	$FeCl_3.2NH_4Cl.H_2O$	99–287	—29,0	29,0
Honda und Ish. [3])	$Fe_2(SO_4)_3$	96–931	—65,6	28,9
Théodoridès [3])	,,	273–823	—79,5	29,0
K. Onnes und O. [3])	$Fe_2(SO_4)_3.(NH_4)_2SO_4.$ $24.H_2O$	15–290	— 3,0	29,2
Honda und Ish. [3])	$Fe_2(SO_4)_3.(NH_4)_2SO_4$	95–683	—11,5	28,9

Bei tiefen Temperaturen wurde nur Ferrialaun gemessen, welches nur eine kleine Abweichung vom CURIEschen Gesetz aufweist.

Die Messungen an Lösungen sind nur bei einer Temperatur geschehen; bei geringen Konzentrationen scheint die Suszeptibilität pro Grammion sich zu ändern.

Als beste Magnetonenzahl geben wir 29,1 an.

---

[1]) I. I. RABI, *Phys. Rev.*, *29*, 174, 1927.

[2]) H. KAMERLINGH ONNES, *Comm. Leiden Supp.* 44*a*.

[3]) l. c.

24 Elektronen ; Fe^{++}

Beobachter.	Substanz.	Temperatur-intervall.	Θ	p
Honda und Ish. 1)	$FeCl_2$	91–684	30,5	25,7
Woltjer und Wiersma 1)	„	14–291	20,4	25,85
Honda und Ish. 1)	$FeCl_2.4H_2O$	92–292	5	26,2
Honda und Ish. 1)	$FeSO_4$	110–915	—11,5	25,9
K. Onnes und Oosterhuis	„	64–290	—31,0	25,56
K. Onnes, O. und J. 2)	$FeSO_4.7H_2O$	64–290	— 1,0	25,84
Foex	$FeSO_4.(NH_4)_2SO_4.6H_2O$	223–289	22,0	26,0
Jackson	„	17–290	— 3,0	27,4
Welo	versch. org. Salze	203–390	var.	26
Weiss und Frankamp	versch. Lösungen	293	—	26,5 (eff.)
Foex	versch. Lösungen	291–393	var.	26–27

Bei tiefen Temperaturen bleibt $FeSO_4 . (NH_4)_2SO_4 . 6H_2O$ gut dem Curie-Weiss-schen Gesetz folgen.

$FeSO_4 . 7H_2O$ zeigt eine geringe Abweichung im Wasserstoffgebiet (im Sinne der Fig. 3; konkav).

$FeSO_4$ wird im Wasserstoffgebiet fest unabhängig von der Temperatur (Typus Fig. 3; die Suszeptibilität scheint ein flaches Maximum aufzuweisen).

Die Suszeptibilität von $FeCl_2$ wird im Wasserstoffgebiet feldabhängig; mit zunehmender Feldstärke nimmt die Suszeptibilität erst zu um bei grösseren Feldstärken wieder abzunehmen.

Die Suszeptibilitäten der Lösungen variieren ziemlich stark (auch mit der Vorbehandlung; sieh Veil 3)).

Wir geben an, dass die Magnetonenzahl variabel ist; nicht so sehr weil die verschiedenen Autoren abweichende Werte finden, sondern weil derselbe Beobachter mit derselben Apparatur beträchtliche Variationen findet.

Wir geben an, dass die Magnetonenzahl von 26,0 bis 27,4 variiert.

---

1) H. R. Woltjer und E. C. Wiersma, *Comm. Leiden* 201*a*.

2) L. C. Jackson, *Comm. Leiden*, 163.

2) Sieh L. C. Jackson, *Comm. Leiden*, 163.

2) L. A. Welo, *Phil. Mag.*, *6*, 481, 1928.

2) P. Weiss und C. A. Frankamp, *Proc. Ac. Amst.*, *18*, 254, 1915.

3) S. Veil, *C. R.*, *183*, 1286, 1926 und *186*, 80, 1928.

25 Elektronen; Co^{++}

Beobachter.	Substanz.	Temperatur-intervall.	Θ	p
Honda und Ishiwara [1])	$CoCl_2$	93–696	33,8	24,8
Théodoridès [1])	,,	288–598	47,2	25,0
Chatillon [2])	,,	282–693	—10,0	26,05
Woltjer [3])	,,	70–289	20,0	24,96
Chatillon [2])	$CoCl_2.H_2O$	282–691	8	25,08
Chatillon [2])	$CoSO_4$	280–758	var.	25,0–26,0
Honda und Ish. [1])	,,	95–980	—20	24,0
Théodoridès [1])	,,	273–825	—19—30	25,0
Serres [4])	,,	280–728	—47	26,0
Jackson [1])	,,	77–289	—44,9	25,2
Jackson [1])	$CoSO_4.7H_2O$	77–292	—13,7	25,19
Jackson [1])	$CoSO_4.(NH_4)_2SO_4.24H_2O$	77–292	—21	25,3
Jackson und K. O. [1])	$CoSO_4.K_2SO_4.24H_2O$	77–292	—22	24,8
Jackson und K. O. [1])	$CoSO_4.Rb_2SO_4.24H_2O$	77–292	—24	26,4
Foex [1])	$Co(NO_3)_2$.sol.		var.	25,0–25,6
Chatillon [2])	versch. Lösungen	194–416	var.	22,0–26,0
Chatillon [2])	Lös. in Alkoholen	283–399	var.	23,0–24,0

$CoCl_2$ wurde bis 2,3° gemessen; die Suszeptibilität variiert bei sehr tiefen Temperaturen wenig mit der Temperatur, in den Wasserstoff- und Heliumgebieten nimmt sie mitzunehmender Feldstärke zu.

$CoSO_4$, $CoSO_4.7H_2O$ und die drei Doppelsulfate wurden alle bis 14° gemessen. Die Abweichungen vom CURIE-WEISSschen Gesetze hatten alle den Typus der Fig. 4. Die Suszeptibilitäten der Lösungen zeigten sich abhängig von Konzentration und Säuregrad, bisweilen auch von der Zeit und der Vorbehandlung [5])

Wir geben an, dass die Magnetonenzahl von 22—26 variiert.

---

[1]) l. c.

[2]) A. CHATILLON, *Ann. de Phys.*, *9*, 187, 1928.

[3]) H. R. WOLTJER, *Comm. Leiden*, 173*b*.
H. R. WOLTJER und H. KAMERLINGH ONNES, *Comm. Leiden*, 173*c*.

[4]) A. SERRES, *C. R.*, *181*, 714, 1928.

[5]) S. VEIL, *C. R.*, *183*, 1286, 1926 und *186*, 80, 1928.

26 Elektronen; Ni^{++}

Beobachter.	Substanz.	Temperatur-intervall.	Θ	p
Woltjer 1)	$NiCl_2$	137–292	67	15,7
Honda und Ish. 1)	,,	147–633	77	16,0
Theodorides 1)	,,	273–410–773	78, 39	16,0, 16,9
Honda und Ish. 1)	$NiSO_4$			
Jackson 1)	,,	77–289	59	17,4
Gorter, de Haas und v. d. Handel 2)	$NiSO_4.7H_2O$	170–292	—3,0	16,01
Jackson 1)	$NiSO_4.(NH_4)_2SO_4.6H_2O$	77–286	—4	15,9
Weiss und Bruins 3)	Lösungen	293	—	16,1 (eff.)
Brant 4)	$NiCl_2$.sol.	293	—	16,0 (eff.)
Foex und Kessler 5)	$NiCl_2$.sol.	—	var.	16,0–17,0

$NiCl_2$ wurde bis 2,2° gemessen und $NiSO_4$, $NiSO_4 . 7H_2O$ und Nickelammoniumsulfat bis 14°.$NiCl_2$ zeigt eine feldabhängige Suszeptibilität, völlig analog mit der von $CoCl_2$. $NiSO_4$ benimmt sich analog mit $FeSO_4$ (Fig. 3, flaches Minimum der Suszeptibilität im Wasserstoffgebiet).

27. Elektronen; Cu^{++}.

Beobachter.	Substanz.	Temperatur-intervall.	Θ	p
Honda und Ish.	$CuCl_2$	293–775	— 90	9,8
Birch 6)	,,	283–775	—60–65	9,1–10,0
de Haas und Gorter 7)	,,	203–773	— 93	9,97
Birch 6)	$CuCl_2.2H_2O$	195–347	— 25	9,97
Honda und Ish.	$CuSO_4$	100–1000	— 67	9,9
Birch 6)	,,	194–398	— 60	9,91
de Haas und Gorter 7)	,,	64–289	— 77,5	9,91

1) l. c.

2) C. J. Gorter, W. J. de Haas und J. v. d. Handel, *Comm. Leiden*, 218*d*. Eine nach Jackson auftretende Anomalie wurde nicht bestätigt. Die Kurve verläuft im $1/\chi'^{-1}$: T-Diagramm jedoch etwas konvex.

3) P. Weiss und E. D. Bruins, *Proc. Ac. Amst.*, *18*, 246, 1915.

4) L. Brant, *Phys. Rev.*, *17*, 678, 1921.

5) G. Foex und B. Kessler, *C. R.*, *192*, 1638, 1931.

6) F. Birch, *J. de Phys.*, *VI*, *9*, 136, 1928.

7) W. J. de Haas und C. J. Gorter, *Comm. Leiden*, 215*a*.

Beobachter.	Substanz.	Temperatur-intervall.	Θ	p
Birch 1)	$CuSO_4.H_2O$	90–428	var.	10,0
Birch 1)	$CuSO_4.5H_2O$	195–273	— 24	10,0
de Haas und Gorter 2)	,,	14–290	—0,70	9,51
Birch 1)	$CuCl_2$.sol.	273–313–358	10–65	9,0–10,0

$CuCl_2$, $CuSO_4$ und $CuSO_4 . 5H_2O$ sind bis 14^0 gemessen worden. $CuCl_2$ zeigt eine gekrümmte Kurve im $1/\chi'$: T-Diagramm, bei sehr tiefen Temperaturen nimmt die Suszeptibilität beträchtlich ab. $CuSO_4$ zeigt im Wasserstoffgebiet Feldabhängigkeit der Suszeptibilität (abnehmende χ bei zunehmender Feldstärke). CuSO . $5H_2O$ folgt gut dem Curie-Weissschen Gesetz.

Wir geben an, dass die Magnetonenzahl von 9 bis 10 variiert.

Nur wenige Suszeptibilitätsmessungen an Kristallen sind bisher ausgeführt worden. Foex 3), Dupouy 4) und Jackson 5) untersuchten die Temperaturabhängigkeit der Hauptsuszeptibilitäten einiger, teils natürlicher Kristalle.

Es wurden von Foex Siderit (Fe, $MnCO_3$), Dioptas ($CuSiO_3.H_2O$), $MnSO_4 . 4H_2O$ und $FeSO_4.(NH_4)_2SO_4 . 6H_2O$; von Dupouy Siderit und Manganspat ($MnCO_3$) und von Jackson $CoSO_4.(NH_4)_2SO_4.6H_2O$, $MnSO_4. (NH_4)_2SO_4 . 6H_2O$, und $NiSO_4 . 6HO_2$ gemessen. Es wurden die Faraday-Methode und die Methode von Weiss gebraucht (sieh § 13).

Messungen bei Zimmertemperatur liegen noch von Finke 6) und Rabi 7) vor.

Alle Messungen sind noch nicht in guter Übereinstimmung aber wohl scheint es, dass man kann behaupten, dass, wenn für das Pulver das Curie-Weiss-sche Gesetz gilt, dies auch für die Hauptsuszeptibilitäten der Fall ist; und zwar mit denselben

---

1) l. c.

2) W. J. de Haas und C. J. Gorter, *Comm. Leiden*, 210*d*.

3) G. Foex, *Ann. de Phys.*, *16*, 174, 1921.

4) M. G. Dupouy, *Ann. de Phys.*, *15*, 494, 1931.

5) L. C. Jackson, *Comm. Leiden*, 163.

L. C. Jackson und W. J. de Haas, *Comm. Leiden*, 187*c*.

6) W. Finke, *Ann. der Phys.*, *31*, 149, 1910.

7) I. I. Rabi, *Phys. Rev.*, *29*, 174, 1927.

p- aber verschiedenen θ-Werten [1]. Die Orientierung der Richtungen der Hauptsuszeptibilitäten gegen die krystallographischen Achsen ändert sich nicht mit der Temperatur. Weiter kann noch bemerkt werden, dass für die Mn^{++}-Kristalle [2] die Abweichungen zwischen den Suszeptibilitäten in verschiedenen Richtungen besonders gering zu sein scheinen.

§ 39. Die Interpretation der Beobachtungsdaten.

Die „Variabilität" der Magnetonenzahl im zweiten Teil der Fe-Gruppe steht nicht im prinzipiellen Gegensatz zu völlig konstanten Zahlen im ersten Teil; auch bei V^{+++}, Cr^{+++}, Fe^{+++} und Mn^{++}, scheinen kleine Variationen aufzutreten, besonders wenn man die Substanzen mit grossen $|\theta|$-Werten mitrechnet. Bei Co^{++}, Fe^{++}, und Cu^{++} sind die Variationen aber bedeutend grösser.

Das Problem dieser Variabilität ist schon in § 30 diskutiert worden, ebenso ist auf den Zusammenhang hingewiesen worden zwischen den Tatsachen, dass Co^{++} die grösste Abweichung vom BOSE-STONERschen Wert der Magnetonenzahl aufweist, auch die grösste Variabilität dieser Zahl zeigt, und schliesslich auch in Salzen mit viel Kristallwasser bei tiefen Temperaturen immer grosse Abweichungen vom CURIE-WEISS-schen Gesetze gibt.

Bei Salzen mit viel Kristallwasser wird $|\theta|$ immer, den Fall des Co^{++} ausgenommen, sehr klein. Man könnte das sowohl der grossen paramagnetischen Verdünnung zuschreiben, als auch der Symmetrie der, vom Kristallwasser herrührenden elektrischen Felder. Es wäre darum interessant Messungen an Mischkristallen, welche unmagnetische Metallionen enthalten, auszuführen; man dürfte erwarten dass der Charakter der elektrischen Felder nur wenig geändert wird von der Substitution eines magnetischen Ions durch ein ähnliches nicht magnetisches Ion [3].

---

[1] Sieh für eine Erklärung z. B. § 21. Auch in der WEISS-schen Auffassung des Molekularfeldes muss man ein solches Gesetz erwarten.

[2] Das freie Mn^{++}-Ion hat einen S-Grundterm. Beim analogen Ion in der Gruppe der Seltenen Erden wurde magnetische Isotropie gefunden. (Sieh § 34, und für die Theorie § 32).

[3] Dr. SIMON FREED hat, während seines Aufenthalts in Leiden in 1931 versucht Mischkristalle der anhydrischen Chloride herzustellen für magnetische Untersuchungen. Wegen Zeitmangel ist die Sache bisher nicht weiter geführt worden.

In verschiedenen Fällen hat man den Eindruck, dass man eine reproduzierbarere Magnetonenzahl bekommt, wenn man $p_{eff.}$ nimmt, als wenn man der Existenz eines von null verschiedenen θ-Werts Rechnung trägt [1]). Hat man ein kleines Messgebiet (wie bei Lösungen vorkommt), so kann man denken, dass eine Änderung in den Wechselwirkungen einen beträchtlichen $|\theta|$-Wert nur vorgetäuscht hat. Aber auch, wenn T nicht sehr gross gegen die Aufspaltungen der „niedrigen" Energieniveaus ist, wird der wirkliche p-Wert meistens liegen zwischen $p_{eff.}$ und dem Wert, den man aus der Tangente an der Kurve bekommt.

Was die anhydrischen Salze anbelangt, für diese scheinen sogar (besonders in der zweiten Hälfte der Gruppe) die Messungen nur zwischen bestimmten Grenzen reproduzierbar zu sein. Kleine chemische Änderungen (wahrscheinlich bestehend im Übergang zwischen homöo- und heteropolarer Bindung) haben einen wesentlichen Einfluss auf die Suszeptibilität. Es ist gewiss unmöglich für diese Salze die Wechselwirkung mit den Nachbaratomen nur durch die Betrachtung eines STARK-Effekts auf die Terme des freien Ions zu beschreiben. Man betrachte z. B. den Fall des $MnSO_4$; die bei tiefen Temperaturen auftretende Abweichung ist völlig mit der von $Pr_2(SO_4)_3 . 8H_2O$ (Fig. 3) analog, und man dürfte also folgern dass ein nicht-entarteter Grundterm besteht. Ein solcher Term ist aber für das isolierte Mn^{++}-Ion nicht möglich weil dessen Elektronenzahl ungerade ist. Also wäre man gezwungen auch Elektronen oder (und) Kerne der Nachbaratome zum System zu rechnen. Es ist noch eine offene Frage, ob die Elektronen der magnetischen Ionen mit einander in Wechselwirkung treten, oder ob nur eine Wechselwirkung besteht zwischen dem magnetischen Ion und seinen unmagnetischen Nachbarn.

Bei einigen anhydrischen Salzen treten bei tiefen Temperaturen noch weitere Komplikationen auf: die Suszeptibilitäten von $CrCl_3$, $FeCl_2$, $CoCl_2$, $NiCl_2$, und $CuSO_4$ zeigten sich abhängig von der Feldstärke.

$NiCl_2$ und $CoCl_2$ benehmen sich ganz ähnlich; mit zunehmender Feldstärke nimmt die Suszeptibilität zu. $CrCl_3$ und $CuSO_4$ benehmen sich gerade umgekehrt während mit zunehmender Feldstärke die Suszeptibilität von $FeCl_2$ erst zunimmt um später wieder abzunehmen; das Maximium verschiebt sich im Wasserstoffgebiet noch mit der Temperatur. Bei höheren Temperaturen treten sehr beträchtliche Werte von $|\theta|$ auf; nur für $CuSO_4$ ist θ negativ.

---

[1]) Ungefähr dieselbe Tatsache ist von FOEX formuliert als: linearen Zusammenhang zwischen p und θ: G. FOEX, *C. R.*, 180, 919, 1925.

Man kann diese Feldabhängigkeit nicht einfach als Ferromagnetismus betrachten. Erstens treten beide Vorzeichen der Feldabhängigkeit auf; zweitens zeigt auch eine Substanz mit negativem θ die Feldabhängigkeit; drittens ist nie eine Spur von Hysteresis beobachtet worden.

Da die Suszeptibilität nur wenig mit der Temperatur variiert, wäre man in unserem Gedankengang geneigt zu sagen, dass man es in erster Näherung mit einem nicht-entarteten Grundterm zu tun hat, und dass in zweiter Näherung Komplikationen auftreten, wenn man will als Folge homöopolarer Wechselwirkungen. Wenn dann eine Wechselwirkung zwischen den magnetischen Momenten der Ionen bestehen würde, wäre man für diese Substanzen sehr nahe am WEISS-schen Standpunkte gelangt; man würde dann auch bei der Interpretation des Auftretens von einem θ bei höheren Temperaturen dieser Wechselwirkung Rechnung tragen müssen.

Das Problem des WOLTJER-schen feldabhangigen Paramagnetismus ist also noch keineswegs gelöst; mehr Beobachtungen, besonders auch über Mischkristalle sind erwünscht.

Sieh für die Interpretation der Messungen an Kristallen den vorigen Paragraphen.

Anmerkung bei der Korrektur.

Es sind neulich noch einige Beobachtungen gemacht worden, welche hier erwähnt werden müssen.

BOSE und RAHA [1]) haben beobachtet, dass bei intensiver Bestrahlung mit sichtbarem Lichte, die Suszeptibilität einer Chromchloridlösung abnimmt. Man könnte dies so interpretieren dass die drei Spinvektoren in angeregten Zuständen nicht so gekoppelt sind dass der Maximalwert von s auftritt. Die angeregten Zustande müssten dann offenbar eine hohe Lebensdauer haben.

JEAN BECQUEREL, DE HAAS und V. D. HANDEL [2]) haben mittels der Methode der optischen Drehung die Sättigungskurve in der Achsenrichtung von Spessartit (Mn, Al-orthosilikat) und Manganspat ($MnCO_3$) bestimmt. Das Gesetz, welchem die Sättigung folgt, konnte nicht sicher bestimmt werden, doch das Moment muss wohl von der Grössenordnung von $1(h/2\pi)\, e/2\, mc$ sein.

---

[1]) D. M. BOSE und P. K. RAHA, *Nature, 127*, 528, 1931.

[2]) JEAN BECQUEREL, W. J. de Haas un J. V. D. HANDEL, *Comm. Leiden*, 218*a*.

Dass man so kleine Werte findet steht nicht im Widerspruch zu den Resultaten der Suszeptibilitätsmessungen, da wir auch bei diesen gewöhnt sind bei tiefen Temperaturen Anomalien für anhydrische Verbindungen zu finden.

Sucksmith 1) hat eine Reihe gyromagnetischer Messungen für anhydrische Salze ausgeführt. Er findet für den Landé-schen Aufspaltungsfaktor die Werte: 2,0 für Cr^{+++}, 2,0 für Mn^{++}, 1,9 für Fe^{++} und 1,5 für Co^{++}, in guter Übereinstimmung mit der Bose- Stoner-schen Theorie.

§ 40. Zur Frage der Realität des WEISS-Magnetons.

Bisher haben wir die Anzahl Weiss-Magnetonen, welche eine Substanz aufweist immer nur betrachtet als ein Mass für die Curie-Konstante, die bei der betreffenden Substanz auftritt. Bekanntlich hat aber Weiss im Jahre 1911 die Behauptung aufgestellt, dass p, die Anzahl Weiss-Magnetonen immer eine ganze Zahl sein sollte. Und Weiss' Mitarbeiter und Schüler haben bis in neuester Zeit noch diese Ansicht verteidigt 2).

Wo eine Reihe von Forschern, die sich sosehr verdient gemacht haben beim Studium der paramagnetischen Erscheinungen, und die sicher die Mehrzahl aller zuverlässigen Messungen ausgeführt haben, geneigt sind die Hypothese der Ganzzahligkeit beizubehalten, ist man nach unserer Meinung keineswegs berechtigt, ihre Auffassung, auf Grund der Tatsache, dass die Physik sich in der letzten Zeit in andere Richtung zu entwickeln scheint, ohne weiteres zur Seite zu schieben.

Man kann sich der Frage der Realität des Weiss-Magnetons gegenüber auf zwei verschiedene Standpunkten stellen. Erstens kann man das Beobachtungsmaterial kritisch betrachten, und untersuchen ob die Behauptung der Ganzzahligkeit wirklich aus den experimentellen Daten folgt. Zweitens kann man nachgehen, ob die Möglichkeit besteht, in der Kette der Vorstellungen, die wir uns jetzt auf Grund der experimentellen Daten und theoretischen Betrachtungen gemacht haben, der Ganzzahligkeitshypothese

---

1) W. Sucksmith *Proc. Roy. Soc., A, 133,* 179, 1931.

2) Cabrera hat in 1930 noch eine Neubestimmung des Magnetons aus paramagnetischen Daten vorgenommen. Er kommt zu 1124,9 erg gauss^{-1} mol^{-1} in guter Übereinstimming mit den von Weiss und Foex aus ferromagnetischen Daten angegebenen Wert: 1125, 6 erg. gauss^{-1}, mol^{-1}.

B. Cabrera, *An. Soc. Esp. Fis. y Quim., 28,* 432, 1930. Vgl. auch die neueste Abhandlung von Foex:

G. Foex, *Journ. de Phys. VII, 2,* 353, 1931.

auf nicht allzu gezwungene Weise einen Platz zu gewähren; und untersuchen ob irgend ein anderer Anhaltspunkt in der Physik zu finden wäre, der mit solch einer Ganzzahligkeit zusammenhängen könnte.

Stellt man sich auf den zweiten Standpunkt, so kommt man zweifellos zu der Auffassung, dass die Ganzzahligkeitshypothese eine sehr unplausibele Annahme ist. Die Theorien von **Hund** für die Seltenen Erden und von **Bose** und **Stoner** für die Fe-Gruppe geben in grossen Zügen den paramagnetischen Erscheinungen und besonders den Verlauf der Magnetonenzahl als Funktion der Elektronenzahl vorzüglich wieder. Und man kann nicht einsehen welcher Mechanismus imstande sein würde, mit Beibehaltung dieser Übereinstimmung, die Ganzzahligkeit der Magnetonenzahlen zu bewirken [1]).

Wenn man sich auf den ersten, rein experimentellen Standpunkt stellt, wird die Frage viel schwieriger. Schon die Tatsache, dass häufig nicht die Messpunkte, sondern nur die (meistens ganzzahligen) Magnetonenzahlen und die θ-Werte angegeben worden sind, macht es sehr schwierig davon einen Eindruck zu bekommen [2]), ob die behauptete Ganzzahligkeit, wie ihre Vorkämpfer angeben, wirklich unbedingt aus den Messresultaten folgt.

Betrachtet man nur die Messungen, wobei auch die individuellen Messpunkte publiziert worden sind, so kann man sich noch kaum dem Eindruck entziehen, dass ziemlich viele Magnetonenzahlen ungefähr ganzzahlig sind. Andererseits treten auch deutliche Abweichungen von den ganzen Zahlen auf. Aus eigenen Messungen können wir die Beispiele von Cu^{++} in $CuSO_4 . 5H_2O$ und von Ce^{+++} in CeF_3 und $CeCl_3$ nennen, wo Magnetonenzahlen von 9,50 bezw. $12{,}4^5$ gefunden wurden [3]). Auch von den Anhängern der Ganzzahligkeitshypothese ist über ähnliche „Ausnahmen" berichtet worden [1]).

---

[1]) Auch der Zusammenhang mit den ebenfalls ganzzahligen Sättigungsmagnetisierungen ferromagnetischer Substanzen geht nach den neueren theoretischen Ansichten verloren. Erstens hat man im Ferromagnetismus anscheinend nur mit den Elektronenspins zu tun und zweitens ist auch der Zusammenhang zwischen **Curie**-Konstante und Sättigungsmagnetisierung in der Quantentheorie ein anderer als in der klassischen Theorie.

[2]) In Einzelfällen findet nach unserer Meinung die angegebene Ganzzahligkeit keine Begründung in den Messresultaten. Dies gilt besonders von einigen der sg. geknickten Kurven.

[3]) Messfehler von der Grössenordnung von 0,5 Magneton sind völlig auszuschliessen.

Wenn man also nicht die Ganzzahligkeitshypothese zu einer Halb- und Drittel-Zahligkeitshypothese ausbreiten will, so kommt man zu der Folgerung, dass sie *nicht* als allgemeine Regel aufrecht gehalten werden kann. Die Frage, ob eine Anhäufung [2]) der Magnetonenzahlen um ganzzahlige Werte auftritt, möchten wir vorsichtshalber vorläufig offen lassen, obgleich man geneigt sein würde auf Grund der in den Paragraphen 34 und 38 angegebenen Zahlen, diese Frage zu bejahen.

Wenn wir also in dieser Arbeit nicht weiter auf die Ganzzahligkeitshypothese eingegangen sind, ist dies erstens weil sie theoretisch überhaupt keine Anhaltspunkte zu bieten scheint, und Ignorierung der Hypothese vorläufig zu guter Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment führt; zweitens weil sie auch experimentell keineswegs einwandfrei gesichert scheint.

---

[1]) Bei Chromi-Salzen von FRL. SERRES, bei Ferro-Salzen von FOEX, bei Kobaltsalzen von CHATILLON und FRL. SERRES, und bei Kuprisalzen von BIRCH. Sieh § 38.

[2]) Man errinnere sich, dass die Anhäufung der Atomgewichte um ganze Zahlen, obgleich auch markante Abweichungen auftraten, gezeigt hat doch eine tiefere Bedeutung zu haben.

KAPITTEL VI.

§ 41. Die komplexen Ionen.

Ein komplexes Ion besteht aus einem Kern (bisweilen auch aus mehreren Kernen) um welchen andere Atome oder Atomgruppen sich, fest verbunden, gruppiert haben.

In den paramagnetischen Komplexen tritt stets ein Atom mit unvollständig besetzter Unterschale als Kern auf. Typische Beispiele sind:

$$[Fe\,(CN)_6]^{\equiv},\ (Mn\,O_4]^{-},\ [Co\,(NH_3)_4\,Cl_2]^{+}.$$

Es gibt natürlich auch Übergangsfälle zwischen einfachen und komplexen Ionen. So kann man z. B. ein Metallion, welches in Lösung hydratiert ist, und mit Kristallwasser auskristallisiert zusammen mit diesem Wasser als komplexes Ion auffassen.

Über die Kräfte, welche ein komplexes Ion zusammenhalten ist sehr viel geschrieben und gestritten worden. Als äusserste Typen der möglichen Bindungen gelten die heteropolare Bindung, die beruht auf der elektrostatischen Anziehung zwischen entgegengesetzt geladenen Atomen, und die homöopolare Bindung, bei welcher die Elektronenschalen der Atome nicht mehr geschieden sind, sondern die Bindung sogar von „geteilten” Elektronen (shared electrons) zustande gebracht wird.

Man kann sich auch noch andere Bindungsarten denken, die mehr oder weniger zwischen den beiden Äussersten stehen z. B. eine Ion-Dipolbindung oder Bindungen, wo Atome sich als Quadrupole benehmen (derartige Bindungen stehen den heteropolaren nah) und eine Polarisationbindung, die beruht auf der Polarisation eines der Atome durch das Andere. In der Natur werden wohl immer in einer Bindung mehrere Bindungstypen eine Rolle spielen.

Die Ionen mit unvollständig besetzten Unterschalen sind besonders zur homöopolaren Komplexbildung geneigt; was auch zu verstehen ist, da diese geeignet sind zur Aufnahme von „shared electrons".

Für das experimentelle Material der magnetischen Messungen verweisen wir auf die Original-abhandlingen [1]) und die vielen Zusammenfassungen [2]), welche schon auf diesem Gebiete erschienen sind.

Verschiedene Autoren haben bemerkt, dass man auf Grund von **Sidgwick**'s „effektive Elektronenanzahl" oft das magnetische Moment vorhersagen kann. Man findet diese Zahl, wenn man zu den Elektronen, welche unbedingt zum Kernatom gehören, noch zwei für jede homöopolare Bindung zählt. Das magnetische Moment ist dann dasjenige, das einem Atom mit einer Elektronenzahl, gleich der **Sidgwick**-schen Zahl zukommen würde, wenn man nur mit der Resultante der Elektronen-Spins rechnet [3]).

Für $[Fe(CN)_6]^{----}$ findet man z. B. als **Sidgwick**-sche Zahl: $26 - 2 + 6 \times 2 = 36$, denn das neutrale Fe-Atom hat 26 Elektronen, von denen es 2 für die homöopolaren Bindungen abgibt. Man findet also die Anzahl der Kr-Konfiguration; tatsächlich, kommt dem Ion kein magnetisches Moment zu; die kleine paramagnetische Suszeptibilität ist temperaturunabhängig.

In den folgenden Ionen und Molekulen hat z. B. der Kern die effektive Elektronenzahl 36, und kein magnetisches Moment:

$$[Fe(CN)_5(NH_3)]^{---}\ [Co(CN)_6]^{---},\ [Co(NH_3)_6]^{+++},$$
$$[Co(NH_3)_5Cl]^{++},\ [Co(NH_3)_4Cl_2]^{+},\ [Fe(CN)_5.NO]^{=},$$
$$[Ni_2(CO)_4],\ [Fe(CO)_5]\ [Cr(CO)_6].$$

Es tritt auch oft ein kleiner temperaturunabhängiger Paramagnetismus auf, der analog mit dem, bei den Seltenen Erden auftretenden zu erklären ist (nicht-Diagonalterme in der Matrix des magnetischen Momentes, und dadurch Polarisierbarkeit des

---

[1]) E. **Rosenbohm**, *Z. f. Phys. Chemie, 93*, 693, 1919.
L. A. **Welo**, *Phil. Mag., 6*, 481, 1928, *Phys. Rev., 32*, 320, 1928.
S. **Berkman** und H. **Zocher**, *Z. f. Phys. Chemie, 124*, 318, 1926.
W. **Bilz**, *Z. f. Anorg. Chemie, 170*, 179, 1928.
D. M. **Bose**, *Z. f. Phys., 43*, 864, 1927.

[2]) B. **Cabrera**, *Ann. Soc. Esp. Fis. y Quim, 27*, 73, 1929.
D. M. **Bose**, *Z. f. Phys., 35*, 219, 1929 und *65*, 677, 1929.
L. C. **Jackson**, *Phil. Mag., 2*, 186, 1926 und *4*, 1070, 1927.
L. **Pauling**, *Journ. Am. Chem. Soc., 53*, 1367, 1931.

[3]) Also wie in der Fe-Gruppe; wie im letzten Teil dieser Gruppe ist auch oft das Bahnmoment nicht vollständig „aufgehoben", was sich äussert in Abweichungen von den nach Gl (68) berechneten Spin-Magnetonenzahlen.

Atoms) und die auch wieder besonders hervortritt, wenn das magnetische Moment des Grundzustandes null ist; z. B. in $Fe(CN)_6^{----}$ und $(WO_4)^{=}$ ¹).

Die Ionen $[Fe(CN_6)]^{\equiv}$ und $[Mn(CN)_6]^{----}$ haben die effektive Elektronenzahl 35 und ein magnetisches Moment von etwa 10 Weiss-Magnetonen (aus obiger Regel würde man 8,6 W. M. erwarten); die Ionen $[Mn(CN)_6]^{\equiv}$ und $[Cr(CN)_6]^{----}$ eine effektive Elektronenanzahl von 34 und ein magnetisches Moment von etwa 15 W. M. (man könnte 14,0 W. M. erwarten) ²).

Ausnahmslos scheint die Regel aber nicht gültig zu sein, denn $[Ni(CN)_4]^{=}$ zeigte sich unmagnetisch, obgleich die Sidgwick'sche Zahl $28 - 26 + 4 \times 2 = 34$ ist.

§ 42. Die theoretischen Überlegungen über die komplexen Ionen.

Im Folgenden geben wir die Überlegungen an, die Pauling ³) auf quantenmechanischer Basis gemacht hat.

Das Wesentliche der homöopolaren Bindung scheint darin zu bestehen dass zwei Elektronen sowohl zum einen als zum anderen Atom gehören ⁴).

Die Eigenfunktion für die zwei Elektronen wird dann in Annäherung nullter Ordnung gegeben durch die, in den Ortskoordinaten der Elektronen, symmetrische Summe der Produkte der „sich beteiligende" Eigenfunktion des ersten Atoms mit einer Eigenfunktion ⁵) des zweiten. Die Spinmomente sind entgegengesetzt gerichtet.

---

¹) Die Tatsache, dass bei den Kobaltamminen bei Substitution von (NH_3) durch $Cl-$ ein kleiner paramagnetischer Term zu entstehen scheint, könnte man auch so formulieren, dass die Bindung met $Cl-$ einen weniger homöopolaren Charakter hat, als die mit (NH_3).

²) Man sieht, dass die Koordinationszahl 6 (sechsfacher homöopolarer Bindung) sehr allgemein ist. Die Ferro- und Kobalti-Komplexe haben dann 36 als effektive Elektronenanzahl, und auch alle das magnetische Moment null. Die Chromi-Komplexe haben dann 3 freie Spins, genau wie bei heteropolarer Bindung; das wird vielleicht auch ein Grund sein für die Konstanz der Magnetonenzahl für Cr^{+++}.

³) L. Pauling, *Journ. Am. Chem. Soc.*, *53*, 1367, 1931.

Sieh fur eine andere Behandlung der Probleme besonders: F. Hund, *Z. f. Phys.*, *73*, 1 und 565, 1932.

⁴) Sieh für die ein- und drei-Elektronenbindung L. Pauling, *Journ. Am. Chem. Soc.*, *53*, 3225, 1931.

⁵) Unter Eigenfunktion verstehen wir immer die der Ortskoordinaten der Elektronen.

Die „sich beteiligende" Eigenfunktion kann z. B. in der Fe-Gruppe eine 3d-Eigenfunktion sein. Oft wird sie aber, besonders wenn ein Atom mehrere homöopolaren Bindungen mit anderen Atomen hat, aus einer linearen Kombinationv on 3d-, 4s- und 4p-Eigenfunktionen zusammengesetzt sein.

Nach dem PAULI-Verbot (sieh § 15) können im Atom maximal nur zwei Elektronen zur gleichen Eigenfunktion gehören (mit entgegengesetzter Spinrichtung). Da es 5 unabhängige d-Eigenfunktionen ($l_i = 2$) gibt, können in der 3d-Unterschale nur 10 Elektronen Platz finden. Sind nun homöopolare Bindungen vorhanden, bei welchen einige unabhängige d-Eigenfunktionen beteiligt sind, so gelten diese als besetzt, für das, auf den Fall homöopolarer Bindungen erweiterte, PAULI-Verbot. Es kommt also darauf hinaus, dass jede homöopolare Bindung den Platz von 2 Elektronen besetzt.

Liegen nun z. B. vier homöopolare Bindungen vor, wobei nur d-Eigenfunktionen beteiligt sind, so sind von den 5 Eigenfunktionen 4 besetzt. In dieser d-Unterschale können sich nur noch 2 Elektronen befinden. Es kann sich also maximal nur ein ungepaartes Elektron in der Unterschale befinden, sodass wenn die anderen Unterschalen alle voll-besetzt oder leer sind, das Atom ein Spinmoment von 8,6 Magnetonen aufweisen wird.

Stärkere Bindungen können aber wie gesagt, entstehen, bei Mitbeteiligung von 4s- und 4p-Eigenfunktionen.

Bei sechsfacher homöopolarer Bindung sind die beteiligten Eigenfunktionen nach PAULING immer lineare Kombinationen von zwei 3d-, einer 4s- und drei 4p-Eigenfunktionen. Hierdurch sind dann also, obgleich 6 Bindungen vorliegen nur zwei 3d-Eigenfunktionen besetzt; in der 3d-Unterschale können also noch 6 andere Elektronen Platz finden. Der maximale Spinmoment der Schale beträgt bei dieser Bindungsart also 19,2 W. M. (wenn sich drei ungepaarte Elektronen in der Unterschale befinden)[1].

Die bei der Fe-Gruppe auftretenden homöopolaren Bindungsarten sind:

die, wo eine 3d-, eine 4s-, und zwei 4p-;

die wo eine 4s- und drei 4p-;

die, wo zwei 3d-, eine 4s-, und drei 4p-;

und die wo vier 3d-, eine 4s-, und drei 4p-Eigenfunktionen beteiligt sind.

---

[1] Für mehrere Elektronen bleibt die zweite HUNDsche Regel (sieh § 26) gültig (Maximalwert von s).

In den letzten drei Typen sind die 4s- und 4p-Eigenfunktionen völlig besetzt, und wenn nun auch die 3d-Unterschule vollständig (mit homöopolaren Bindungen oder einzelnen Elektronen) besetzt ist, findet man als effektive Elektronenanzahl nach der SIDGWICKschen Vorschrift 36 und kein magnetisches Moment. Fehlen in der 3d-Unterschale einige Elektronen, so werden diese leeren Plätze nach der 2-ten HUNDschen Regel, dem Atom ein Spinmoment von einer oder zwei Einheiten geben (bezw. 8,6 und 14,0 W. M.)

Wir finden in diesem Fall also die oben angegebene Regel zurück; aber sehen auch, dass sie nicht gültig sein wird, wenn die 3d-Unterschale weniger als halb besetzt ist, oder wenn der zuerst angegebene Typus der Bindung, wobei nur zwei 4p-Funktionen beteiligt sind, vorliegt.

Der erste Fall tritt z. B. bei einigen magnetisch noch nicht untersuchten Vanadin-Komplexen auf.

Der zweite Fall tritt z. B. bei $Ni(CN)_4^=$ auf. Man wird dann nicht eine tetraedrische, sondern eine ebene kwadratische Struktur des Ions erwarten müssen, was nach kristallographischen und chemischen Betrachtungen zuzutreffen scheint. Ist die 3d-Unterschale vollständig besetzt, so findet man 34 als effektive Elektronenanzahl, aber kein magnetisches Moment, weil die beiden leeren Plätze in der 4p-Unterschale entgegengesetzte Spinorientierung haben.

Rühren die homöopolaren Bindungen nur von 4s- und 4p-Eigenfunktionen her, so kann man, wie im Fall der Ionen- oder Ion-Dipol-Bindung die Tatsache der Komplexbildung ausser Betracht lassen: alle Plätze in der 3d-Unterschale sind noch frei. So ist es auf magnetischen Wege unmöglich, zwischen einer solchen Bindung und z. B. einer Ion-Dipolbindung (Wasser!) eine Entscheidung zu treffen.

Das Resultat ist also, dass man den Typus der Bindung kennen muss, bevor man das magnetische Moment vorhersagen kann. Umgekehrt kann aber auch die Bestimmung dieses Momentes ein Hilfsmittel sein um den Charakter noch unbekannter Bindungen aufzuklären. Für die Komplexe, in welchen NO-Gruppen vorkommen ist dies mit Hilfe der homöopolaren 2-Elektronenbindungen nicht gelungen ¹).

Auch die Atome der Pd- und Pt- und U-Gruppen treten als

---

¹) Man muss zur Erklärung die 3-Elektronenbindung heranziehen. L. PAULING, *Journ. Am. Chem. Soc.*, *53*, 3225, 1931.

Kerne von Komplexen auf. Man kann, weil es in diesem Fall auch eine unvollständig besetzte d-Unterschale betrifft, und auch die 5s- und 5p-, die 6s- und 6p-, bezw. die 7s- und 7p-Eigenfunktionen sich an der Bindung beteiligen können, völlig analoge Betrachtungen anstellen. Man findet dann für das magnetische Moment in den bekannten Verbindungen stets null, was auch zuzutreffen scheint ¹).

Die Gruppe der Seltenen Erden, wo die unvollständig besetzten Unterschale tiefer im Atom liegt, gibt zu keinen typischen Komplexbindungen Anlass.

§ 43. Die Pd-, Pt- und U-Gruppen.

Auch in den Pd-, Pt- und U-Gruppen ist eine Unterschale des Atoms unvollständig besetzt (bezw. die 4f-, 5f-, und 6f-Unterschale) und weil dies die Bedingung ist für das Auftreten paramagnetischer Erscheinungen, dürfte man solche Erscheinungen auch in diesen Gruppen erwarten.

Dies trifft einerseits zu: es treten paramagnetische Erscheinungen auf; andrerseits sind diese viel schwächer und weniger allgemein als in der Fe-Gruppe und in der Gruppe der Seltenen Erden.

Bose hat ²) dabei bemerkt, dass in den Pd-, Pt-, und U-Gruppen eigentlich keine typischen Ionen vorkommen; die Bindungen mit der Umgebung scheinen vielmehr einen homöopolaren Charakter zu haben. Und es ist eine bekannte Tatsache, dass bei homöopolarer Bindung vorzugsweise Komplexe auftreten, dessen magnetisches Moment null ist.

Es sind leider nur noch wenige Messungen in diesem Gebiet ausgeführt worden. Die Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilitäten der folgenden Substanzen wurde (über Zimmertemperatur) untersucht ³): $Ru\,O_2$, $Ru\,Cl_3$, $Rh\,Cl_3$, $Rh_2\,O_3$, $Pd\,Cl_2$, $Os\,Cl_2$, $Ir\,Cl_3$, $Ir\,O_2$ und $Pt\,Cl_2$. Von diesen folgte nur $RuCl_3$ ungefähr dem Curie-Weiss-schen Gesetz.; mit $\theta = -37$ und $p = 9{,}8$. Weiter zeigten auch RuO_2 und $Ir\,O_2$ nicht allzu kleine Suszeptibilitäten; diese variierten aber nur langsam mit der Temperatur. Nur bei Zimmertemperatur wurden ausserdem noch untersucht: ⁴)

---

¹) Wohl tritt oft ein temperaturunabhängiger Paramagnetismus auf.

²) D. M. Bose, *Z. f. Phys.*, *65*, 677, 1930.

³) B. Cabrera und A. Duperier, *C. R.*, *185*, 414, 1927.
A. N. Guthrie und L. T. Bourland, *Phys. Rev.*, *37*, 303, 1931.

⁴) D. M. Bose und H. G. Bhar, *Z. f. Phys.*, *48*, 716, 1928.
G. T. Morgan und S. Sugden, *Nature*, *128*, 31, 1931.

$K_3MoCl_6 . 12H_2O$, $Mo(SCN)_6(NH_3)_4 . 4H_2O$, $[Ag_3(C_{10}H_8N_2)](ClO_3)_2$, $K_3W_2Cl_9$, $K_2W(OH)Cl_5$, $IrCl_4$, $IrCl_3 . 3/2H_2O$, $PtCl_4$, $U(C_2O_4)_2$. Von diesen zeigten nur die Molybdän-Verbindungen, die zweiwertige Silberverbindung und die vierwertigen Wolfram-, Iridium- und Uran-Verbindungen einen beträchtlichen Paramagnetismus. Vor allem müsste die Temperaturabhängigkeit für diese Substanzen untersucht werden. Eine sechswertige U-, eine vierwertige Th- und eine fünfwertige Ta-Verbindung, für welche man eine abgeschlossene Konfiguration annehmen muss, zeigten sich in der Tat diamagnetisch.

Es muss bevor man etwas bestimmtes über diese Gruppen sagen kann, mehr experimentelles Material gesammelt werden [1]). Man kann aber schon sehen, dass die einfache Anwendung der HUNDschen Regeln, ebenso wenig wie die der BOSE-STONERschen Auffassung (ausgenommen vielleicht für den Fall des dreiwertigen Mo) zu richtigen Resultaten führt.

---

[1]) Auch zwischen den Angaben der verschiedenen Autoren bestehen noch Unstimmigkeiten.

KAPITTEL VII.

§ 44. Schlussbemerkungen.

Im Vorhergehenden haben wir versucht eine kurze Zusammenfassung der experimentellen Daten und der Theorien im betrachteten Gebiet zu geben. Wir haben betont, dass die Deutung der Tatsachen keine prinzipielle Schwierigkeiten mehr zu liefern scheint.

Hier möge noch kurz wiederholt werden, welche Probleme, nach unserer Meinung, für nähere Studierung an erster Stelle in Betracht kommen.

Für die Seltenen Erden und die Fe-Gruppe liegt schon sehr viel experimentelles Material über Kristallpulver vor. Nähere interessante Untersuchungen wären in der Gruppe der Seltenen Erden bei tiefen Temperaturen noch anzustellen über die Rolle der Ionen mit gerader Elektronenanzahl (§ 32, 35), über das Benehmen von Sm^{+++} und Eu^{+++} (§ 28, 35) über die Ionen am Ende der Gruppe (Tu^{+++} und Yb^{+++}) und über anhydrische Salze (besonders von Gd).

Bei der Fe-Gruppe tritt namentlich das Problem der anhydrischen Salze und der, bei denselben auftretenden feldabhängigen Suszeptibilität in den Vordergrund, Messungen an Mischkristallen scheinen wichtig in diesem Gebiet. Ausserdem wäre es interessant zu untersuchen, ob Co^{++}-Verbindungen auch bei grösster paramagnetischen Verdünnung grosse θ-Werte aufweisen (§ 30, 39).

In den Pd-, Pt- und U-Gruppen muss noch viel experimentelles Material gesammelt werden, besonders bei verschiedenen Temperaturen bevor man sich eine richtige Vorstellung der paramagnetischen Eigenschaften dieser Gruppe bilden kann (§ 43).

Auch für die komplexen Ionen ist das Studium der Temperaturabhängigkeiten wichtig (§ 41, 42). In diesem Gebiet liegen noch mehrere Spezialprobleme vor, wobei die Erforschung der magnetischen Eigenschaften auch nützlich sein kann zur Aufklärung des Charakters der Verbindungen.

Die Entwicklung der Messmethoden bei hohen Feldern im

Laboratorium Kapitzas wird vielleicht auch zu wichtigen Ergebnissen führen (§ 11,21).

Die Anwendung einer ballistischen Umklappungsmethode könnte in vielen Fällen die Suszeptibilitätsmessungen vereinfachen und beschleunigen (§ 12).

Nähere Beobachtungen über die magnetische Doppelbrechung (§ 35) über den Einfluss der Bestrahlung auf die Suszeptibilität und besonders alle gyromagnetische Messungen wären sehr zu begrüssen (§ 14, 35, 39). Vielleicht wäre es möglich durch Ausführung von gyromagnetischen Messungen bei sehr tiefen Temperaturen Näheres über einen magnetischen Kernspin zu erfahren.

Die Suszeptibilitäten paramagnetischer Einkristalle sind noch sehr wenig untersucht worden (§ 32, 38). Das Problem der definitiven Deutung von θ, und die vielseitigen Probleme welche mit der paramagnetischen Sättigung zusammenhängen, sollten vorzugsweise [1]) an Kristallen studiert werden [2]). Der grosse Vorteil der Studierung von Kristallen ist, dass ein genauerer Vergleich einerseits mit theoretischen Vorstellungen, andererseits auch mit den Ergebnissen der Absorbtionsspektren und der magnetooptischen Drehungen (§ 31, 36) möglich wird.

Die Untersuchungen über die Absorbtionsspektren, auch in Magnetfeldern versprechen sehr interessant zu werden. Obwohl schon ziemlich viele Messungen von Freed und von Spedding vorliegen, ist von der Deutung dieser Spektren noch wenig Sicheres bekannt. Es wäre wichtig auch Messungen der Intensitäten der Absorbtionsbanden anzustellen, und nach einen Zusammenhang mit dem Raman-Effekt zu suchen.

Auch theoretisch scheint noch ein grosses Arbeitsfeld vorzuliegen. Es ist ein Hauptzweck dieser Arbeit das Interesse der Theoretiker mehr auf diesen Gebiet zu lenken. Rechnungen über den Einfluss der elektrischen Felder auf die Terme des freien Ions scheinen für Salze der Seltenen Erden mit viel Kristallwasser und für verschiedene Salze der Fe-Gruppe mit bekannten Strukturen schon durchführbar zu sein. Es wäre auch der Mühe wert einmal nachzugehen, wie man einer geringen homöopolaren Wechselwirkung zwischen dem magnetischen Ion und seiner Umgebung Rechnung tragen soll.

---

[1]) Mit Ausnahme vielleicht von kalorischen Messungen.

[2]) Magnetische Messungen an Kristallen der Seltenen Erden, welche zu ziemlich unerwarteten Ergebnissen zu führen scheinen werden jetzt bei tiefen Temperaturen im Leidener Laboratorium ausgeführt.

§ 45. Litteraturverzeichnis.

Die fettgedruckten Zahlen beziehen sich auf die Paragraphen, in denen die betreffende Abhandlung zitiert wird. Nach Abschliessung der Arbeit sind in das Verzeichnis noch einige wichtige Arbeiten eingetragen, welche nicht im Tekst zitiert worden sind.

P. M. van Alphen, sieh: W. J. de Haas und —.
G. Arvidsson, *Phys. Z.schr. 21*, 88, 1920. **14**
G. Athanasiades, *Ann. der Phys. 66*, 415, 1922.
L. J. H. Barnett, sieh: S. J. Barnett und —.
S. J. Barnett, *Phys. Rev. 6*, 339, 1915 und *10*, 7, 1917. **14**
———— und L. J. H. Barnett, *Phys. Rev. 17*, 104, 1921.. **14**
———— und L. J. H. Barnett, *Phys. Rev.*, *20*, 90, 1922. **14**
———— und L. J. H. Barnett, *Phys. Z.schr.*, *24*, 14, 1923. **14**
L. F. Bates, sieh: A. P. Chattock und —. **14**
————, sieh: W. Sucksmith und —.
E. Bauer und A. Piccard, *J. de Phys. 1*, 97, 1920. **11**
G. Beck, *Ann. der Phys. 60*, 109, 1919. **14**
Jean Becqouerel, *Le Radium*, *4*, 56, 1907 und *5*, 17, 1908. **14, 31**
———— und W. J. de Haas, *Comm. Leiden*, 193*a*, 199*a*, 199*b*, 204*a*, 211*b*, 211c. **14, 31, 32, 36**
————, W. J. de Haas und J. v. d. Handel, *Comm. Leiden*, 218*a*. **36, 39**
————, W. J. de Haas und H. A. Kramers, *Comm. Leiden*, 204*b*. **36**
———— und H. Kamerlingh Onnes, *Comm. Leiden*, 103. **14**
————, H. Kamerlingh Onnes und W. J. de Haas, *Comm. Leiden*, 177. **14**
———— und H. A. Kramers, *Comm. Leiden*, *Supp.* 68. **36**
M. H. Belz, *Phil. Mag.*, *44*, 479, 1922. **12, 37**
S. Berkman und H. Zocher, *Z. f. Phys. Chemie*, *124*, 318, 1926. **41**
H. Bethe, *Ann. der Phys.*, *3*, 133, 1929. **32**
————, *Z. f. Phys.*, *60*, 218, 1930. **32**
H. G. Bhar, sieh: D. M. Bose und —.
R. T. Birge, *Phys. Rev. Supp.*, *1*, 1929. **27**
W. Bilz, *Z. f. Anorg. Chemie*, *170*, 179, 1928. **41**
F. Birch, *J. de Phys.*, *VI*, *9*, 136, 1928. **38**
D. M. Bose, *Z. f. Phys.*, *35*, 219, 1929. **41**
————, *Z. f. Phys.*, *43*, 864, 1927. **30, 41**
————, *Z. f. Phys.*, *65*, 677, 1930. **41, 43**
———— und H. G. Bhar, *Z. f. Phys.*, *48*, 716, 1928. **38, 43**
———— und P. K. Raha, *Nature*, *127*, 528, 1931. **39**
M. Born, *Atommechanik*. **6**
————, W. Heisenberg und P. Jordan, *Z. f. Phys.*, *35*, 557, 1926. **22**
———— und P. Jordan, *Elem. Quantenmechanik*. **22**
L. T. Bourland, sieh: A. N. Guthrie und —.
L. Brant, *Phys. Rev.*, *17*, 678, 1921. **33, 37, 38**
G. Breit, *Comm. Leiden*, *Supp.* 46. **8**
———— und H. Kamerlingh Onnes, *Comm. Leiden*, 168*b*.
L. Brillouin, *Journ. de Phys.*, *8*, 74, 1927. **23**
E. D. Bruins, sieh: P. Weiss und —.

A. Brunet, sieh: G. Foex und —.
R. Brunetti, *Il Nuovo Cimento*, *6*, 85, 1929. **34**
G. Bruni und A. Ferrari, *Rend. Ac. d. Lincei*, *2*, 457 und *6*, 56, 1927. **37**
B. Cabrera, *An. Soc. Esp. Fis. y Quim.*, *28*, 432, 1920. **40**
———, *C. R.*, *180*, 669, 1925. **27, 34**
———, *An. Soc. Esp. Fis. y Quim.*, *27*, 73, 1929. **41**
———, *An. Soc. Esp. Fis. y Quim.*, *28*, 431, 1930. **38**
——— und A. Duperier, *J. de Phys.*, *VI*, *6*, 121, 1925. **38**
——— und A. Duperier, *C. R.*, *185*, 414, 1927. **43**
——— und A. Duperier, *C. R.*, *188*, 1640, 1929. **27, 34**
——— und M. Marquina, *An. Soc. Esp. Fis. y Quim.*, *15*, 199, 1917. **37, 38**
———, J. Jimeno und M. Marquina, *An. Soc. Esp. Fis. y Quim.*, *14*, 367, 1916. **37**
——— und E. Moles, *Arch. Sc. Phys. et Nat.*, *40*, 284, 1915. **37**
———, E. Moles und J. Guzman, *Arch. Sc. Phys. et Nat.*, *37*, 325, 1914. **33, 37**
——— und S. Piña, *An. Soc. Esp. Fis. y Quim.*, *17*, 149, 1919. **38**
——— und S. Piña, *An. Soc. Esp. Fis. y Quim.*, *20*, 175 und 509, 1922. **38**
W. H. Capel, sieh: W. J. de Haas, E. C. Wiersma und —.
E. L. Chafféе, sieh: C. T. Perry und —.
E. Charbuliez, sieh: A. Piccard und —.
A. Chatillon, *Ann. de Phys.*, *9*, 187, 1928. **38**
A. P. Chattock und L. F. Bates, *Phil. Trans. A 223*, 257, 1923. **14**
C. W. Coppoolse, sieh: H. R. Woltjer, — und E. C. Wiersma.
P. Debije, *Ann. der Phys.*, *81*, 1124, 1926. **4, 23**
———, *Hb. für Radiologie*, 1925.
H. Decker, *Ann. der Phys.*, *79*, 324, 1926. **12, 27, 34**
P. Drapier, sieh: W. J. de Haas und —.
H. Dubois, *Phil. Mag. 29*, 263, 1890. **14**
A. Duperier, *An. Soc. Esp. Fis. y Quim.*, *28*, 47, 1930. **34**
———, sieh: B. Cabrera und —.
M. G. Dupouy, *Ann. de Phys.*, *15*, 494, 1931. **38**
P. Ehrenfest, *Z. f. Phys.*, *58*, 719, 1930. **24**
———, *Comm. Leiden, Supp.* 44*b*.
A. Einstein und W. J. de Haas, *Verh. d. D. Phys. Ges. 17*, 152, 1915. **14**
——— und W. J. de Haas, *Verh. d. D. Phys. Ges.*, *18*, 173, 1916. **14**
E. Esp, sieh: L. Vegard und —.
P. P. Ewald und C. Hermann, *Strukturbericht*. **33, 37**
G. Falkenberg, *Z. f. Phys.*, *5*, 70, 1921. **12, 37**
A. Ferrari, *Rend. Ac. d. Lincei*, *6*, 56, 1927. **37**
———, sieh: G. Bruni und —.
W. Finke, *Ann. der Phys.*, *31*, 149, 1910. **37, 38**
G. Foex, *Ann. de Phys.*, *16*, 174, 1921. **38**
———, *C. R.*, 180, 919, 1925. **39**
———, *Journ. de Phys. VII*, *2*, 353, 1931. **40**
——— und A. Brunet, *C. R.*, *184*, 443, 1927. **38**
——— und R. Forrer, *J. de Phys.*, *VI*, *7*, 180, 1926. **37**

G. Foex und B. Kessler, *C. R.*, *192*, 1638, 1931. 38
————, sieh: P. Weiss und —.
R. Forrer, sieh: G. Foex und —.
A. Frank, *Phys. Rev. 37*, 467, 1931. 28
————, *Phys. Rev.*, *39*, 119, 1932.
————, sieh: J. H. van Vleck und —.
C. A. Frankamp, sieh: P. Weiss und —.
S. Freed, *Journ. Am. Chem. Soc.*, *49*, 2456, 1927. 12, 29, 38
————, *Journ. Am. Chem. Soc.*, *52*, 2702, 1930. 34
————, *Phys. Rev.*, *38*, 2122, 1931. 35
———— und C. Kasper, *Phys. Rev.*, *36*, 1002, 1930. 11
———— und F. H. Spedding, *Phys. Rev. 34*, 945, 1929. 14
———— und F. H. Spedding, *Phys. Rev.*, *38*, 670, 1931. 14, 35
E. C. Fritts, sieh: J. Kunz und —.
W. L. Giauque, *Journ. Am. Chem. Soc.*, *49*, 1864, 1927.
C. J. Gorter, *Nature*, *128*, 68, 1931. 27
————, *Vlaamsch W. en N. Tijdschrift*, *5*, 103, 1931. 27
————, *Physica*, *11*, 171, 1931. 30
———— und W. J. de Haas, *Comm. Leiden*, 218*b*. 28, 34
————, W. J. de Haas und J. v. d. Handel, *Comm. Leiden*, 218*c*. 34
————, W. J. de Haas und J. v. d. Handel, *Comm. Leiden*, 218*d*. 38
————, sieh: W. J. de Haas und —.
————, sieh: W. J. de Haas, —, und J. v. d. Handel.
S. Goudsmit, *Phys. Rev.*, *31*, 946, 1928. 28
————, sieh: L. Pauling und —.
————, sieh: G. E. Uhlenbeck und —.
E. Gumlich, *Hdb. der Phys. 16*. 10
A. N. Guthrie und L. T. Bourland, *Phys. Rev.*, *37*, 303, 1931. 43
W. J. de Haas, *Rapport du Conseil de Physique Solvay*, 1923. 14
————, *Nature*, *127*, 335, 1931. 24
———— und P. M. van Alphen, *Comm. Leiden*, 208*d*, 212*a*. 11, 24
———— und P. Drapier, *Ann. der Phys. 62*, 673, 1913. 11
———— und C. J. Gorter, *Comm. Leiden*, 208*c*. 30, 38
———— und C. J. Gorter, *Comm. Leiden*, 210*c*. 34, 36
———— und C. J. Gorter, *Comm. Leiden*, 210*d*. 30, 38
———— und C. J. Gorter, *Comm. Leiden*, 215*a*. 11, 38
————, C. J. Gorter und J. v. d. Handel, *unpubl. Messungen*. 38
————, E. C. Wiersma und W. H. Capel, *Comm. Leiden*, 201*b*. 11, 34
————, sieh: Jean Becquerel und —.
————, sieh: Jean Becquerel, — und J. v. d. Handel.
————, sieh: Jean Becquerel, —, und H. A. Kramers.
W. J. de Haas, sieh: Jean Becquerel, H. Kamerlingh Onnes, und —.
————, sieh: A. Einstein und —.
————, sieh: C. J. Gorter und —.
————, sieh: C. J. Gorter, —, und J. v. d. Handel.
————, sieh: L. C. Jackson und —.
————, sieh: H. R. Woltjer und —.
O. Halpern, *Ann. der Phys.*, *12*, 169. 1932. 23
J. v. d. Handel, sieh Jean Becquerel, W. J. de Haas und —.

J. v. d. Handel, sieh C. J. Gorter, W. J. de Haas und —.
————, sieh: W. J. de Haas, C. J. Gorter und —.
W. Heisenberg, *Z. f. Phys.*, *41*, 239, 1927. 17
————, sieh: M. Born, —, und P. Jordan.
K. Honda und T. Ishiwara, *Toh. Imp. Univ. Sc. Rep.*, *4*, 215, 1915. 38
———— und T. Soné, *Toh. Imp. Univ. Sc. Rep.* *3*, 139, 1914. 38
T. Ishiwara, *Toh. Imp. Univ. Sc. Rep.*, *3*, 303, 1915. 38
————, sieh: K. Honda und —.
L. C. Jackson, *Phil. Mag.* *2*, 186, 1926. 41
————, *Phil. Mag.*, *4*, 1070, 1927.
————, *Comm. Leiden*, 163. 13, 38
———— und W. J. de Haas, *Comm. Leiden*, 187*c*. 38
———— und H. Kamerlingh Onnes, *Comm. Leiden*, 168*b*. 34, 38
J. Jimeno, sieh: B. Cabrera, — und M. Marquina.
C. James, sieh: J. Zernike und —.
P. Jordan, sieh: M. Born, W. Heisenberg und —.
H. Kamerlingh Onnes, *Comm. Leiden*, *Supp.* 44*a*. 38
———— und E. Oosterhuis, *Comm. Leiden*, 129*b*. 38
———— und E. Oosterhuis, *Comm. Leiden*, 132*e*. 34
———— und E. Oosterhuis, *Comm. Leiden*, 139*e*. 34
———— und A. Perrier, *Comm. Leiden*, 122*a*. 34
————, sieh: Jean Becquerel und —.
————, sieh: Jean Becquerel, —, und W. J. de Haas.
————, sieh: G. Breit und —.
————, sieh: L. C. Jackson und —.
————, sieh: P. Weiss und —.
————, sieh: H. R. Woltjer und —.
P. Kapitza, *Proc. Roy. Soc.*, *A* *131*, 224, 1931. 11
———— und W. L. Webster, *Proc. Roy. Soc.*, *A*, *132*, 442, 1931. 10
C. Kasper, sieh: S. Freed und —.
W. H. Keesom, *Comm. Leiden*, *Supp.* 32. 4
————, *Comm. Leiden*, *Supp.* 36*a*.
————, S. Weber und G. Norgaard, *Comm. Leiden*, 202*b*. 35
————, S. Weber und G. Schmidt, *Comm. Leiden*, 202*c*. 35
B. Kessler, sieh G. Foex und —.
H. A. Kramers, *Proc. Acad. Amst.*, *33*, 959, 1930. 32
————, *Comm. Leiden Supp.*, 68*b*. 23, 30, 31, 32
———— und Jean Becquerel, *Comm. Leiden*, *Supp.* 68*c*. 36
————, sieh: Jean Becquerel, W. J. de Haas und —.
K. S. Krishnan, *Z. f. Phys.*, 71, 137, 1931. 38
J. Kunz und E. C. Fritts, *Phys. Rev.*, *19*, 425, 1922. 18
R. Ladenburg, *Naturw.*, *8*, 5, 1920. 25
————, *Z. f. Phys.*, *30*, 898, 1925 und *46*, 168, 1927. 31
A. Landé, *Z. f. Phys.*, *5*, 231, 1921. 16
O. Laporte, *Z. f. Phys.* *47*, 761, 1928. 30
O. Laporte und A. Sommerfeld, *Z. f. Phys.* *40*, 333, 1926 30
J. van Leeuwen, *Dissertation Leiden*, 1919. 5
H. A. Lorentz, *Theory of Electrons*, 1909. 8
————, *Hb. für Radiologie*, 1925. 8

M. Marquina, sieh: B. Cabrera und —.
St. Meyer, *Phys. Z.schr.*, *26*, 51 und 478, 1925. 34
E. Moles, sieh: B. Cabrera und —.
————, sieh: B. Cabrera, — und J. Guzman.
G. T. Morgan und S. Sugden, *Nature*, *128*, 31, 1931. 43
G. Natta, *Rend. Ac. d. Lincei*, *5*, 592, 1927. 37
K. F. Niessen, *Phys. Rev.*, *34*, 253, 1929. 23
G. Norgaard, sieh: W. H. Keesom, S. Weber und —.
I. Oftedahl, *Z. f. Phys. Chem. B*, *5*, 271, 1929 und *13*, 196, 1931. 33, 36
E. Oosterhuis, *Comm. Leiden*, *Supp.* 31.
————, sieh: H. Kamerlingh Onnes und —.
L. Pauling, *Proc. Roy. Soc.*, *A*, *114*, 181, 1927. 24
————, *Proc. Nat. Ac.*, *15*, 709, 1929. 37
————, *Journ. Am. Chem. Soc.*, *53*, 322, 1931. 41, 42
————, *Journ. Am. Chem. Soc.*, *53*, 1367, 1931. 41, 42
———— und S. Goudsmit, *Linespectra.* 16
N. Perrakis, *J. de Phys.*, *VI*, *8*, 473, 1927. 38
A. Perrier, sieh: H. Kamerlingh Onnes und —.
C. T. Perry und E. L. Chaffée, *Phys. Rev.* *36*, 904, 1930. 27
A. Piccard, *Diss. Zürich*, 1913. 11, 37
———— und E. Charbuliez, *Arch. Sc. Phys. et Nat.*, *42*, 324, 1916. 37
————, sieh: E. Bauer und —.
S. Piña, sieh: B. Cabrera und —.
I. I. Rabi, *Phys. Rev.*, *29*, 174, 1927. 12, 13, 37, 38
P. K. Raha, sieh: D. M. Bose und —.
C. V. Raman und S. W. Chinchalkar, *Nature*, *128*, 758, 1931. 35
E. Rosenbohm, *Z. f. Phys. Chemie*, *93*, 693, 1919. 41
A. E. Ruark und H. C. Urey, *Atoms, Molecules, Quanta*, 1930. 28
G. Schmidt, sieh: W. H. Keesom, S. Weber und —.
P. Selwood, *Journ. Am. Chem. Soc.*, *53*, 1799, 1931. 34
A. Serres, *Dissertation Strassburg*, 1931. 28, 38
————, *C. R.*, *181*, 714, 1928. 38
J. C. Slater, *Phys. Rev.*, *34*, 1239, 1929. 26
A. Sommerfeld, *Z. f. Phys.*, *19*, 221, 1923. 30
————, sieh: O. Laporte und —.
T. Soné, sieh: K. Honda und —.
F. H. Spedding, *Phys. Rev.*, *37*, 777, 1931. 35
———— und G. C. Nutting, *Phys. Rev.*, *38*, 2294, 1931. 35
————, sieh: S. Freed und —.
J. Q. Steward, *Phys. Rev.* *11*, 100, 1918. 14
E. C. Stoner, *Phil. Mag.*, *8*, 250, 1929. 30
————, *Magnetism and Atomic Structure*, 1926.
————, *Magnetism*, 1930.
M. J. O. Strutt, *Z. f. Phys.*, *68*, 632, 1931. 14
S. Sugden, sieh: G. T. Morgan und —.
W. Sucksmith, *Proc. Roy. Soc. A*, *128*, 276, 1930. 14, 35
————, *Proc. Roy. Soc. A* *133*, 179, 1931. 14, 39
———— und L. F. Bates, *Proc. Roy. Soc. A* *104*, 499, 1923. 14
Ph. Théodoridès, *J. de Phys.*, *VI*, *3*, 1, 1922. 38

A. Trümpler, *Diss. Zurich,* 1917. 37
G. E. Uhlenbeck, *Dissertation Leiden,* 1927. 5
——— und S. Goudsmit, *Naturw., 13,* 953, 1925. 16
H. C. Urey, sieh: A. E. Ruark und —.
L. Vegard und E. Esp, *Ann. der Phys., 85,* 1152, 1928. 37
S. Veil, *C. R., 183,* 1287, 1926 und *186,* 80, 1928. 37, 38
J. H. van Vleck, *Phys. Rev., 31,* 587, 1928. 24, 28
———, *Phys., Rev., 29,* 727, 1927. 22
———, *Phys. Rev., 37,* 467, 1931. 30
——— und A. Frank, *Phys. Rev. 34,* 1494, 1929. 28
S. Weber, sieh: W. H. Keesom, —, und G. Norgaard.
———, sieh: W. H. Keesom, —, und G. Schmidt.
W. L. Webster, sieh: P. Kapitza und —.
P. Weiss, *J. de Phys., IV, 6,* 55, 1907. 13
———, *J. de Phys., IV, 6,* 661, 1907. 22
———, *J. de Phys. VII, 1, 1,* 1930. 5, 22
———, *J. de Phys., V, 1,* 900, 965, 1911.
———, *J. de Phys., VI, 5,* 129, 1924.
———, *C. R., 184,* 417, 1927.
———, *J. de Phys., VII, 1,* 185, 1930. 24
——— und E. D. Bruins, *Proc. Ac. Amst., 18,* 246, 1915. 33, 37, 38
——— und G. Foex, *J. de Phys., V, 1,* 475, 744 und 895, 1911. 11
——— und C. A. Frankamp, *Proc. Ac. Amst., 18,* 254, 1915. 37, 38
——— und H. Kamerlingh Onnes, *Comm. Leiden,* 114. 13
L. A. Welo, *Phil. Mag., 6,* 481, 1928. 38, 41
———, *Phys. Rev. 32,* 320, 1928. 38, 41
———, *Nature. 124,* 575, 1929 37
G. Wenzel, *Z. f. Phys., 16,* 51, 1922. 28
H. G. K. Westenbrink, *Proc. Ac. Amst., 29,* 1223 und 1374, 1926. 37
E. C. Wiersma, *Diss. Leiden,* 1932. 11
———, *Vlaamsch W en N. Tijdschr. 5,* 1, 1930.
———, sieh: W. J. de Haas, — und W. H. Capel.
———, sieh: H. R. Woltjer und —.
———, sieh: H. R. Woltjer, C. W. Coppvalse und —.
E. H. Williams, *Phys. Rev., 14,* 348, 1920. 34
———, *Phys. Rev., 12,* 158, 1918. 34
———, *Phys. Rev., 27,* 484, 1926. 34
H. R. Woltjer, *Comm. Leiden,* 173*b*. 38
——— und W. J. de Haas, *Comm. Leiden, Supp.* 66*b*.
——— und H. Kamerlingh Onnes, *Comm. Leiden,* 167*b,c*. 8, 34
——— und H. Kamerlinch Onnes, *Comm. Leiden,* 173c. 38
——— und E. C. Wiersma, *Comm. Leiden,* 201*a*. 38
———, C. W. Coppoolse und E. C. Wiersma, *Comm. Leiden,* 201*d*. 11
N. Wooster, *Z. f. Kryst., 74,* 363, 1930. 37
R. W. G. Wykoff, *Z. f. Kryst., 57,* 595, 1923. 37
J. Zernike und C. James, *Journ. Am. Chem. Soc., 48,* 2827, 1926. 34
H. Zocher, sieh: S. Berkman und —.

263

R

Aus den Beständen der Niedersächs. Staats- und Universitätsbibliothek ausgeschieden.
Göttingen, den 10. AUG. 1966

ARCHIVES

DU

MUSÉE TEYLER

SÉRIE III, VOL. VII

FASCICULE 5

Programma's van Teyler's Godgeleerd Genootschap.
Programma's van Teyler's Tweede Genootschap.
ANTOINE MULDER. **Sur une nouvelle méthode de construction d'un réflecteur de son, donnant des ondes cylindriques** 295
E. C. WIERSMA and C. J. GORTER, **Remarks on the susceptibility of oxygen gas** 300
A. D. FOKKER, **Kristallsymmetrie und Gitterschwingungen** 307
A. D. FOKKER, **De beteekenis der atoomkleuren** 337
A. D. FOKKER, **Symmetrische trillingen** 356
C. J. GORTER, **Der Faraday-Effekt in paramagnetischen Lösungen** . 369
C. J. GORTER, **Some remarks on the thermodynamics of supraconductivity** 378

LA HAYE
MARTINUS NIJHOFF
1933

SUR UNE NOUVELLE METHODE DE CONSTRUCTION D'UN RÉFLECTEUR DE SON, DONNANT DES ONDES CYLINDRIQUES

par ANTOINE MULDER

MM. Nuyens et Philippi ont démontré [1]) que la surface réflectrice d'ondes sonores qui satisfait le mieux aux exigences de compréhensibilité d'un orateur dans un auditoire de dimensions considérables doit rejeter des ondes cylindriques sur les auditeurs.

Dès lors il s'agit de construire une surface qui soit le lieu géométrique des points pour lesquels la différence des distances à un point fixe et à une droite fixe est constante.

Une telle surface est déterminée par l'équation:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x + a)^2 + y^2} - b$$

dans un système de coordonnées rectangulaires dont l'origine coïncide avec le point fixe.

Or, la construction, en bois par ex., de la surface au moyen de cette équation se heurte à de sérieuses difficultés. MM. A. D. Fokker et M. J. O. Strutt ont demontré la posibilité de construction d'une surface brisée, qui s'approche de la surface théorique. Ils ont fait construire deux grands réflecteurs selon ces principes et en ont mesuré l'efficacité par une série d'expériences ingénieuses [2]).

Pourtant ont pouvait espérer un maximum d'effet d'une surface qui ne serait pas brisée et je me suis demandé si la dite équation ne pourrait être transformée de telle sorte qu'elle serait appliquable à une méthode de fabrication qui, depuis une dizaine d'années s'était montrée excellente à tout égard. Elle revient en

---

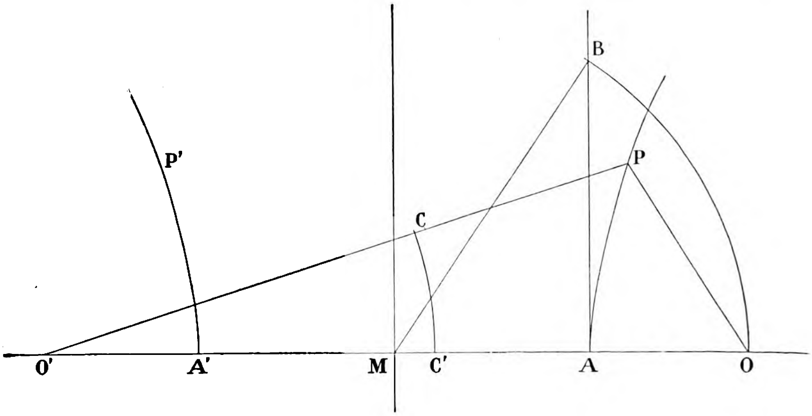
1) Archives du Musée Teyler. Sér. III, Vol. VII, 1929, Physica X, p. 19, 1930.

2) cfr. A. D. Fokker, et M. J. O. Strutt: Arch. du. M. Teyler. Sér. III Vol. VII, p. 73 et 77, 1930.

substance à la construction d'une certaine quantité d'arêtes qui partent, en forme de rayons, d'un point sur l'axe des x, le sommet des courbes, où elles sont clouées sur une planche circulaire. On pourrait la qualifier de ,,construction centrale''.

En effet, cette transformation peut être réalisée de la manière suivante.

Considérons d'abord la section verticale en posant $y = 0$; on obtient deux paraboles dont l'une seulement nous intéresse. De même, si $z = 0$, la section horizontale donne une hyperbole. Supposons maintenant que la surface à construire résulte de la rotation de la courbe verticale autour de l'axe des x sur un angle de 90°, que cette courbe, au commencement une parabole, se transforme d'une manière continue en une hyperbole, la section horizontale. Le problème se réduit alors à trouver la fonction qui domine cette transition.



Jusqu'ici on avait fait usage d'une formule empirique où figuraient les paramètres de l'hyperbole horizontale et l'angle de déviation du plan vertical, et on calculait de 10 en 10 degrés les courbes de 8 arêtes qui, avec la parabole verticale et l'hyperbole horizontale formaient un quadrant complet de la carcasse sur laquelle une surface en bois mince était attachée.

La construction centrale ainsi achevée avait l'avantage d'une remarquable stabilité, d'une grande simplicité de fabrication et, ce qui satisfait aux légitimes prétentions de l'esthétique, de la possibilité de toute forme de contour.

En dépit de ces qualités, cette construction n'échappait pas au désavantage que la surface résultante était théoriquement inexacte. Cette inexactitude se manifestait maintes fois par de menus plis dans la couverture.

Pour trouver la fonction désirée nous prenons pour paramètres la distance focale f et le demi-angle des asymptotes λ. Considérons la section horizontale, dont la moitié est représentée par la figure ci-jointe. Soient AP et $A'P'$ les deux demi-branches de l'hyperbole, O et O' les foyers et M le milieu. Il suffira de s'occuper de la branche droite AP, sur laquelle nous prenons un point P. Menons les rayons vecteurs $O'P$ et OP, prenons $CP = OP$, il sera $O'C$ ou $O'C'$ la différence constante des distances au point fixe, O, et la droite fixe, normale en O' sur la plan de la figure. Si nous menons la normale AB et faisons $MB = MO$, l'angle AMB sera égal à λ. Il s'ensuit que la distance du point fixe à la droite fixe est

$$\frac{2f}{1 - \cos \lambda}.$$

En effet on a:

$$OO' = 2MO = 2(MA + f) = 2(MB \cos \lambda + f) = 2(MO \cos \lambda + f)$$

et puis:

$$2MO\,(1 - \cos \lambda) = 2f$$

d'où:

$$OO' = \frac{2f}{1 - \cos \lambda}.$$

La différence constante est représentée par:

$$O'C = O'C' = 2f\,\frac{\cos \lambda}{1 - \cos \lambda}.$$

On voit aisément que

$$O'C' = 2MO - (OA + AC')$$

et parceque A est un point de la courbe, on aura:

$$AC' = AO = f$$

La substitution nous donne:

$$O'C' = \frac{2f}{1 - \cos \lambda} - 2f = 2f\,\frac{\cos \lambda}{1 - \cos \lambda}.$$

En substituant ces valeurs dans la formule (1) de MM. Nuyens et Philippi, nous aurons:

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{\left(x+\frac{2f}{1-\cos\lambda}\right)^2+y^2}-2f\,\frac{\cos\lambda}{1-\cos\lambda}.$$

Cette expression a une validité générale pour tous les points de la surface, par conséquent aussi pour la section verticale, où y devient zéro.

Imaginons maintenant que l'on change la direction des axes Y et Z en faisant tourner le plan vertical d'un certain angle α, que nous appelons: l'angle de déviation. Soient x_1, y_1 et z_1 les nouvelles coordonnées, on aura

$$x=x_1\,;\quad y=y_1\cos\alpha-z_1\sin\alpha\,;\quad z=y_1\sin\alpha+z_1\cos\alpha$$

et la formule s'écrit comme suit:

$$\sqrt{x_1^2+(y_1\cos\alpha-z_1\sin\alpha)^2+(y_1\sin\alpha+z_1\cos\alpha)^2}=$$
$$=\sqrt{\left(x_1+\frac{2f}{1-\cos\lambda}\right)^2+(y_1\cos\alpha-z_1\sin\alpha)^2}-2f\,\frac{\cos\lambda}{1-\cos\lambda}.$$

Comme nous devons calculer la courbe dans ce plan, dont par conséquent le point P de la figure fait partie, la valeur de y_1 se réduit à zéro. Dès lors la formule change en celle-ci:

$$\sqrt{x_1^2+z_1^2}=\sqrt{\left(x_1+\frac{2f}{1-\cos\lambda}\right)^2+z_1^2\sin^2\alpha}-2f\,\frac{\cos\lambda}{1-\cos\lambda}.$$

ou bien:

$$\sqrt{x_1^2+z_1^2}+2f\,\frac{\cos\lambda}{1-\cos\lambda}=\sqrt{\left(x_1+\frac{2f}{1-\cos\lambda}\right)^2+z_1^2\sin^2\alpha}.$$

En égalant les carrés des deux membres il s'ensuit

$$x_1^2+z_1^2+4f\,\frac{\cos\lambda}{1-\cos\lambda}\sqrt{x_1^2+z_1^2}+4f^2\frac{\cos^2\lambda}{(1-\cos\lambda)^2}=$$
$$=x_1^2+\frac{4f}{1-\cos\lambda}\,x_1+\frac{4\,f^2}{(1-\cos\lambda)^2}+z_1^2\sin^2\alpha,$$

et puis

$$z_1^2\,(1-\sin^2\alpha)+4f\,\frac{\cos\lambda}{1-\cos\lambda}\sqrt{x_1^2+z_1^2}=\frac{4f}{1-\cos\lambda}\,x_1+4f^2\,\frac{1-\cos^2\lambda}{(1-\cos\lambda)^2}.$$

En multipliant par $\frac{1}{4f}(1 - cos\ \lambda)$ on obtient

$$\frac{1}{4f}(1 - cos\ \lambda)\, z_1^2\, cos^2\, \alpha + cos\ \lambda \sqrt{x_1^2 + z_1^2} = x_1 + f\,\frac{1 - cos^2\,\lambda}{1 - cos\ \lambda},$$

ou enfin

$$x_1 + f\,(1 + cos\ \lambda) - \frac{1}{4f}(1 - cos\ \lambda)\, z_1^2\, cos^2\, \alpha = cos\ \lambda \sqrt{x_1^2 + z_1^2}. \quad (1)$$

Cette formule se prête au calcul des points de chaque courbe. Elle devient extrêmement simple quand on a une fois déterminé f et λ. Alors $f\,(1 + cos\ \lambda)$, $(1 - cos\ \lambda)/4f$ et $cos\ \lambda$ sont des constantes que nous pouvons représenter par p, q et r, ce qui réduit la formule à

$$x_1 + p - q z_1^2\, cos^2\, \alpha = r\sqrt{x_1^2 + z_1^2}. \quad (2)$$

J'ai fait construire plusieurs réflecteurs, calculés au moyen de cette formule, ayant des distances focales et des λ divers, et j'ai constaté qu'il n'y avait plus de trace de pli dans la surface réflectrice; ce qui prouve que la transformation de la parabole verticale en l'hyperbole horizontale par rotation autour de l'axe était parfaitement continue et que l'on avait réellement construit la surface de MM. Nuyens et Philippi.

REMARKS ON THE SUSCEPTIBILITY OF OXYGEN GAS

by E. C. WIERSMA and C. J. GORTER

Abstract:

The consideration of recent measurements of the susceptibility of gaseous oxygen suggests the existence of a paramagnetic term, independent of the temperature in addition to the wellknown paramagnetism, due to the presence of 2 electronic spins per molecule.

The dependence of the susceptibility on the density suggests polymerisation to O_4, in accordance with an assumption previously made by Lewis. Further evidence for this association, from other physical properties of oxygen is discussed.

It is a well-known fact [1]) that the normal state of the oxygen-molecule is of the type $^3\Sigma$, and that the magnetic behaviour of gaseous oxygen can to a first approximation be described by the formula:

$$\chi = \frac{N\beta^2}{3kT}\sqrt{4S\,(S+1)} \qquad (1)$$

where N is the number of molecules in a gram, β the Bohr-magneton and where $S = 1$. So the gas behaves magnetically as if the electronic spinvector were entirely free. Van Vleck [2]) has shown theoretically that, if we take into account the coupling of the electronic spins to the rest of the molecule, the same value of χ is to be expected for sufficiently high temperatures.

There are however some details in the magnetic behaviour of oxygen, which require further consideration.

Recent relative measurements of Wiersma, De Haas and Capel [3]) on oxygen gas of atmospheric pressure at different temperatures evinced the existence of systematic deviations from Curie's law.

---

1) R. S. Mulliken, Phys. Rev. 32, 880, 1928.

2) J. H. van Vleck, Theory of electric and magnetic susceptibilities, § 66.

3) E. C. Wiersma, W. J. de Haas and W. H. Capel, Comm. Leyden, 215*b*.

The result can be represented by the formula 1):

$$\chi = \frac{C}{(T + 1{,}7)}, \tag{2}$$

but a closer examination shows, that the formula:

$$\chi = \frac{C}{T} + a, \tag{3}$$

where $a = 1{,}8 \,.\, 10^{-6}$ gives a slightly better representation of the measurements.

As kT is still very high compared with the widths of the rotational structure and the triplet-structure of the basic level [2], it seems to be very probable, that the deviation is due to a small paramagnetic term, independent of the temperature. The existence of a term due to the high-frequency-elements of the magnetic moment has been predicted by Van Vleck [3]; a must be considered as the difference of such a term and the ordinary diamagnetic term, which will also be independant of the temperature in a first approximation.

If we add the a-value, given above, to the theoretical value of formula (1), we get $107{,}7 \,.\, 10^{-6}$ at 293°,0, which agrees remarkably well with the experimental value ($107{,}8 \,.\, 10^{-6}$) of Bauer and Piccard [4], which is very probably the most reliable absolute determination.

The measurements of Woltjer, Coppoolse and Wiersma [5] of the susceptibility of gaseous oxygen at high pressures have proved that the susceptibility decreases with increasing density. This unexpected phenomenon shows, that at high pressures the O_2-molecules cannot be considered as independant. And the fact, that the susceptibility is a linear function of the density suggests that we have to do with association of two molecules O_2 to one molecule O_4.

Though it seemed at first, that the equilibrium constant was

---

1) E. C. Wiersma, Thesis Leyden, 1932.

2) See for related problems, W. G. Penney and R. Schlapp, Phys. Rev. 41, 194, 1932; C. J. Gorter, Phys. Z.schr., 33, 546, 1932.

3) l.c.

4) E. Bauer and A. Piccard, J. de Phys. 1, 97, 1920.

5) H. R. Woltjer, C. W. Coppoolse and E. C. Wiersma, Comm. Leyden, 201*d*.

independent of the temperature, a further examination and a comparison with the recent data at atmospheric pressure shows, that the equilibrium constant $K_\rho = \varrho_2^2/\varrho_4$ varies slowly as a function of T.

We arrive at $K_\rho = 4{,}3$ g/cc. for $T = 290°$, and at $K_\rho = 3{,}3$ g/cc. for $T = 155°$, assuming, that the susceptibility of O_4 can be neglected in comparison with that of O_2.

In a paper, which had not come to our notice, until quite recently, Lewis ¹) suggested, as early as 1924, the assumption of polymerisation of oxygen, to account for the results of Perrier and Kamerlingh Onnes ²) about the susceptibilities of liquid mixtures of oxygen and nitrogen. Perrier and Kamerlingh Onnes had interpreted their results as due to a negative Weiss molecular field, but it is certainly in keeping with the recent developement of the theory of magnetism to describe an apparent negative molecular field as due to homopolar interaction between the molecules.

Lewis derived for the liquid state from the results of Perrier and Kamerlingh Onnes, values for the equilibrium constant between 0,92 g/cc. at 64,2° and 1,10 g/cc. at 77,4°. He even extrapolated these values to the gaseous state, assuming the heat capacity of two moles of O_2 to exceed that of one mole of O_4 by 2 calories.

This yielded the formula:

$$- R\, ln\, K_\rho = - \frac{12}{T} - 2\, ln\, T + 8{,}67 \qquad (4)$$

which gives $K_\rho = 4{,}0$ at 293° and $K_\rho = 2{,}2$ at 155°.

As to the order of magnitude the agreement with the experimental data, given above, is good; remarkably good even for room temperature. The experimental results point to a feebler dependence on the temperature than (4) suggests. On the other hand it is quite possible to choose the constants in (4) in such a manner, that the experimental data for the gas are well represented. It is true, that then the exact concordance of (4) with the results on the liquid mixtures is disturbed, but in our opinion exact equality of the heat of total dissociation for the gas and for the liquid

---

1) G. N. Lewis, Journ. Am. Chem. Soc., 46, 2027, 1924.

2) A. Perrier and H. Kamerlingh Onnes, Comm. Leyden, 139*d*,

state can hardly be expected, and the estimation of the specific heats of the two gases must also merely be considered as a rough approximation.

The question arises, whether this polymerisation of oxygen gas leads to other anomalies in physical properties at high pressures.

In 1928 Wulf[1]) suggested that the photochemical ozonisation under the influence of light of a wavelength of 2000—3000 Å may be due not to the dissociation of the O_2-molecule, but to dissociation of an O_4-molecule. The dependence of the absorption per molecule on the pressure in this region had formerly been interpreted as due to the influence of collisions upon the absorption of the O_2-molecule. Wulf discussed Warburg's[2]) absorption data with the O_4-assumption and arrived to $K = 1{,}2$ g/cc. at room temperature.

This value is considerably lower than Lewis' and our values, but the author himself states, that ,,considering that assumptions, which could only be approximately true, have entered into the treatment of the absorption data" the agreement with Lewis' value seems satisfactory.

In regard to the equation of state, oxygen is also anomalous, as has been remarked by Keesom[3]); Kamerlingh Onnes and Keesom[4]) pointed out, that the deviations from the reduced equation of state go generally parallel with the critical temperatures for gases for which association does not occur.

The sequence of the critical temperatures is however:

$He, H_2, Ne, N_2, Ar, O_2$, while the order of succession of the deviations from the reduced equation of state is:

$He, H_2, Ne, O_2, N_2, Ar$, where N_2 and O_2 behave almost identically[5]).

It is seen, that oxygen is anomalous, it is more compressible at room temperature, than should be expected; this must obviously be explained by the described association. As it is not obvious, however, at first sight, which influence association has on the critical point data, we do not come to an estimation of K_p from the equation of state.

---

[1]) O. R. Wulf, Proc. Nat. Ac. 14, 609 and 614, 1928; Journ. Am. Chem. Soc., 50, 2596, 1928, where older litterature can be found.

[2]) E. Warburg, Berl. Ber. 1911, 746, 1912, 216 and 1914, 872; Z. f. Elektrochemie 26, 54, 1920 and 27, 113, 1921.

[3]) W. H. Keesom, Gedenkboek Kamerlingh Onnes, 1922.

[4]) H. Kamerlingh Onnes and W. H. Keesom, Enc. der Math. Wiss. V, 10; Comm. Leyden, Suppl. 23.

[5]) F. P. G. A. J. van Agt, Comm. Leyden, 176c.
G. P. Nijhoff, Comm. Leyden, Suppl. 64f.

Quite recently Serber[1]) suggested, that the anomalous magneto-optical rotation of oxygen (which has been determined at high pressures) is also caused by the presence of O_4.

As to the liquid state, it has been remarked by Lewis[2]) that the anomalous slope of the specific heat of oxygen as a function of the temperature, compared with N_2 and CO, can be ascribed to the change of the equilibrium constant with the temperature.

It might not be impossible, that a very careful examination of the X-ray diffraction rings could also give indications about the existence of O_4 [3]).

Finally we wish to suggest, that the fact, that solid oxygen possesses different complicated structures (hexagonal, rhombic) in contrast with H_2 and N_2, which have simple hexagonal and cubic molecule-lattices [4]), might perhaps be due to the existence of the complicated O_4-molecule in the lattices.

We wish to express our indebtedness to Prof. W. J. de Haas and to Prof. A. D. Fokker, who took a conducive interest in these considerations.

Note added in the proof:

Finkelnburg and Steiner quite recently discussed the ultra-violet absorbtion bands, which Wulf ascribed to O_4 (Zschr. f. Phys., **79**, 69, 1932). They showed the bands to converge to the normal dissociation potential of O_2 (5,1 Volt), and conclude that the bands probably belong to the forbidden transition: ${}^3\Sigma_g^- \rightarrow {}^3\Delta_u$ of O_2, the selection rules being broken at high pressures by mutual interaction between pairs of molecules. They suggest, that the

---

1) R. Serber, Phys. Rev., **41**, 489, 1932.

2) l.c.

3) W. H. Keesom and J. de Smedt, **25**, 118, 1932, did not observe anomalies in the diffraction rings of oxygen.

4) See H. H. Mooy, Thesis 1931, Leiden.
W. H. Keesom, J. de Smedt and H. H. Mooy, Comm. Leiden, 209*d*.
J. de Smedt, W. H. Keesom and H. H. Mooy, Comm. Leiden, 202*a*.
L. Vegard, Z.schr. f. Phys., **58**, 497, 1929.

selection rules may be broken at every collision, they also admit however the possibility, that the interaction can be described by the assumption of weakly bound O_4-molecules, but they emphasize, that the bond would have to be weak in comparison with the usual homopolar bonds. This would be in agreement with our values for the equilibrium constant, the dissociation potential being at the utmost of the order of 0,01 Volt, while the usual homopolar bonds give energies of several Volts.

November 1st.
Kamerlingh Onnes-Laboratorium, Leiden.
Nat. Lab. van Teylers Stichting, Haarlem.

KRISTALLSYMMETRIE UND GITTERSCHWINGUNGEN

von A. D. FOKKER

Summary.

The classes of possible vibrations in symmetrical arrangements of atoms are discussed and enumerated. Attention is drawn to the elementary sectors of the structure, which by the symmetric operations are generated one from the other. The motions in all such sectors must be the same, either simultaneous, or with definite phase relations. With respect to an element of symmetry of order 2 the phase difference can be 0 or π: *isophasic* and *antiphasic vibrations*. With higher order of symmetry the phase difference can be 0, $2\pi/3$, $4\pi/3$, or 0, $\frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$, or 0, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, π, $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$. These are *isophasic,* left-handed or right-handed *cyclophasic,* and *pseudo-cyclophasic vibrations.* Left-handed and right-handed cyclophasic vibrations have the same frequency. The consequences of this degeneracy with respect to secondary axes of symmetry are pointed out.

The contributions of atoms, situated in the elements of symmetry, to the different classes of vibrations are indicated.

Herr Brester hat in seiner Arbeit über Kristallsymmetrie und Reststrahlen (Diss. Utrecht) den Einflusz verfolgt, den die Symmetrieen einer Atomanordnung üben auf die Einteilung der möglichen Schwingungsformen und auf ihre schwingende elektrische Momente. Es wäre nicht überflüssig, seiner überwiegend algebraischen Untersuchung, oder Herrn Wigners nur für Gruppentheoretiker zugänglicher Abhandlung über diesen Gegenstand, eine geometrisch-mechanische zur Seite zu stellen, die sich besonders dazu eignen würde, die Einsicht in die Verhältnisse zu klären. Dies soll im Folgenden versucht werden.

Wir wollen vom Satze ausgehen, dasz ein System von N Teilchen, das in einer Gleichgewichtslage beharren kann, eben so vieler fundamentalen unabhängigen Schwingungen fähig ist als es Freiheitsgrade der Bewegung besitzt, d. h. also $3N$, unter denen freilich die drei reinen Translationen und die drei reinen Rotationen als spezielle Schwingungen mit unendlicher Periode mit enthalten sind. Von den Schwingungen wollen wir voraussetzen, dasz sie ungedämpft sind, und ohne Verzerrung beliebig superponierbar, d. h. dasz die Bewegungsgleichungen linear sind und zwar von zweiter Ordnung, so dasz die Bewegungen insgesammt auch umkehrbar sind.

In geometrischer Hinsicht werde vorausgesetzt, dasz es Deckoperationen giebt, die das System in ein identisches überführen. Durch eine Drehung z.B. könnte ein Atom A ein anderes A' ersetzen, A' aber würde dabei A'' ersetzen, und so weiter. Ist die Kette geschlossen, so dasz A^n wieder A ersetzt, so ist die Deckoperation n-ter Ordnung. Bei einer Schraubenachse würde die Kette nicht geschlossen sein. Wenn aber die n-fach ausgeübte Operation einer reinen Translation gleich ist, werden wir sie wieder n-ter Ordnung nennen.

Dem Beispiele von H. A. Lorentz folgend 1) werden wir die Deckoperationen bezeichnen als zwei-, drei-, vier-, und sechszählige Drehachsen, zwei-, vier- und sechszählige Drehinversionsachsen, und ein Symmetriezentrum. Die Operation einer Drehinversionsachse besteht in einer Drehung um einen Winkel π, $\frac{1}{2}\pi$ oder $\frac{1}{3}\pi$, und nachheriger Inversion durch einen Punkt. Die zweizählige Drehinversionsachse kommt einer Spiegelebene senkrecht zur Achse gleich, wenn der Inversionspunkt in der Achse liegt. Liegt der Inversionspunkt ausserhalb der Achse, so hat man eine Spiegelgleitebene. Eine solche zweizählige Drehinversionsachse ist ein Gegenstück zur Schraubenachse. Sie erzeugt in die Breite eine translatorische Periodizität wo die Schraubenachse in die Länge Translationen mit bestimmter Periode erzeugt.

Wir können eines der vorhandenen Atome herausgreifen, und alle andere mittels Deckoperationen mit ihm verknüpfte Atome gleichzeitig aus dem System ausscheiden. Wenn da noch Atome übrig sind, so greifen wir ein zweites heraus, mit sämtlichen äquivalenten, und wir fahren in dieser Weise fort, bis kein Atom mehr übrig ist. Die in dieser Weise als unabhängig erkannten Atome bilden zusammen einen *Elementarsektor*, der durch die Deckoperationen wiederholt wird.

Wir wollen in der Gleichgewichtslage eines solchen unabhängigen

---

1) H. A. Lorentz, Über die Symmetrie der Kristalle, Wissensch. Abhandlungen. Leipzig.

Atomes den Ursprung eines Koordinatenkreuzes x, y, z legen, und festsetzen, dasz wir in den Gleichgewichtslagen der durch die Deckoperationen damit verknüpften Atome entsprechende Koordinatenkreuze x', y', z' ; x'', y'', z''; u.s.w. legen werden, so wie sie durch die Deckoperationen aus x, y, z, entstehen. Die Schwingung eines jeden Atoms wird in dem zu ihm selbst gehörigen Koordinatensystem beschrieben werden.

2. Wir wollen eine Schwingung darstellen durch die Angabe ihrer komplexen Amplituden a_1, a_2, a_3 und meinen damit, dasz die Bewegungen in den einzelnen Koordinatenkreuzen beschrieben werden durch den Ansatz

$$x = \tfrac{1}{2}\left(a_1 e^{2\pi i\nu t} + a_1^* e^{-2\pi i\nu t}\right),$$

$$y = \tfrac{1}{2}\left(a_2 e^{2\pi i\nu t} + a_2^* e^{-2\pi i\nu t}\right),$$

$$z = \tfrac{1}{2}\left(a_3 e^{2\pi i\nu t} + a_3^* e^{-2\pi i\nu t}\right),$$

mit entsprechenden Formeln für die anderen Atome. Indem wir komplexe Amplituden zulassen, werden wir den möglichen Phasendifferenzen zurecht, die auftreten können, so dasz auch elliptische Schwingungen durch den Ansatz dargestellt werden, wenn nicht trivialerweise alle komplexe Amplituden dasselbe Argument haben.

Die Folge der Umkehrbarkeit der Bewegung ist, dasz auch

$$x = \tfrac{1}{2}\left(a_1 e^{-2\pi i\nu t} + a_1^* e^{2\pi i\nu t}\right) = \tfrac{1}{2}\left(a_1^* e^{2\pi i\nu t} + a_1 e^{-2\pi i\nu t}\right), \text{ u.s.w.}$$

eine mögliche Schwingung darstellt. Die Umkehr einer Schwingung, welche durch ihre komplexe Amplituden a_1, a_2, a_3 bestimmt ist, wird also durch die konjugiert komplexen Amplituden a_1^*, a_2^*, a_3^* gegeben.

Indem man eine Schwingung mit der umgekehrten durch Addition superponiert, entstehen lauter reëlle Schwingungsamplituden. Superponiert man durch Subtraktion, so entstehen lauter imaginäre Amplituden. In beiden Fällen bekommt man gradlinige Schwingungen, bei denen alle Teilchen gleichzeitig durch ihre Gleichgewichtslagen gehen, die Schwingungsrichtungen aber sind verschieden. Ist die Schwingung eine elliptische, so ergeben die erwähnten Superponierungen mit der umgekehrten Bewegung Schwingungen entlang zweier konjugierter Durchmesser der Ellipse. Diese zwei Schwingungen haben offenbar eine ganz verschiedene Form. Setzen wir voraus, dasz das System im allgemeinen nicht verschiedene Schwingungen derselben Frequenz aufweist, wenn nicht die Symmetrie eine solche Entartung herbeiführt, so werden bei den fundamentalen Schwingungen alle Teilchen gradlinig und simultan schwingen.

3. Betrachten wir die Systeme mit einer *Deckoperation zweiter Ordnung*, entweder mit einem Inversionszentrum, einer zweizähligen Symmetrieachse, oder mit einer zweizähligen Drehinversionsachse, welche einer Symmetrie-ebene gleichkommt. Zu jedem Atom mit seinem Koordinatachsen x, y, z gibt es ein mit ihm durch die Symmetrie verknüpftes mit entsprechenden Achsen ξ, η, ζ.

Es sei eine Schwingung gegeben durch die Amplituden a_1, a_2, a_3, bzw. α_1, α_2, α_3, u.s.w., der entsprechenden Atome. Wenn wir auf das schwingende System die Deckoperation anwenden, so werden wir finden dasz das erste Atom in dem Achsenkreuz der ξ, η, ζ, mit denselben Amplituden a_1, a_2, a_3 schwingt als vorher in seinem eigenen, während das zweite Atom mit den Amplituden α_1, α_2, α_3, im Achsenkreuz der x, y, z schwingt.

Offenbar wird die Schwingung, die wir hier vor uns sehen, auch von dem System in der ursprünglichen Lage ausgeführt werden können, indem das erste Atom mit α_1, α_2, α_3 in x, y, z und das zweite Atom mit a_1, a_2, a_3 in ξ, η, ζ, schwingt.

Wenn a_1 und α_1, a_2 und α_2, a_3 und α_3, beliebig verschieden sein könnten, so könnte man durch Superposition zwei verschiedene Schwingungen darstellen. In der ersten würde das erste Atom mit den Amplituden $(a_1 + \alpha_1)$, $(a_2 + \alpha_2)$, $(a_3 + \alpha_3)$, schwingen, und sein Symmetriepartner mit den gleichen Amplituden $(\alpha_1 + a_1)$, $(\alpha_2 + a_2)$, $(\alpha_3 + a_3)$. In der zweiten Schwingung würde das erste Atom die Amplituden $(a_1 - \alpha_1)$, $(a_2 - \alpha_2)$, $(a_3 - \alpha_3)$ zeigen, das zweite aber die entgegengesetzt gleichen $(\alpha_1 - a_1)$, $(\alpha_2 - a_2)$, $(\alpha_3 - a_3)$. Wenn aber nicht zufälligerweise zwei verschiedene Schwingungen dieselbe Frequenz haben, kann im Allgemeinen mit einer bestimmten Frequenz nur eine von den beiden existieren.

In den fundamentalen Schwingungen soll also entweder $a_1 = \alpha_1$, $a_2 = \alpha_2$, $a_3 = \alpha_3$, oder $a_1 = -\alpha_1$, $a_2 = -\alpha_2$, $a_3 = -\alpha_3$ sein.

Indem wir das System in zwei Sektoren verteilen, derart dasz die Symmetrieoperation den einen Sektor in den zweiten überführt, können wir also den Satz aussprechen, dasz *in den Fundamentalschwingungen* von Systemen mit einer Deckoperation zweiter Ordnung *die entsprechenden Teilchen in den zwei Sektoren entweder die gleiche, oder die entgegengesetzt-gleiche Schwingung ausführen.* Die $3 \, . \, 2n$ Schwingungsgrade der $2n$ Teilchen zerfallen somit in zwei Gruppen: die *isophasige* und die *antiphasige.* Jede Gruppe enthält $3n$ unabhängige Schwingungen.

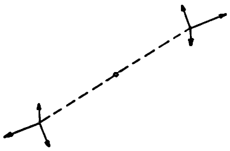
Bei den Systemen mit *Symmetriezentrum* (Fig. 1) gehören die drei Translationen zu den antiphasigen, die drei Rotationen zu den isophasigen Bewegungen. Die $(3n - 3)$ isophasigen Schwingungen können kein elektrisches Moment aufweisen. Dieses gehört zu den $(3n - 3)$ antiphasigen Schwingungen.

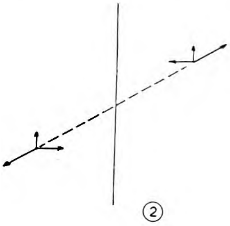
Bei den Systemen mit *zweizähliger Drehachse* (Fig. 2) gehört die Translation parallel zur Achse und die Rotation um die Achse zu den isophasigen, die anderen Translationen und Rotationen zu den antiphasigen Bewegungen. Elektrische Momente parallel der Achse findet man bei den $(3n - 2)$ isophasigen, senkrecht zur Achse bei den $(3n - 4)$ antiphasigen Schwingungen.

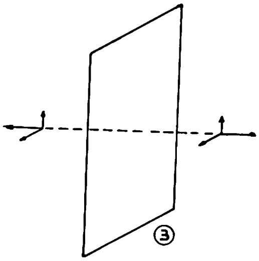
Bei den Systemen mit *zweizähliger Drehinversionsachse* (Fig. 3) oder mit einer *Symmetrie-ebene* gehören die zwei Translationen parallel der Ebene, und die Rotation um eine zur Ebene senkrechten Achse, zu den isophasigen Bewegungen. Elektrisches Moment parallel zur Ebene wird man bei den isophasigen Schwingungen finden können, ein Moment senkrecht zur Achse nur bei den antiphasigen Schwingungen.

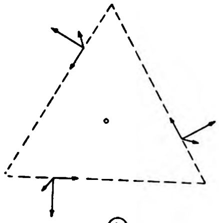
4. Wenn in einem System mit *dreizähliger Achse* (Fig. 4) eine Schwingung vorliegt, wo von drei homologen Teilchen das erste in x, y, z die Amplituden a_1, a_2, a_3 hat, das zweite b_1, b_2, b_3 in x', y', z', und das dritte c_1, c_2, c_3 in x'', y'', z'', so findet man durch die Symmetrieoperation eine andere Schwingung, wobei das erste in x', y', z' die Amplituden a_1, a_2, a_3 hat; das zweite hat in x'', y'', z'' dabei b_1, b_2, b_3, das dritte aber in x, y, z hat c_1, c_2, c_3. Hieraus folgt dasz es auch eine Schwingung giebt, wo die Teilchen in ihren eigenen ursprünglichen Koordinaten die Amplituden haben c_1, c_2, c_3, bzw. a_1, a_2, a_3, bzw. b_1, b_2, b_3. Desgleichen findet man durch Wiederholung der Betrachtung eine dritte Schwingung mit b_1, b_2, b_3, bzw.

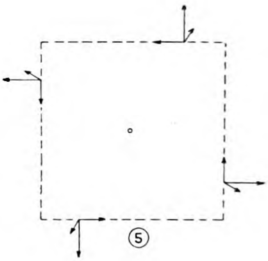
Die einfachen Symmetrie-elemente und die erzeugten Bezugsachsen. Die vom Mittelpunkt weggerichteten Achsen sind nach oben zu denken, die zum Mittelpunkt hingerichteten nach unten. Die kleinere von zwei gleichförmigen Figuren ist auf tieferem Niveau kongruent zur grösseren zu denken.

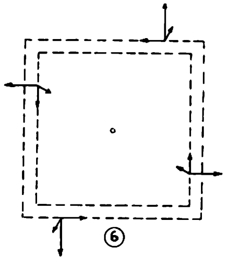

①

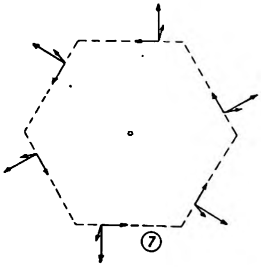

②


③


④


⑤


⑥


⑦

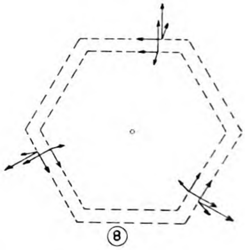

⑧

Fig. 1. Symmetriezentrum.
Fig. 2. Zweizählige Drehachse.
Fig. 3. Zweizählige Drehinversionsachse (Spiegelebene).
Fig. 4. Dreizählige Achse.
Fig. 5. Vierzählige Drehachse.
Fig. 6. Vierzählige Drehinversionsachse.
Fig. 7. Sechszählige Drehachse.
Fig. 8. Sechszählige Drehinversionsachse, (dreizählige Achse mit Spiegelebene).

c_1, c_2, c_3, bzw. a_1, a_2, a_3. Eine weitere Anwendung der Symmetrieoperation würde die Schwingung in ihrer ursprünglichen Form zurückführen.

Wir vermuten dasz es Schwingungen gibt, aus denen in dieser Weise jedesmal identisch dieselbe erzeugt wird, und andere, die bis auf einen Faktor identisch wiederkehren. Die dritte Potenz dieses Faktors aber würde die Einheit sein müszen. Wir bestätigen dies durch tatsächliche Bildung solcher Schwingungen.

Im Folgenden werden wir die Beschreibung dieser Schwingungen kürzen und angeben nur durch die Amplituden der x; bzw. x'- und x''-Komponenten.

In drei Weisen können wir die obigen Schwingungen superponieren, indem wir die Wurzeln der Einheit 1, $e^{2\pi i/3}$ und $e^{-2\pi i/3}$ zur Multiplizierung der Amplituden benutzen. Eine solche Multiplizierung bedeutet eine Verschiebung der Phase um 0, oder $\pm\, 2\pi/3$. Wir könnten damit drei Schwingungen bekommen:

Erstens: $a_1 + c_1 + b_1$, $\quad b_1 + a_1 + c_1$, $\quad c_1 + b_1 + a_1$.

Zweitens: $a_1 + e^{4\pi i/3}\, c_1 + e^{2\pi i/3}\, b_1$, $\quad b_1 + e^{4\pi i/3}\, a_1 + e^{2\pi i/3}\, c_1$,
$c_1 + e^{4\pi i/3}\, b_1 + e^{2\pi i/3}\, a_1$.

Drittens: $a_1 + e^{-4\pi i/3}\, c_1 + e^{-2\pi i/3}\, b_1$, $\quad b_1 + e^{-4\pi i/3}\, a_1 + e^{-2\pi i/3}\, c_1$,
$c_1 + e^{-4\pi i/3}\, b_1 + e^{-2\pi i/3}\, a_1$.

In der ersten Bewegung schwingen die drei Sektoren alle mit gleicher Amplitude und gleicher Phase. In der zweiten Bewegung eilt der erste Sektor gegen den zweiten um $2\pi/3$ vor, so wie der zweite um $2\pi/3$ gegen den dritten voreilt. Bei der dritten Bewegung haben sich die genannten Voreilungen in Nacheilungen verwandelt.

Bei der dreizähligen Achse wird man in dieser Weise *drei Schwingungsformen* haben können: wir benennen dieselben als *eine isophasige*, und *zwei cyclophasige* Formen, mit linksdrehender und rechtsdrehender Phasenfolge.

Als karakteristisches Merkmal finden wir, dasz für die isophasigen Schwingungen die Amplituden entsprechender Atome gleich sind, während bei den cyclophasigen Schwingungen die Summe der Amplituden entsprechender Atome null ist.

Hierzu kann man noch bemerken, dasz durch Umkehr der Bewegung aus einer linksdrehenden cyclophasigen Schwingung eine rechtsdrehende cyclophasige Schwingung gleicher Frequenz entsteht. Es handelt sich also um *Doppelschwingungen* und um eine von der Symmetrie herbeigeführte Entartung.

Die genannte Beziehung zwischen den Amplituden entsprechender Atome wird bei Superpositionen von links- und rechtsdrehenden cyclophasigen Schwingungen im beliebigen Stärkeverhältnisz immer behalten. Aus einer linksdrehenden cyclophasigen Schwingung und der durch ihre Umkehr entstehenden rechtsdrehenden kan man lineare simultane Schwingungen zusammenstellen, immer mit $a_i + b_i + c_i = 0$, u.s.w. Gemäsz der Symmetrie giebt es zu jeder solchen linearen Schwingung noch zwei andere, im Raum um $2\pi/3$ und $4\pi/3$ gedrehte. Zu drei stellen diese aber nicht mehr als eine Doppelschwingung dar, weil aus zwei von ihnen die dritte durch Superposition zusammenzustellen ist.

Für die $3n$ Teilchen wird man unter den $9n$ Schwingungen haben $3n$ isophasige, $3n$ linksdrehende und $3n$ rechtsdrehende cyclophasige, die paarweise als Doppelschwingungen zusammengehören.

Die Translation parallel zur Achse findet man unter den isophasigen Schwingungen, die Translationen senkrecht zur Achse unter den cyclophasigen Schwingungen verzeichnet. Die Rotationen um die Symmetrieachse, bzw. Achsen senkrecht dazu findet man gleichfalls unter den gleichphasigen, bzw. cyclophasigen Schwingungen.

Elektrisches Moment parallel zur Achse können nur die isophasigen Schwingungen haben. Die cyclophasigen Schwingungen können elektrisches Moment senkrecht zur Achse haben, und zwar wird man bei einer reinen cyclophasigen Schwingung ein kreisförmig drehendes resultierendes Moment haben.

5. Für die Systeme mit *vierzähliger Symmetrieachse* hat man vier Sektoren aequivalenter Teilchen. Eine ähnliche Betrachtung wie die vorige führt zu den Schlusz, dasz man vier Schwingungsgruppen hat: eine *isophasige*, und drei cyclophasige, welche zwischen benachbarten Sektoren, die alle die gleiche Schwingungsform zeigen, Phasendifferenzen $\frac{1}{2}\pi$, π oder $\frac{3}{2}\pi$ aufweisen.

Ist eine cyclophasige Schwingung mit Phasendifferenz $\frac{1}{2}\pi$ rechtsdrehend, so ist eine entsprechende cyclophasige mit Phasendifferenz $\frac{3}{2}\pi$ eine linksdrehende Schwingung. Rechtsdrehende und linksdrehende Schwingungen können durch Bewegungsumkehr aus einander hervorgehen. Es handelt sich also um Doppelschwingungen. Merkmal dieser *reinen cyclophasigen Schwingungen,* auch wenn rechts- und links-cyclophasige superponiert sind, ist dasz die Summen der Amplituden zweier diametraler Atome null sind. In dieser Hinsicht sind die reinen vierzählig-cyclophasigen Schwingungen immer zweizählig-antiphasig.

Die Phasendifferenz π liefert eine Schwingungsform für sich, ohne Drehsinn, eigentlich nur *pseudo-cyclophasig,* man könnte sagen *vierzählig-antiphasig* und *zweizählig-isophasig.*

Es sei erstens die *vierzählige Achse* eine gewöhnliche *Drehachse* (Fig. 5). Die Translation parallel zur Achse gehört in diesem Fall zu den gleichphasigen Schwingungen, unter denen auch die Drehung um die Symmetrieachse enthalten ist. Die Translationen senkrecht zur Achse findet man unter die reinen cyclophasigen Doppelschwingungen. Diese umfassen auch die Rotationen um Achsen senkrecht zur Symmetrie-achse.

Elektrisches Moment parallel zur Achse können nur die isophasigen Schwingungen haben. Elektrisches Moment senkrecht zur Achse, und zwar kreisförmig drehendes Moment, haben die reinen cyclophasigen Doppelschwingungen. Die pseudocyclophasige Schwingung mit Phasendifferenz π hat kein elektrisches Moment.

Es sei zweitens die *vierzählige Achse* eine *Drehinversionsachse* oder eine *Drehspiegelachse* (Fig. 6), dasz heiszt die Deckoperation besteht in einer Drehung um den Winkel $\frac{1}{2}\pi$ sammt einer Inversion durch einen Punkt der Achse, oder sammt einer Spiegelung in einer Ebene senkrecht zur Drehungsachse.

Wohl wird man die Rotation um die Achse noch unter den isophasigen Schwingungen finden, nicht aber die Translation parallel zur Achse. Diese findet man hier bei den pseudocyclophasigen Schwingungen mit Phasendifferenz π. Translationen senkrecht zur Achse und Rotationen um Achsen senkrecht zur Symmetrieachse gehören hier wieder zu den reinen cyclophasigen Doppelschwingungen.

Elektrisches Moment parallel zur Achse gehört zu den pseudocyclophasigen Schwingungen. Drehendes elektrisches Moment senkrecht zur Achse haben die drehenden cyclophasigen Schwingungen.

6. Ähnliche Verhältnisse findet man bei den Systemen mit *sechszähliger Symmetrieachse*. Es giebt sechs Sektoren, mit $6n$ Teilchen und $3 \cdot 6n$ Schwingungsgrade, die in zwei einfachen und zwei doppelten Gruppen zerfallen.

Eine Gruppe umfaszt die $3n$ *isophasigen Schwingungen.*

Eine zweite Gruppe bildet die *reinen sechszählig-cyclophasigen Schwingungen* mit Phasendifferenzen $\frac{1}{3}\pi$ und $\frac{5}{3}\pi$, rechts- und linksdrehende Doppelschwingungen. Merkmal dieser $3n$ Doppelschwingungen ist dasz zwei diametrale Atome entgegengesetzt gleiche Amplituden haben, und das die Summe der Amplituden von drei aequivalenten nicht benachbarten Atomen null ist.

Eine dritte Gruppe bilden die $3n$ *cyclophasigen* Doppelschwingungen mit Phasendifferenzen $\frac{2}{3}\pi$ und $\frac{4}{3}\pi$. Insoweit die sechszählige Achse auch zwei- und dreizählig ist, sind diese Schwingungen *zweizählig-isophasig*, und *dreizählig-cyclophasig*. Die Amplitudensumme von je drei benachbarten Atomen ist null.

Die vierte pseudo-cyclophasige Gruppe mit Phasendifferenzen π endlich ist *sechszählig-antiphasig*, *zweizählig-antiphasig* und *dreizählig-isophasig.*

Die sechszählige Achse kann einfache *Drehachse* sein (Fig. 7). Hier findet man die Translation parallel zur Achse, und die Rotation um die Achse unter den isophasigen Schwingungen. Diese haben auch elektrisches Moment parallel zur Achse. Die Translationen senkrecht zur Achse und die Rotationen um zur Symmetrieachse senkrechte Achsen gehören zu den reinen cyclophasigen Schwingungsgruppen. Diese haben elektrisches Moment senkrecht zur Achse.

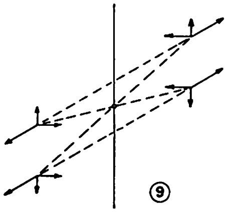
Wenn die Achse eine *sechszählige Drehinversionsachse* ist (Fig. 8) so findet man die Translation parallel zur Achse nicht unter den isophasigen Schwingungen, sondern in der vierten Gruppe der pseudo-cyclophasigen. Die Rotation um die Achse bleibt zu den isophasigen Schwingungen gehören. Die übrigen Translationen und Rotationen gehören in die zweite Gruppe der reinen cyclophasigen Schwingungen.

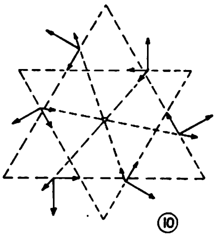
7. Betrachten wir ein zu den erörterten Symmetrieen *hinzutretendes Symmetriezentrum* (Fig. 9, 10, 11, 12). Die Anzahl der aequivalenten Sektoren und Atome wird verdoppelt, und damit die Anzahl der möglichen Schwingungen, und zwar in solcher

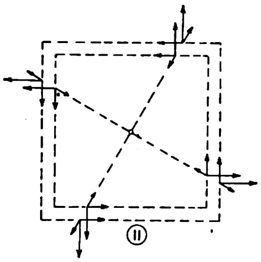
Weise, dasz jede Schwingungsgruppe sich spaltet, nach der Unterscheidung, ob die Schwingung in zentrisch symmetrisch gegenübergestellten Sektoren gleich oder entgegengesetzt gleich verläuft. Die Rotationen werden immer zentrisch-isophasig sein, die Translationen zentrisch-antiphasig. Elektrische Momente findet man bei den Schwingungsgruppen, zu denen die Translationen gehören.

Wir brauchen die verschiedenen Fälle nicht gesondert aufzuzählen und zu behandeln. Die sechszählige Drehspiegelachse gehört hierher, als kombination von dreizähliger Achse und Zentrum.

Die Kombinationen der einfachen Symmetrie-elemente mit Symmetriezentrum.







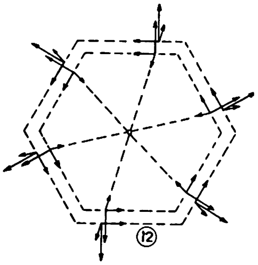


Fig. 9. Zweizählige Achse und Zentrum.

Fig. 10. Dreizählige Achse und Zentrum, (Sechszählige Drehspiegelachse).

Fig. 11. Vierzählige Achse mit Zentrum.

Fig. 12. Sechszählige Achse mit Zentrum.

8. *Zwei* zu einander *senkrechte zweizählige Achsen* bedingen noch eine dritte, zu beiden vorigen senkrechte und ebenfalls zweizählige Achse. Die $4n$ Atome liegen in 4 aequivalenten Sektoren, und ihre Schwingungen lassen sich in 4 Gruppen von je $3n$ Schwingungen ordnen, die in Bezug zu jeder der beiden primären Achsen isophasig oder antiphasig sind. Wir können die Gruppen iso-isophasig, iso-

antiphasig, anti-isophasig und anti-antiphasig nennen. Die entsprechenden Amplituden für die Atome 1, 2, 3, 4 von denen (12), (34) durch die erste, dagegen (13), (24) durch die zweite Achse verknüpft sind, wären dabei

$a, \quad a, \quad a, \quad a,$ (iso-isophasig),
$a, \quad a, \quad -a, \quad -a,$ (iso-antiphasig),
$a, \quad -a, \quad a, \quad -a,$ (anti-isophasig),
$a, \quad -a, \quad -a, \quad a,$ (anti-antiphasig).

Eine Schwingung ist entweder zu den drei Achsen isophasig, oder zu einer, wie man sich aus einer Figur, oder aus dem angeführten Amplitudenschema klar macht.

Wir wollen die zwei primären Achsen als allgemeine X- und Y-achse wählen. Die abgeleitete dritte Achse zeige in die Z-Richtung.

Wenn die *zwei* Achsen *Drehachsen* sind (Fig. 13), so ist auch die dritte eine Drehachse. Die Translation in die X-Richtung und die Rotation um die X-Achse gehören zu den iso-antiphasigen Schwingungen. Translation in Y-Richtung und Rotation um die Y-Achse sind anti-isophasig. Die dritte Translation und Rotation sind anti-antiphasig. In den genannten Gruppen findet man elektrische Momente bzw. in der X-, Y- und Z-Richtung.

Wenn die *zwei Achsen Drehinversionsachsen* sind, so schneiden sich zwei Spiegelebenen in die Z-Achse. Die Translation in die X-Richtung ist hier anti-isophasig, die Rotation um die X-Achse iso-antiphasig. Die Translation in die Y-Richtung ist iso-antiphasig, die Rotation um die Y-Achse bleibt anti-isophasig. Die Translation in die Z-Richtung ist iso-isophasig, die dritte Rotation bleibt anti-antiphasig. Elektrische Momente in den drei Hauptrichtungen findet man bei den Schwingungen, zu denen die betreffenden Translationen gehören.

9. Die Behandlung der Kombination einer *dreizähligen* Achse mit einer *zweizähligen Achse senkrecht dazu* fordert einige Sorgfalt. Es kommen noch zwei weitere zweizählige Achsen hinzu und das System wird von ihnen in sechs Sektoren geordnet (Fig. 15 und 16). Wir legen in ein Atom ein Koordinatenkreuz x_1, y_1, z_1, und die dreizählige Achse verpflanzt das Kreuz, nach links drehend, in x_2, y_2, z_2 und x_3, y_3, z_3. Die Wirkung der ersten zweizähligen Achse

Die Kombinationen von Hauptachse und Nebenachsen.

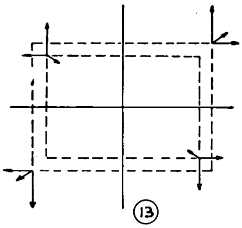
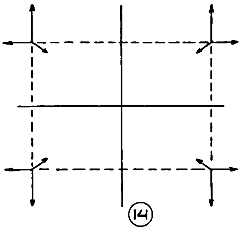

⑬

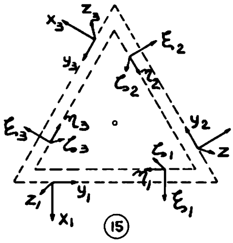
Fig. 13. Drei zweizählige Drehachsen.

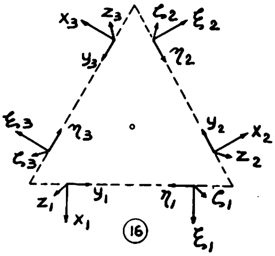
Fig. 14. Eine zweizählige Drehachse und zwei zweizählige Drehinversionsachsen, (zwei senkrechte Spiegelebenen).

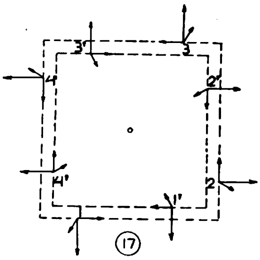
Fig. 15. Dreizählige Hauptdrehachse mit drei zweizähligen Nebendrehachsen.

Fig. 16. Dreizählige Hauptdrehachse mit drei zweizähligen Nebendrehinversionsachsen (Spiegelebenen).

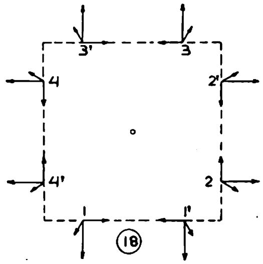

⑭


x3
z3
y3
ξ2
ζ2
η2
ξ3
η3
ζ3
y2
x2
z2
ζ1
η1
z1
y1
x1
ξ1
⑮

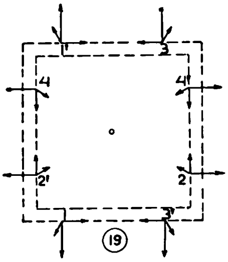

x3
z3
ζ2
ξ2
y3
η2
ξ3
η3
ζ3
y2
x2
z2
z1
y1
x1
η1
ζ1
ξ1
⑯



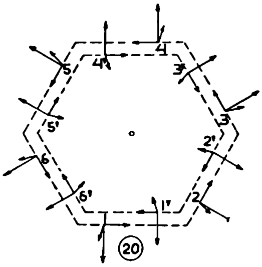
⑰

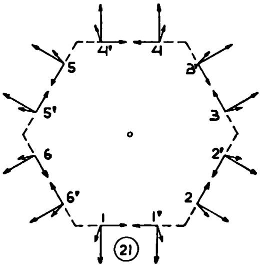


⑱



⑲


4
5'
4'
3'
3
5'
2'
6
6'
1'
2
⑳


4'
4
5
3'
5'
3
6
2'
6'
2
1
1'
㉑

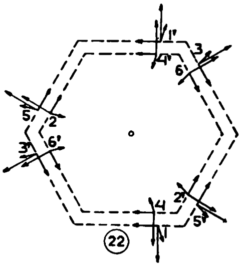

1'
3
4'
6
5
2
3'
6'
4
2'
5'
1
㉒

Fig. 17. Vierzählige Drehachse mit zwei Paaren von zweizähligen Nebendrehachsen.

Fig. 18. Vierzählige Drehachse mit zwei Paaren von Spiegelebenen.

Fig. 19. Vierzählige Drehinversionsachse mit einem Paar Nebendrehachsen und einem Paar Spiegelebenen.

Fig. 20. Sechszählige Drehachse mit zwei Tripeln von Nebendrehachsen.

Fig. 21. Sechszählige Drehachse mit zwei Tripeln von Spiegelebenen.

Fig. 22. Sechszählige Drehinversionsachse mit drei Nebendrehachsen und drei Spiegelebenen (die Drehachsen enthaltend).

erzeuge aus x_1, y_1, z_1 das Kreuz ξ_1, η_1, ζ_1. Dieses werde durch die linksdrehende Achse verpflanzt in ξ_2, η_2, ζ_2 und ξ_3, η_3, ξ_3. Es sind jetzt ξ_3, η_3, ζ_3 und x_2, y_2 z_2 durch dieselbe zweizählige Achse verbunden wie x_1, y_1, z_1 und ξ_1, η_1, ζ_1. Ebenso ξ_2, η_2, ζ_2 und x_3, y_3, z_3. Hingegen gehen ξ_2, η_2, ζ_2 und x_2, y_2, z_2 aus einander hervor durch die Wirkung der zweiten Nebenachse; ξ_3, η_3, ζ_3 und x_3, y_3, z_3 sind durch die dritte Nebenachse verbunden.

Nach dem oben (§ 4) Gesagten werden die $6n$ Teilchen, um eine dreizählige Symmetrieachse angeordnet, $6n$ dreizählig isophasigen Schwingungen aufweisen. Diese können nach § 3 mit Bezug zu einer Nebenachse isophasig sein oder antiphasig, also wird diese Schwingungsgruppe in eine zweizählig-isophasige und eine zweizählig-antiphasige zufallen, und diese Teilgruppen werden je $3n$ Schwingungen umfassen.

Weiter werden für die $6n$ Teilchen noch $6n$ rechts- und links-cyclophasige Doppelschwingungen bestehen, und es fragt sich nach dem Einflusz der Nebenachsen. Betrachten wir eine reine cyclophasige Schwingung, so wird wohl durch die Wirkung einer Nebenachse daraus wieder eine reine cyclophasige Schwingung entstehen, die Phasenfolge im Kreisumlauf aber wird umgekehrt sein weil ja die Folge x_1, x_2, x_3 übergeführt wird in ξ_1, ξ_3, ξ_2, und dabei eine linksdrehende Phasenfolge sich in eine rechtsdrehende verwandelt. Es stellt sich also heraus, dasz die Schwingung nicht zugleich dreizählig-cyclophasig und zweizählig-iso- oder antiphasig sein kann. Wohl giebt es Schwingungen, die zweizählig-isophasig sind, diese aber können nur durch Superposition von links- und rechts-cyclophasigen Schwingungen zustande kommen, die ja gleiche Frequenz haben. Es ist dieselbe Entartung zwischen rechts- und links-cyclophasigen Schwingungen, welche bewirkt, dasz auch die hieher gehörigen zweizählig-iso- und antiphasigen Schwingungen zu Doppelschwingungen entartet sind.

Wir beschreiben abkürzend eine Schwingung durch Angabe der komplexen Amplituden von x_1, x_2, x_3 bzw. ξ_1, ξ_2, ξ_3. Für eine mit Bezug zur ersten Nebenachse zweizählig-isophasige Schwingung lauten diese

$$a, \quad b, \quad c,$$

$$a, \quad c, \quad b,$$

weil die Nebenachse x_1 in ξ_1 überführt, x_2 in ξ_3, und x_3 in ξ_2. Gehört diese Schwingung zu der cyclophasigen Gruppe, so ist

$$a + b + c = 0.$$

Aus der dreizähligen Achse können wir die möglichkeit folgern einer Schwingung mit den Amplituden

$$\begin{matrix} 2c, & 2a, & 2b \\ 2b, & 2a, & 2c. \end{matrix}$$

Wenn wir diese auf der vorigen superponieren, so finden wir eine Schwingung, die, wegen $a + b + c = 0$, sich schreiben läszt:

$$\begin{matrix} c - b, & a - c, & b - a, \\ b - c, & a - b, & c - a, \end{matrix}$$

und diese ist, wie wir erkennen, mit Bezug auf der ersten Nebenachse *anti*phasig!

In denselben Doppelschwingungen, in welchen die links- und die rechts-cyclophasigen Schwingungen gepaart erscheinen, sind also auch die in Bezug auf die Nebenachsen iso- und antiphasigen Schwingungen gepaart.

10. Die *Nebenachse* kann eine *Drehachse* sein, oder aber sie kann auch eine *Drehinversionsachse* sein, d.h. es kann eine Spiegelebene durch die dreizählige Hauptachse hindurch gehen.

In beiden Fällen hat man, für die $6n$ Teilchen:

1. eine Gruppe von $3n$ einfachen, *dreizählig-isophasig und zweizählig-isophasigen* Schwingungen,
2. eine Gruppe von $3n$ einfachen, *dreizählig-isophasig und zweizählig-antiphasigen* Schwingungen
3. eine Gruppe von $6n$ Doppelschwingungen, dreizählig *links- und rechts-cyclophasig,* zweizählig iso- und antiphasig.

Die Translation parallel zur Hauptachse gehört zur zweiten, oder zur ersten Gruppe, je nachdem die Nebenachse eine Dreh- oder eine Inversionsachse ist. Die Rotation um die Hauptachse gehört in beiden Fallen zu der zweiten Gruppe. Elektrische Momente parallel zur Hauptachse findet man in der Gruppe, zu der auch die Translation in derselben Richtung gehört. Die Translationen senkrecht zur Achse, und die Möglichkeit elektrischer Momente in diesen Richtungen, findet man unter den Doppelschwingungen. Man kan die beiden Translationen als eine Doppelschwingung auffassen. Auch die Rotationen um Achsen senkrecht zur Hauptachse gehören zu der Gruppe der Doppelschwingungen.

Eine Rotation um eine Nebenachse ist zu dieser Achse isophasig, antiphasig zur Nebenachse ist die zweite Rotation um eine zur vorigen und zur Hauptachse senkrechten Achse.

11. Die Kombination einer *vierzähligen Hauptachse* mit einer *zweizähligen Nebenachse* (Fig. 17, 18, 19) giebt durch symmetrische Wiederholung einmal eine zweite Nebenachse gleicher Art, sodann durch Zusammenwirken noch zwei Nebenachsen anderer Art. Wir nennen die vierzählig aequivalente. Teilchen 1, 2, 3, 4, und 1′, 2′, 3′, 4′, wobei die erste Nebenachse eine Zuordnung macht von 1, 2, 3, 4 zu 1′, 4′, 3′, 2′; die zweite Nebenachse gleicher Art eine Zuordnung von 1, 2, 3, 4 zu 3′, 2′, 1′, 4′. Die eine Nebenachse anderer Art macht eine Zuordnung von 1, 2, 3, 4 zu 2′, 1′, 4′, 3′. Es giebt schlieszlich eine vierte symmetrische Zuordnung von 1, 2, 3, 4 zu 4′, 3′, 2′, 1′. Es sind $8n$ Teilchen vorhanden. Nach § 5 giebt es für diese $6n$ in Bezug auf der vierzähligen Achse isophasigen Schwingungen. Diese können zu den Nebenachsen sowohl iso- als antiphasig sein.

Für die $6n$ Doppelschwingungen der seinen cyclophasigen Gruppe trifft dies nicht zu. Es finden dieselben Erwägungen Platz als bei der dreizähligen Hauptachse. Die Wirkung einer Nebenachse würde aus einer rechts-drehenden Schwingung eine linksdrehende machen. Eine zu einer Nebenachse isophasige Schwingung bildet mit einer antiphasigen zusammen eine Doppelschwingung. Es sei z.B. eine aus reinen cyclophasigen gebildete Schwingung dargestellt durch folgende Angabe von entsprechenden Amplituden der Teilchen 1, 2, 3, 4, 1′, 2′, 3′, 4′:

$$\begin{array}{cccc} a, & b, & -a, & -b, \\ a, & -b, & -a, & b. \end{array}$$

Gemäsz § 5 sind die Amplituden van 1 und 3, von 2 und 4, u.s.w. entgegengesetzt gleich. Die dargestellte Schwingung ist isophasig mit Bezug auf die erste Nebenachse, welcke 1, 2, 3, 4 überführt in 1′, 4′, 3′, 2′. Durch Ausübung der vierzähligen Symmetrie bekommen wir hieraus eine Schwingung

$$\begin{array}{cccc} b, & -a, & -b, & a, \\ -b, & -a, & b, & a. \end{array}$$

Diese Schwingung aber ist antiphasig mit Bezug auf die genannte Nebenachse. Superponieren wir beide, so bekommen wir

$$\begin{array}{llll} a+b, & b-a & -(a+b), & a-b, \\ a-b, & -(a+b) & b-a, & a+b. \end{array}$$

Diese Schwingung wieder ist isophasig mit Bezug auf die Nebenachse anderer Art welche 1, 2, 3, 4 überführt in 4′, 3′, 2′, 1′, antiphasig aber zur zweiten Nebenachse dieser Art, welche 1, 2, 3, 4 überführt in 2′, 1′, 4′, 3′.

Die Doppelschwingungen werden also durch die Anwesenheit der Nebenachsen nicht weiter unterschieden.

Die $6n$ vierzählig-antiphasigen (Phasendifferenz π), um die Hauptachse zweizählig-isophasigen Schwingungen aber zeigen keine eigentliche Phasendrehung. In Abwesenheit der Nebenachsen würde eine solche Schwingung dargestellt durch

$$\begin{array}{llll} a, & -a, & a, & -a, \\ b, & -b, & b, & -b. \end{array}$$

Wenn $a = b$ ist, so sind die Schwingungen mit Bezug zu beiden Nebenachsen erster Art isophasig, mit Bezug zu beiden Nebenachsen zweiter Art antiphasig. Wen $a = -b$ ist, so werden diese Verhältnisse umgetauscht.

12. Für die $8n$ Teilchen mit *vierzähliger Hauptachse und Nebenachsen* verteilen die $24n$ Schwingungen sich also in folgende Gruppen:

I. $3n$ einfache *vollkommen isophasige* Schwingungen,

II. $3n$ einfache *vierzählig-isophasige, zweizählig-antiphasige* Schwingungen,

III. $6n$ Doppelschwingungen, entweder *rein rechts- und links-cyclophasig,* oder zu den Nebenachsen beider Arten iso- und anti-phasig.

IV. $3n$ einfache *vierzählig-antiphasige,* zu den Nebenachsen erster Art *isophasige,* zu den Nebenachsen anderer Art *antiphasige* Schwingungen,

V. $3n$ von ebensolchen Schwingungen, mit Vertauschung der Iso- und Antiphasigkeit zu den Nebenachsen.

Wenn *die Hauptachse und die Nebenachsen Drehachsen* sind (Fig. 17), so findet man die Translation parallel zur Hauptachse, und die Rotation um die Hauptachse unter den Schwingungen II, welche allein elektrische Momente parallel zur Hauptachse haben können. Die übrigen Translationen und Rotationen findet man unter den Doppelschwingungen III, die auch elektrische Momente senkrecht zur Hauptachse haben können. Die Schwingungen IV und V haben keinerlei elektrisches Moment.

Wenn die *Hauptachse Drehachse*, die *Nebenachsen aber Drehinversionsachsen* sind, daher $2 + 2$ Spiegelebenen durch die Hauptachse gehen (Fig. 18), so werden nur die Translation parallel zur Hauptachse, und die Möglichkeit elektrischer Momente in dieser Richtung von den Schwingungen II nach den Schwingungen I versetzt.

Wenn die Hauptachse eine *vierzählige Drehinversionsachse* ist, so sind *zwei der Nebenachsen Drehachsen*, die *beiden anderen Drehinversionsachsen* (Fig. 19). Jetzt findet man die Translation parallel zur Hauptachse, und die elektrische Momente in dieser Richtung bei den Schwingungen V, vierzählig-antiphasig, spiegel-iso- und zweizählig-antiphasig, wenn man die Nebenachsen erster Art mit den Drehachsen identifiziert. Die Rotation um die Hauptachse gehört zu II, wie vorher.

13. Bei einer *sechszähligen Hauptachse* (Fig. 20, 21, 22) können wir zwei Tripeln von einander abwechselnden *zweizähligen Achsen* verschiedener Art haben. Die eine Tripel Nebenachsen führt den Sechserkranz 1, 2, 3, 4, 5, 6 über in

1, 2, 3, 4, 5, 6 ; 1, 2, 3, 4, 5, 6 ; 1, 2, 3, 4, 5, 6 ;
1′, 6′, 5′, 4′, 3′, 2′; bzw. 3′, 2′, 1′, 6′, 5′, 4′; bzw. 5′, 4′, 3′, 2′, 1′, 6′;

die zweite Tripel führt ihn über in

1, 2, 3, 4, 5, 6 ; 1, 2, 3, 4, 5, 6 ; 1, 2, 3, 4, 5, 6 ;
2′, 1′, 6′, 5′, 4′, 3′; 4′, 3′, 2′, 1′, 6′, 5′; 6′, 5′, 4′, 3′, 2′, 1′.

Die nötigen Betrachtungen sind den vorigen weitgehend analog. Wir geben sofort die Schluszfolgerung. Die $3 \, . \, 12n$ Schwingungen ordnen sich in folgende Gruppen:

I. $3n$ einfache *vollkommen isophasige* Schwingungen,

II. $3n$ einfache *sechszählig-isophasige, zweizählig-antiphasige* Schwingungen,

III. $6n$ Doppelschwingungen, entweder *rein rechts- und links-cyclophasig* (mit Phasendifferenz $\pi/3$ bzw. $5\pi/3$), oder zu den Nebenachsen beider Art iso- und antiphasig. Ein Beispiel hierzu giebt eine Schwingung mit Amplitudensystem (vgl. § 6):

$$a,\quad -c,\quad b,\quad -a,\quad c,\quad -b,$$
$$a,\quad -b,\quad c,\quad -a,\quad b,\quad -c.$$

Wenn $a+b+c=0$, gehört sie zu den cyclophasigen. Sie ist isophasig mit Bezug auf die erste Nebenachse der ersten oben genannten Tripel, antiphasig mit Bezug auf die zweite Nebenachse der zweiten Tripel, welche zur vorigen senkrecht steht. Wenn man die Schwingung um $\pi/3$ dreht, und die neue zur vorigen addiert, so bekommt man eine Schwingung, für welche die Iso-und die Antiphasigkeit sich bei vertauschten Achsentripeln zeigt.

IV. $6n$ Doppelschwingungen, *zweizählig-iso- und dreizählig-cyclophasig zur Hauptachse.* Unter diesen sind links- und rechtsdrehende cyclophasige Schwingungen, und solche, welche zu beiden Nebenachsentripeln gleichzeitig isophasig, oder gleichzeitig antiphasig sind. Ein Beispiel einer derartigen Schwingung liefert der Amplitudensatz

$$p,\ r,\ q,\ p,\ r,\ q,$$
$$p,\ q,\ r,\ p,\ q,\ r,\quad \text{mit } p+q+r=0.$$

Dreht man um $\pi/3$ und superponiert durch Subtraktion, so wird

$$p-r,\quad r-q,\quad q-p,\quad p-c,\quad r-q,\quad q-p,$$
$$p-q,\quad q-r,\quad r-p,\quad p-q,\quad q-r,\quad r-p,$$

eine Schwingung darstellen, welche zu Nebenachsen beider Art antiphasig ist.

V. $3n$ einfache Schwingungen, *sechszählig-antiphasig* und daher dreizählig-isophasig *zur Hauptachse,* und dazu *isophasig* zu den Nebenachsen erster Art, *antiphasig* zu den Nebenachsen anderer Art. Ein Beispiel giebt der Amplitudensatz

$$a,\quad -a,\quad a,\quad -a,\quad a,\quad -a,$$
$$a,\quad -a,\quad a,\quad -a,\quad a,\quad -a.$$

VI. $3n$ ebensolche Schwingungen, aber mit Vertauschung der Nebenachsentripeln:

$$a,\quad -a,\qquad a,\quad -a,\qquad a,\quad -a,$$
$$-a,\quad a,\qquad -a,\quad a,\qquad -a,\quad a.$$

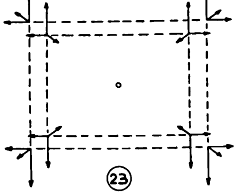
Wenn die *sechszählige Hauptachse und die Nebenachsen Drehachsen* sind (Fig. 20), so findet man die Translation parallel zur Hauptachse und die Rotation um dieselbe unter den Schwingungen II. Diese können parallel zur Hauptachse elektrisches Moment zeigen. Die übrigen Translationen und Rotationen gehören zu den Doppelschwingungen III, welche elektrische Momente senkrecht zur Hauptachse erzeugen können.

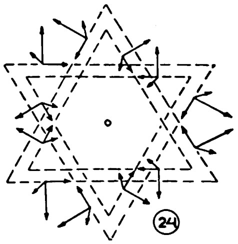
Wenn die *Hauptachse Drehachse, die Nebenachsen Drehinversionsachsen* sind, daher 2 × 3 Spiegelebenen sich in die Achse schneiden (Fig. 21), so werden nur die Translation parallel zur Hauptachse, und die Möglichheit zu parallelen elektrischen Momenten von II nach I versetzt.

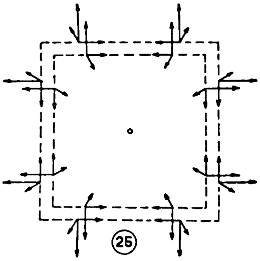
Wenn die *Hauptachse Drehinversionsachse*, die *Nebenachsen erster Art Drehachsen* sind, so müssen die *Nebenachsen zweiter Art Drehinversionsachsen* sein, es gehen Spiegelebenen durch Hauptachse und Nebendrehachsen (Fig. 22). Man findet die Translation parallel zur Hauptachse, und elektrische Momente in dieser Richtung jetzt unter den Schwingungen VI.

14. Bis jetzt haben wir nur Kombinationen von zwei Symmetrieelementen betrachtet. Wenn wir jetzt den behandelten Kombinationen von zwei Achsen noch ein Symmetriezentrum beifügen, so entstehen die vollkommenen *rhombischen, trigonalen, tetragonalen und hexagonalen holoëdrischen Symmetrieen* (Fig. 23—26). Die bei den Hemiedrieen und Hemimorphieen besprochenen Schwingungsgruppen teilen sich alle in zwei Untergruppen, die mit Bezug auf das Zentrum isophasig oder antiphasig sind.

Die Kombinationen von Hauptachse, Nebenachsen und Zentrum.







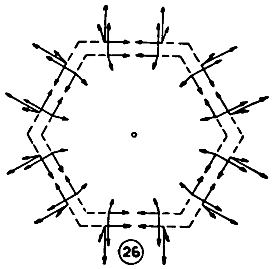


Fig. 23. Rhombische Holoedrie.
Fig. 25. Tetragonale Holoedrie.

Fig. 24. Trigonale Holoedrie.
Fig. 26. Hexagonale Holoedrie.

15. Wir kommen jetzt zur einfachsten *Tetraedersymmetrie*, aus der Kombination von zwei unabhängigen Symmetrie-elementen: *eine dreizählige Achse* in einer Körperdiagonale eines Würfels, und eine *zweizählige Achse* senkrecht zu einer Seitenfläche (Fig. 27). Diese Elemente aber bedingen noch drei weitere dreizählige Achsen und noch zwei zweizählige. Statt dreimal zwei aequivalenter Sektoren sind zwölf vorhanden, drei mal vier. Es liegen in jeder Würfelfläche zwei aequivalente Atome. Zwecks bequemer Übersicht werden wir die 12 aequivalenten Atome in drei Vierer zusammenfassen. Ein Vierer besteht aus den Atomen in zwei gegenüberliegenden Würfelflächen. Das System besteht also aus drei verschiedenen rhombisch disphenoïdischen Teilen, die congruent aber senkrecht zu einander orientiert sind.

Wir wissen (§ 8), dasz $4n$ Atome um drei rhombische Achsen $3n$ iso-isophasige Schwingungen haben. Für unsere $12n$ Atome werden also $9n$ derartige Schwingungen existieren. Hier aber bewirkt unsere dreizählige Achse eine Unterteilung. Diese nämlich führt die drei genannten Atomvierer in einander über, wir betrachten sie als Sektoren zur dreizähligen Achse, und können den Fall unterscheiden, wo alle Sektoren die gleiche Schwingung ausführen, das Ganze also dreizählig isophasig ist, und den Fall, wo die Sektoren nach einander schwingen, wodurch die ganze Schwingung links-oder rechts-cyclophasig ist. Im ersten Fall sind alle entsprechende Amplituden gleich. Bei den cyclophasigen Doppelschwingungen sind die Amplitudensummen für irgend drei durch eine dreizählige Achse verknüpfte Atome null.

Ausserdem sind für $4n$ Atome in einer rhombischen Hemiëdrie noch $9n$ Schwingungen möglich, die nur für eine Achse isophasig sind. Bei uns sind drei mal so viele Atome vorhanden, $12n$. Dabei musz bemerkt werden, dasz wegen der dreizähligen Achsen jede Schwingung welche eine rhombische Achse bevorzugt sich auch verwirklichen kann mit bevorzugung einer anderen Achse. Diese Schwingungen werden daher zu Tripelschwingungen. Sie zeichnen sich dadurch aus, dasz die Summe entsprechender Amplituden für vier durch keine dreizählige Achse verknüpfte Atome null ist. In dieser Gruppe von $9n$ Tripelschwingungen wirken sich die dreizähligen Achsen nur darin aus dasz von jeder Tripel jede Schwingung je eine von den zweizähligen Achsen bevorzugt. Wohl kann man aus einer Tripel auch Schwingungen zusammensetzen, die zu einer dreizähligen Achse isophasig, oder cyclophasig sind. Diese Schwingungen aber zeigen dann keine Isophasigkeit oder Antiphasigkeit mehr zu den zweizähligen Achsen.

Wir schlieszen also dasz hier die Schwingungen der $12n$ Teilchen sich folgenderweise gruppieren:

I. $3n$ einfache *zweizählig- und dreizählig-isophasige* Schwingungen, ohne elektrische Momente,

II. $3n$ Doppelschwingungen, *zweizählig-iso-iso-phasig, dreizählig-cyclophasig,* ohne elektrische Momente,

III. $9n$ Tripelschwingungen, mit Bevorzugung einer zweizähligen Achse *zweizählig iso-anti-phasig,* mit elektrischen Momenten in je einer Achsenrichtung. Die drei Translationen und die drei Rotationen sind zwei hierin enthaltene Tripelschwingungen.

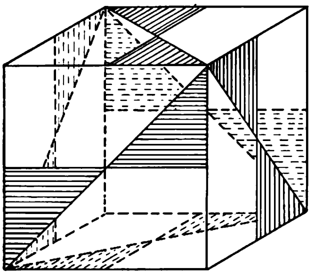
16. Wir fügen der vorgehenden Kombination von *zweizähliger* und *dreizähliger Achse* noch ein *Symmetriezentrum* zu (Fig. 28). Dadurch werden die Ebenen durch zwei zweizählige Achsen zu Spiegelebenen. Es sind $24n$ Atomevorhanden.

Das neue Symmetrie-element macht uns keine Schwierigkeiten. Jede Schwingung, die ohne Zentrum vorhanden wäre, wird durch das Zentrum in eine gleichartige invertiert. Demzufolge wird das Zentrum eine Verdoppelung von jeder der drei oben gefundenen Schwingungsgruppen bewirken, nach der Unterscheidung ob die Schwingungen mit Bezug auf das Zentrum isophasig oder antiphasig sind.

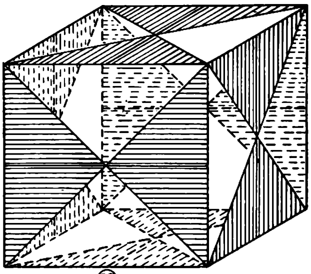
Die Rotationen bilden eine Tripelschwingung, die zum Zentrum isophasig ist. Die Translationen sind in dieser Hinsicht antiphasig. Elektrische Momente sind nur möglich bei den zum Zentrum antiphasigen Tripelschwingungen.

17. Wir kommen zur Kombination einer *vierzähligen Achse* und einer *dreizähligen Achse* (Fig. 29, 30). Zusammen bedingen diese nicht nur zwei weitere vierzählige und drei weitere dreizählige Achsen, aber auch noch sechs zweizählige Achsen, welche die Winkel der vierzähligen Hauptachsen halbieren und daher die Mitten des Würfelkanten verbinden. Es giebt 24 aequivalente Teilchen, die zu vier auf Würfelseiten liegen.

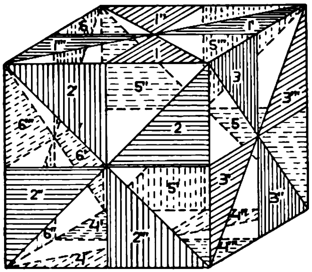
Die Kombinationen mit vier dreizähligen Achsen. Es sind keine Atome und Bezugsachsen gezeichnet, nur sind die besetzen Felder auf der Würfeloberfläche schraffiert und teilweise numeriert.



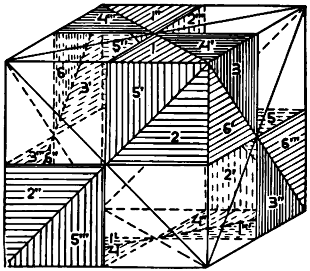
㉗



㉘



㉙



㉚

Fig. 27. Drei zweizählige und vier dreizählige Achsen.

Fig. 29. Drei vierzählige Dreh- und vier dreizählige Achsen (sechs zweizählige Drehachsen).

Fig. 28. Drei zweizählige und vier dreizählige Achsen mit Zentrum (drei Spiegelebenen).

Fig. 30. Drei vierzählige Drehinversions- und vier dreizählige Achsen (sechs Spiegelebenen).

Wir werden die Teilchen folgenderweise nummern. Wir greifen eines heraus, und nennen es 1. Die vierzählige Achse die aus der Würfelfläche steckt, in der es liegt, wird in bestimmtem Sinn in Wirkung versetzt. Die Teilchen, zu welchen wir geführt werden, heiszen

$$1, \quad 1', \quad 1'', \quad 1'''.$$

Wir nehmen den zu 1 nächsten Eckpunkt. Die hier austretende dreizählige Achse führt uns von 1 zu 2 und 3. Die vierzählige Achse welche aus der von 2 besetzten Würfelfläche tritt wird in Wirkung versetzt, und zwar, von aussen betrachtet, im selben Sinne wie vorher die andere Achse. Es entstehen so

$$2, \quad 2', \quad 2'', \quad 2'''.$$

Gleicherweise macht die dritte Hauptachse aus 3:

3, 3′, 3″, 3‴.

Die zweite Hauptachse mache durch zweimalige Wirkung 4 aus 1. Aus 4 entstehen durch dieselbe dreizählige Achse wie vorher die Nummern 5 und 6. Jede von diesen dreien werden von der aus ihrer Würfelfläche steckenden Hauptachse verpflanzt, immer in dem selben Sinne vorgehend, (von aussen her betrachtet). So entstehen

4, 4′, 4″, 4‴
5, 5′ 5″, 5‴
6, 6′, 6″, 6‴.

Eine Schwingung können wir nach dieser Vorbereitung angeben indem wir die entsprechende Amplituden zusammenstellen in der hier angegebenen Reihenfolge der Atome.

Die erste vierzählige Achse wird zyklisch ineinander überführen folgende Vierer:

1 , 1′ , 1″, 1‴,
2 , 3‴, 5″, 6‴,
3 , 5‴, 6 , 2′ ,
4 , 4‴, 4″, 4′ ,
5 , 6′ , 2″, 3′ ,
6″, 2‴, 3″, 5′ .

Die zweite und dritte Achse verknüpfen folgende Atomvierer:

2 , 2′ , 2″ , 2‴,   3 , 3′ , 3″ , 3‴,
1 , 6‴, 4 , 3′ ,   1 , 2‴, 4″ , 5‴,
1′ , 6 , 4′ , 3″ , bzw. 1′ , 2 , 4‴, 5 ,
1″ , 6′ , 4″ , 3‴,   1″ , 2′ , 4 , 5′ ,
1‴, 6″ , 4‴, 3 ,   1‴, 2″ , 4′, 5″ ,
5 , 5‴, 5″ , 5′ ,   6 , 6‴, 6″, 6′ .

Bei der Analyse der möglichen Schwingungen knüpfen wir teils an die gewonnenen Resultate für die tetraedrische Symmetrie mit einer zweizähligen und einer dreizähligen Achse an, und betrachten das jetzige System als Verdoppelung des vorigen. Am Schlusz werden wir an die Resultate für die tetragonale Achse mit Nebenachsen anknüpfen, und unser System als Verdreifachung von jenem betrachten.

Zunächst sind in einem tetraedrischen System mit zwei Atomen im Elementarsektor, vollkommen isophasige einfache Schwingungen möglich, die sich darstellen lassen mittels dem Amplitudenschema

$$\begin{array}{cccc} A & B & A & B \\ A & B & A & B \\ A & B & A & B \\ A & B & A & B \\ A & B & A & B \\ A & B & A & B. \end{array}$$

Zu jedem Verhältnis A/B würde eine Frequenz gehören.

Wegen der Vierzähligkeit unserer Hauptachsen folgt aus der Existenz einer solchen Schwingung auch die Existenz einer Schwingung

$$\begin{array}{cccc} B & A & B & A \\ B & A & B & A \\ B & A & B & A \\ B & A & B & A \\ B & A & B & A \\ B & A & B & A, \end{array}$$

wie man durch Anwendung der gegebenen zyklischen Vertauschungsregeln verifiziert. Daraus schlieszen wir durch Addition und Subtraktion zu den Schwingungstypen

$$\begin{array}{cccccccccc} a & a & a & a & & a & -a & a & -a \\ a & a & a & a & & a & -a & a & -a \\ a & a & a & a & \text{und} & a & -a & a & -a \\ a & a & a & a & & a & -a & a & -a \\ a & a & a & a & & a & -a & a & -a \\ a & a & a & a & & a & -a & a & -a. \end{array}$$

Wenn nicht eine Entartung vorliegt, werden diese verschiedene Frequenz haben. Die erste Form ist vollkommen isophasig nach jedem Symmetrie-element, die zweite ist isophasig nach der dreizähligen Achse, pseudo-cyclophasig, oder vierzählig-antiphasig und nur zweizählig isophasig nach den Hauptachsen.

Weiter hat man für unser System, in tetraedrischer Auffassung, Doppelschwingungen, links- oder rechts-cyclophasig um die dreizählige Achse, und zweizählig isophasig zu den Hauptachsen. Allgemein, mit $A + B + C = 0$ und $\alpha + \beta + \gamma = 0$ lassen diese sich wie folgt darstellen. Wir fügen gleich die durch einmalige Wirkung der ersten vierzähligen Achse entstehenden hinzu:

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \alpha & A & \alpha & & \alpha & A & \alpha & A \\ B & \beta & B & \beta & & \gamma & C & \gamma & C \\ C & \gamma & C & \gamma & \text{und} & \beta & B & \beta & B \\ A & \alpha & A & \alpha & & \alpha & A & \alpha & A \\ B & \beta & B & \beta & & \gamma & C & \gamma & C \\ C & \gamma & C & \gamma & & \beta & B & \beta & B. \end{array}$$

Wohl können wir hieraus folgern, und zwar durch Addition und durch Subtraktion, dasz es eine Schwingung geben musz von diesem Typus, die um die erste Hauptachse isophasig ist, und eine, die vierzählig antiphasig ist:

$$\begin{array}{cccccccccl} a & a & a & a & & a' & -a' & a' & -a' & \\ b & c & b & c & & b' & -c' & b' & -c' & \\ c & b & c & b & & c' & -b' & c' & -b', & \text{mit } a + b + c = 0, \\ a & a & a & a & \text{und} & a' & -a' & a' & -a' & \quad a' + b' + c' = 0, \\ b & c & b & c & & b' & -c' & b' & -c' & \\ c & b & c & b & & c' & -b' & c' & -b' & \end{array}$$

aber wir können hier, weil es Doppelschwingungen sind, nicht mehr behaupten dasz diese zwei Typen verschiedene Frequenz haben sollen. Im Gegenteil können wir, derselben Überlegung folgend wie am Schlusz der § 9, durch Symmetrieoperation und Superposition aus der vierzählig-isophasigen eine vierzählig-antiphasige herleiten. Die erhöhte Symmetrie liefert also keine nähere Unterscheidung der Doppelschwingungen, welche sich dadurch auszeichnen, dasz die Amplitudensumme für drei durch eine dreizählige Achse verknüpfte Atome null ist.

Drittens haben wir im tetraëdrischen System Tripelschwingungen, die je um eine bevorzugte Hauptachse zweizählig-isophasig sind, um die anderen Achsen zweizählig-antiphasig. Wir werden hier mit der verdoppelten Atomzahl zweimal $9n$ einfache Schwingungen haben, die um die erste Hauptachse zweizählig-isophasig sind. Weil unsere Hauptachse aber vierzählig ist, so können die einfache Schwingungen um sie vierzählig-isophasig sein, oder aber sie können vierzählig-antiphasig sein. Um die beiden anderen Achsen sind sie dabei zweizählig-antiphasig. Durch die Aequivalenz der drei Hauptachsen sind alle diese Schwingungen wieder dreifach. Für die zwei Fälle sieht das Schema folgenderweise aus:

vierzählig isophasig:				vierzählig antiphasig:			
a	a	a	a	a	$-a$	a	$-a$
b	c	$-b$	$-c$	b	$-c$	$-b$	c
c	$-b$	$-c$	b	c	b	$-c$	$-b$
$-a$	$-a$	$-a$	$-a$	$-a$	a	$-a$	a
$-b$	$-c$	b	c	$-b$	c	b	$-c$
c	$-b$	$-c$	b	c	b	$-c$	$-b$.

18. Bei einer *vierzähligen Hauptachse* und *dreizähligen Nebenachse* existieren also folgende Schwingungsgruppen fur die $24n$ Teilchen:

I. $3n$ einfache zu allen Symmetrie-elementen *vollkommen isophasige* Schwingungen,

II. $3n$ einfache, um alle Hauptachsen *vierzählig-antiphasige*, um die *dreizähligen* Achsen *isophasige* Schwingungen,

III. $6n$ Doppelschwingungen, um die *dreizähligen Achsen links- und rechts-cyclophasig*, oder um die Hauptachsen iso- und vierzählig-antiphasig,

IV. $9n$ Tripelschwingungen, je um *eine der Hauptachsen vierzählig-isophasig*, um die *anderen zweizählig-antiphasig*,

V. $9n$ Tripelschwingungen, je um *eine der Hauptachsen vierzählig-antiphasig*, um die anderen zweizählig-antiphasig.

Wenn die Hauptachse eine *vierzählige Drehachse* ist (Fig. 29) so sind die sechs zweizähligen Nebenachsen ebenfalls Drehachsen, welche die Mitten der Würfelkanten verbinden. Wir finden die Translationen in der Gruppe IV, wo man auch elektrische Momente erwarten kann. Auch die Rotationen gehören dahin.

Wenn die Hauptachse eine *vierzählige Drehinversions*achse ist (Fig. 30), so sind auch die zweizähligen Nebenachsen Drehinversionsachsen, und es sind die Diagonalebenen des Würfels Spiegelebenen. In diesem Fall finden wir die Translationen bei den Schwingungen V, wo die elektrischen Momente zu erwarten sind. Die Rotationen aber sind wie im vorigen Fall unter den Schwingungen IV enthalten.

Wenn man unser System auffaszt als dreifach tetragonales mit Nebenachsen, so musz man haben (§ 12):

(I) $3 \times 3n$ einfache vollkommen isophasige Schwingungen. Davon sind $3n$ enthalten in unserer jetzigen Gruppe I, und $6n$ in der Gruppe III unserer $6n$ Doppelschwingungen;

(IV) $3 \times 3n$ einfache vierzählig-antiphasige Schwingungen, zu zwei besonderen Nebenachsen zweizählig isophasig. Diese liefern die jetzige Gruppe II, und die andere Hälfte der Doppelschwingungen III;

(II) $3 \times 3n$ einfache vierzählig-isophasige, zu den Nebenachsen antiphasige Schwingungen und die Hälfte von (III) $3 \times 6n$ Doppelschwingungen, cyclophasig, bilden die jetzige Gruppe IV von $9n$ Tripelschwingungen mit einer vierzählig isophasigen Hauptachse;

(V) $3 \times 3n$ einfache vierzählig-antiphasige, zu den zwei besonderen Nebenachsen antiphasige Schwingungen, und die Hälfte von (III), $3 \times 6n$ cyclophasige Doppelschwingungen bilden die jetzige Gruppe V von $9n$ Tripelschwingungen, je um eine der Hauptachsen vierzählig-antiphasig.

19. Schlieszlich fügen wir zu den vorigen Symmetrie-elementen noch ein Symmetriezentrum hinzu. Damit erreichen wir die vollständige *kubische Holoedrie*, mit Spiegelebenen senkrecht zu den Hauptachsen und Spiegelebenen durch die Würfeldiagonalen.

Wie wir schon so oft gesehen haben, verdoppelt das Symmetriezentrum alle im vorigen Abschnitt beschriebenen Schwingungsgruppen: man wird sie unterscheiden nach ihrer zentrischen Isophasigkeit oder Antiphasigkeit. Damit ist das Problem erledigt.

Translationen sind immer zentrisch-antiphasig. Auch sind elektrische Momente nur bei zentrischer Antiphasigkeit möglich. Dagegen sind die Rotationen immer zentrisch-isophasig.

20. Es fragt sich, was man zu erwarten hat, wenn die *Gleichgewichtslage eines Atoms in einem Symmetrie-element* liegt. Man hat da nicht so viele Atome im System, als es, der Symmetrie entsprechend, Elementarsektoren giebt. Ein Atom gehört mehreren Elementarsektoren an, und man musz sich überlegen, wie seine Schwingungsgrade sich über die verschiedenen Gruppen verteilen.

Wenn ein Atom in einem Symmetrie-element liegt, so wird die Symmetrie-Operation an den einen Atom verschiedene Koördinatenkreuze legen, den verschiedenen Sektoren entsprechend. Nach unserem Gesichtspunkt soll die Bewegung des Atoms in all diesen Koördinatenkreuzen dieselbe sein, sei es mit einer Phasenverschiebung. Daraus folgt, dasz wenn ein *Atom in einem Symmetriezentrum* liegt, das Atom seine drei sämtliche Schwingungsgrade nur denjenigen Schwingungsgruppen beisteuern kann, die zum Zentrum antiphasig sind. Bei den anderen Schwingungen kann es nur in Ruhe bleiben.

Ein *Atom in einer Spiegelebene* kann mit zwei Schwingungsgrade in der Symmetrie-ebene Anteil haben an die zu der Ebene gleichphasigen Schwingungen. Bei den anderen Schwingungen hat es nur einen Schwingungsgrad senkrecht zur Ebene.

Auf einer zweizähligen Drehachse hat ein Atom einen Schwingungsgrad in der Achse für die zu dieser Achse gleichphasigen Schwingungen, und zwei Schwingungsgrade senkrecht dazu für die antiphasigen Schwingungen.

Auf einer mehrzähligen Drehachse hat ein Atom einen einzigen Schwingungsgrad in der Achse für die gleichphasigen Schwingungen, für die rechts- und links-cyclophasigen hat es zwei circuläre Schwingungsrade senkrecht zur Achse. Auf einer *mehrzähligen Drehinversionsachse* gehört der Schwingungsgrad längs der Achse zu der um diese Achse antiphasigen Gruppe.

22. Bis jetzt haben wir noch nicht explizite unendliche Gitter betrachtet. Die unendlichen Gitter machen jedoch keine besondere Schwierigkeiten, weil man die Translationen einfach als Deckoperationen den symmetrischen Operationen zur Seite stellen kann. Es kommt nur auf die Verteilung des unendlichen Gitters in Elementarsektoren an. Dasz es auch Sektoren giebt, die durch Trans-

lation in einander übergehen, birgt für die Betrachtung der Schwingungen keine Schwierigkeit. Bei den s.g. Reststrahlen-Schwingungen werden die durch Translation verknüpften Sektoren die gleiche Bewegung mit gleicher Phase zeigen, während die durch Symmetrie-elemente verknüpften Sektoren das beschriebene Verhalten und die angegebenen Phasenrelationen zeigen.

Im Gegensatz zu den endlichen Systemen wird ein Gitter mehrere Symmetriezentren haben, und die Symmetrieachsen brauchen nicht einander zu schneiden, oder die vorhandenen Symmetriezentren zu enthalten. Es können verschiedene Atome in Zentren liegen.

In einer späteren Abhandlung werde ich an Beispielen zeigen, wie man die Verteilung eines Gitters in Elementarsektoren, und die Abzählung der möglichen Schwingungen vornimmt.

Teyler's Stichting
Haarlem.

DE BETEEKENIS DER ATOOMKLEUREN [1])

door A. D. FOKKER

Kleur bekennen! Dat is hetgeen de atomen doen, wanneer zij licht uitzenden: elk geeft zijn eigen kleur, kenmerk van zijn eigen karakter. Met den spectroscoop ontleden wij dat licht, wij vinden de afzonderlijke samenstellende kleuren, de spectraallijnen. Het is niet eenzijdig waar, wat Goethe stelde, n.l. dat de kleuren door het prisma, door den spectroscoop worden teweeggebracht. De kleurencombinatie die wij te zien krijgen, het spectrum, wordt bepaald door de lichtuitzendende materie. Het spectrum is kenmerkend voor het emitteerende element. Het is een onbedriegelijk visitekaartje, een onvervalschbaar bankbiljet. De spectraalanalyse van het licht der sterren leert de aanwezigheid in de sterren van de elementen, welker spectrum wij in dat licht aantreffen.

Maar niet alleen determinatiekenmerk is het spectrum. Het geeft niet louter de mogelijkheid om een bepaalden naam erbij op te zoeken. Het is niet slechts een signatuur, als van een schilderij, of een merk als van een antiek stuk aardewerk. Het is ook een hieroglyph, een raadselachtig getuigenis van een inwendige geschiedenis, een in geheimschrift gestelde boodschap over een innerlijke historie der elementen der materie. Wij willen nagaan, hoe die boodschap ontcijferd wordt, en wanneer zij in cijfers ontcijferd is, ons verbeelden wat haar inhoud zou kunnen zijn.

De ontcijfering van de taal der spectra moet eindigen in het vinden van wetmatigheden, zij moet beginnen met een aandachtige beschouwing, om tot de ontdekking te komen van vaste regels. Bij die beschouwing treft het, dat er spectraallijnen dubbel zijn. Dat zou toeval kunnen zijn, maar het kan ook een spoor zijn, dat wij volgen moeten. In sommige spectra komen er drievoudige lijnen voor, reek-

---

1) Fragment eener Zaterdagmiddagvoordracht in Teyler's Stichting, 19 Nov. 1932.

sen van tripletten, de lijnen dicht bij elkaar, de middelste dichter bij de een dan bij de ander, en bij alle tripletten van een heele reeks nagenoeg in dezelfde reden. Het zou wel vreemd zijn, indien daar niets achter stak, maar welk middel is er, om den typischen regel duidelijk te formuleeren? De paarlingen der doubletten schijnen dichter bij elkander te staan naarmate de lijnen meer naar den violetten kant liggen. Maar wat beteekent dat „dichter bij elkander"? Hartley ontdekte in 1883 wat men te doen had: men moest op de golfdichtheid letten, en niet op de golflengte.

De *golfdichtheid*, of het golfgetal, ν, is het aantal golven per centimeter: $\nu = 1/\lambda$. Indien men voor de lijnen de golfdichtheden uit de gemeten golflengten berekent kan men gewaarworden dat bij reeksen van doubletten, en tripletten, het verschil

$$\nu' - \nu = \frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda\lambda'}$$

tusschen de golfdichtheden van de leden telkens even groot is. Dat is een punt van belang, want nu weet men, dat indien men naar vaste regels zoekt, men met voordeel letten zal op de golfdichtheden, en niet op de golflengten.

Toch werd de eerste groote, baanbrekende formuleering van een regel, de formule van den Zwitser Balmer, in 1885 gegeven met behulp der golflengte. Het betrof de lijnen uit het waterstofspectrum, waarvan er drie in het zichtbare gebied liggen, en waarvan er verscheidene, in het ultraviolet, herkend werden in sterrespectra (Sirius, α Lyrae). Balmer gaf voor de golflengte de formule

$$\lambda_m = h \frac{m^2}{m^2 - 4},$$

waarin h een constante lengte is, en m de rij der geheele getallen doorloopt, bij 3 te beginnen. Een hoogst merkwaardige regel is dat, die gemakkelijker tot de verbeelding spreekt, wanneer men hem opschrijft voor de golfdichtheden:

$$\nu_m = \frac{R}{4} - \frac{R}{m^2}.$$

De letter R wordt hier gebruikt voor het getal 109 677, 691 cm^{-1}, dat erdoor wordt voorgesteld, om te herinneren aan den Zweed

Rydberg, die in 1889 ontdekte, dat soortgelijke formules toepasselijk waren voor lijnenreeksen in andere spectra. In het spectrum van het natrium ontdekte hij n.l., dat er naast de reeks der *scherpe* doubletten, en de reeks der *diffuse* doubletten, nog een derde reeks was van doubletten, die hij de hoofdreeks, de *principale* reeks noemde. Voor elk van deze reeksen kon hij de golfdichtheden uitdrukken met behulp eener formule

$$\nu_m = A - \frac{R}{(m+\mu)^2},$$

waarin weliswaar μ een aparte, van reeks tot reeks wisselende constante was, maar waarin R, voor elk der drie reeksen, hetzelfde getal was dat in het waterstofspektrum de groote rol speelt.

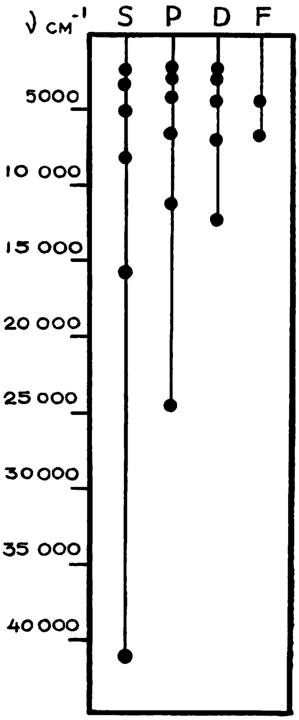


Fig. 1.
Termschema van Natrium.

Dat de formule voor elk der reeksen denzelfden vorm heeft, en dat bovendien dezelfde constante R als in Balmer's formule voor de waterstof ook bij het natrium in Rydberg's formule optreedt, het is eigenlijk reeds overstelpend. Maar daar komt bij een curieuze betrekking tusschen de bedragen A in de drie reeksen. Twee daarvan, die voor de scherpe reeks en die voor de diffuse reeks, zijn aan elkander gelijk, en hebben bovendien een waarde, gelijk aan één van de waarden der termen $R/(m+\mu)^2$ die in de principale reeks staan. Het derde bedrag A (dat in de principale reeks staat), past als vervolg van de andere reeks termwaarden $R/(m+\mu)^2$ voor de scherpe lijnen, wanneer men den term voor nog één kleinere waarde van m uitrekent.

Men kan dit verband tusschen de reeksen aanschouwelijk vastleggen in een figuur. De termen in de formule van Rydberg, beter gezegd de waarden die zij kunnen aannemen heeten voortaan in de spectroscopie *termen*. Wij kunnen de waarde, der termen in een figuur uitzetten, te beginnen van een zekere horizontale lijn elke term als een volgens vaste schaal bepaald eind, naar beneden, en de termen, bij één reeks behoorende, recht onder elkander. De golfdichtheden van de scherpe lijnen vindt men door het verschil te nemen van alle S-termen (den laagsten uitgezonderd) met den laagsten P-term. De golfdichtheden van de diffuse lijnen vindt men in de hoogteverschillen der D-termen met den laagsten P-term; de formule voor de principale reeks combineert alle P-termen met den laagsten S-term.

Door deze ordening der spectraallijnen in reeksen en Rydbergs formuleering der reeksen zijn wij geraakt tot het *termschema*. De golfdichtheden zijn differenties, in de plaats van op het spektrum richt de aandacht zich op het schema der termen, als de karakteristieke uitdrukking van wat er in het atoom omgaat.

Ook het waterstofspectrum vertoont een termschema. Immers, de eerste term $R/4$ is slechts een bijzonder geval, een voortzetting van de rij der termen R/m^2, en het ligt voor de hand te onderstellen, dat ook de term met $m = 1$ niet zal ontbreken. Op welke wijze zal daarvan echter kunnen blijken?

Hier vindt een stelling plaats van den Zwitser Ritz. Deze poneert, dat, indien men een termschema beschouwt, er geen reden is te denken dat slechts een beperkte schaar van combinaties van termen tot een waarneembare spectraallijn leidt. Neen, elk paar van termen moet doen verwachten dat, onder geschikte omstandigheden, een spectraallijn verschijnt, met een door hun verschil bepaalde golfdichtheid.

Voor het waterstofspectrum kan dit worden op de proef gesteld. Immers, indien $R/1^2$ tot de termen behoort, moet men een reeks verwachten met

$$\nu_m = \frac{R}{1^2} - \frac{R}{m^2}.$$

Inderdaad is deze reeks, in het verre ultraviolet, door Lyman gemeten, zij draagt zijn naam, de golfdichtheden en de golflengten zijn:

ν: 82 258,31 97 481,36 102 822,94 cm^{-1},

λ: 1 215,68 1 025,83 972,54 Å (= 10^{-8} cm).

Eveneens heeft men een reeks te verwachten, die op den term $R/3^2$ staat:

$$\nu_m = \frac{R}{3^2} - \frac{R}{m^2};$$

dit is een reeks met zeer groote golflengten, in het infrarood, zij is door Paschen gemeten en draagt diens naam. De golfdichtheden en golflengten zijn:

ν:	5 333,01	7 800,68	9 142,4	9 950,5	10 475,4 cm^{-1},
λ:	18 751,05	12 818,11	10 938,0	10 049,8	9 546,2 Å.

In het spectrum der waterstof wordt dus zoo ver wij gezien hebben, de combinatieregel van Ritz goed bevestigd. In de andere spectra echter is dat niet het geval, tenzij er bijzondere inwerkingen op de lichtemissie plaats grijpen. In het natriumspectrum vindt men uitsluitend combinaties van de S-termen met de P-termen, niet met de D-termen, of met de later door Bergmann ontdekte nieuwe reeks van termen, die men F-termen noemt, ook niet met andere S-termen uit de eigen reeks.

Voorts treft men ook slechts combinaties van P-termen met S- en met D-termen, niet met andere termen uit de eigen P-reeks, of met F-termen. De D-termen komen slechts in combinatie met P- en met F-termen voor den dag. Het blijkt dat de *volgorde* waarin men de reeksen in het termschema teekent, van belang is. Men kan het zoo doen, dat elke term in het spectrum slechts verschijnt in combinatie met termen van de beide buurreeksen, (of van de eenige buurreeks voor S-termen). Vergefelijk anthropomorf heeft men zich gewend aan de uitdrukking, dat er verbodsregels zijn, of selectieregels (auswahlregeln), die de mogelijke combinaties beperken.

Wij kennen nu het termschema van natrium, en daarmede komt overeen het schema van de andere alkali-metalen: lithium, kalium, rubidium, caesium. De spectra van al deze hebben een S-reeks, die enkelvoudig is, en daarnevens een P-reeks, een D- en een F-reeks, en vermoedelijk nog G-, H- enz. reeksen, die alle dubbel zijn. Het zijn alle *doublet-spectra.* Bij de zwaardere metalen zijn de afstanden tusschen de twee leden van een dubbelen term grooter.

De analyse en de herleiding van de spectra der aardalkaliën tot termschemata leidt tot een nieuwe ontdekking. In de spectra van beryllium, magnesium, calcium, strontium, barium ziet men *singulets* en *triplets*, en het blijkt, dat één termschema het spectrum niet kan weergeven: er zijn twee afzonderlijke termschemata noodig voor een atoom. Elk heeft een S-, een P-, een D-, een F-reeks. Terwijl in het eene schema alle termen enkelvoudig zijn, zijn zij in het andere, met uitzondering van de S-termen, alle drievoudig. Deze tweezijdigheid in de termschemata vinden wij ook in het gewone heliumspectrum, zelfs zijn de twee schemata zoo streng gescheiden, dat er geen combinaties gevonden worden tusschen termen van het een en het ander. Het is alsof er tweeërlei atomen zijn, en men spreekt van de spectra van het parhelium en van het orthohelium. Het parheliumschema bevat louter enkelvoudige termen. Het orthohelium heeft een rij enkelvoudige S-termen, de andere reeksen vertoonen, zeer nauw, een multipliciteit. Met de scherpst onderscheidende instrumenten vindt men dat de termen drieledig zijn. In dit opzicht behoort dus het helium bij de groep der aardalkaliën.

Neemt men het spectrum van een aardalkali, bijv. van calcium, onder bijzondere omstandigheden op, ontleent men bijv. het licht aan een vonkontlading inplaats van aan een elektrischen boog, dan treden er bijzondere lijnen op den voorgrond, en onder deze vindt men doubletten. Dit bijkomstige spectrum vertoont den bouw van het kaliumspectrum: het termschema blijkt behalve uit een reeks enkelvoudige S-termen te bestaan uit reeksen tweevoudige termen. Het is alsof, — en dit is ook het gezichtspunt dat ter verklaring dient, — in de krachtige elektrische vonk één der beide valentie-elektronen van het atoom afgescheurd is, zoodat overblijft een calcium-ion met nog slechts één valentie-elektron, dat zich gedraagt op de wijze der eenzame valentie-elektronen bij de alkaliatomen, en een doublet-spectrum uitzendt.

Dit gezichtspunt stelt ons inderdaad nergens te leur. Het spectrum van geïoniseerd helium, He^+, is geheel eender met dat van waterstof: de termen zijn $4R/m^2$. Het termschema van geïoniseerd magnesium, Mg^+, is als dat van natrium. Geïoniseerd aluminium, Al^+, heeft een dubbelzijdig termschema met enkelvoudige en drievoudige termen, dubbel-geïoniseerd aluminium, Al^{++} of Al III, heeft een en doubletspectrum als natrium, met een enkelzijdig schema. Deze gelijkvormigheid heeft men ver kunnen nagaan, Millikan en Bowen vonden doubletten in de spectra *Na* I, *Mg* II, *Al* III, *Si* IV, *P* V, *S* VI, *Cl* VII. Tripletten vindt men in de spectra *Mg* I, *Al* II, *Si* III, *P* IV, *S* V, *Cl* VI. Wij kunnen niet anders dan hierin zien een aanwijzing, dat er *gelijkvormige structuren* in het spel zijn.

Bij toeneming van het aantal valentie-electronen zullen wij een trapsgewijs *toenemende gecompliceerdheid en veelvuldigheid* in het spectrum zien.

Het eenvoudigste geval van een enkel valentie-elektron kennen wij reeds: wij vinden daar een doubletspectrum.

In het volgende geval van twee valentie-elektronen krijgen wij een tweezijdig spectrumschema: tegelijk een termschema van enkelvoudige termen en een van triplet-termen, (waarin de *S*-termen niettemin enkelvoudig zijn).

Het geval van drie valentie-elektronen beschouwden wij nog niet: het gaat hier om de spectra der aard-metalen: aluminium, gallium, indium, waartoe ook als het lichtste van de familie het borium behoort. In zooverre er een groepeering der drie elektronen is in een paar vaster gebondene, en éen losser, krijgen wij een termschema dat behalve de enkelvoudige *S*-termen niets dan tweevoudige heeft. Maar daarnaast is er een termschema, waar naar het schijnt niet een der elektronen apart staat. Dat is een schema, dat viervoudige termen heeft. Hoewel de *S*-termen hier wederom enkelvoudig zijn, en de *P*-termen nog niet de volledige viervoudigheid hebben, (zij zijn niet meer dan drievoudig), zijn toch de *D*-termen, de *F*-termen en de verdere viervoudig.

Komt er nu nog een vierde valentie-elektron, dan blijkt het spectrumschema driezijdig te zijn: er is een termschema van louter enkelvoudige termen, daarnaast is er een met drievoudige termen, en bovendien nog een schema waarin vijfvoudige termen optreden. In dit laatste zijn de *S*-termen enkel, de *P*-termen drievoudig, de *D*-termen vijfvoudig, evenals de verdere termen. Een vijfde elektron laat het spectrum driezijdig, de drie termschema's bevatten successievelijk: het eerste dubbele termen (de enkelvoudige *S*-termen uitgezonderd), het tweede viervoudige termen (de *S*-termen enkel-, de *P*-termen drievoudig), het derde ook zesvoudige termen (de *S*-termen enkel-, de *P*-termen drie-, de *D*-termen vijfvoudig). De zesvoudigheid manifesteert zich echter eerst in de *F*-termen.

De wijze waarop de multipliciteit toeneemt, is wel duidelijk: bij toenemend aantal valentie- of buiten-elektronen zijn er zeven-, ja achtvoudige termen waargenomen.

Het is daarbij opmerkelijk, dat S-termen altijd enkelvoudig zijn, P-termen ten hoogste drievoudig, D-termen ten hoogste vijfvoudig, F-termen ten hoogste zevenvoudig, en zoo vervolgens. Dat openbaart op zichzelf een intieme eigengeaardheid van die verschillende soorten van termen. Aanvankelijk hebben wij de S-reeks, de P-reeks de D-, de F-, de G-reeks, enz. naast elkander leeren teekenen in de termschemata, op grond van de combinaties, die tot waarneembare spectraallijnen aanleiding geven. Normaliter zouden alleen termen uit naburige reeksen hun combinatie in emissie manifesteeren. Nu blijkt er daarnevens nog een arithmetische getallen-opeenvolging verbonden te zijn aan die schikking der reeksen, tot welke uit de physische emissie besloten was. Het zou voor de hand liggen — achteraf beschouwd — om deze getallen aan de reeksen te hechten als nummering, en de notatie 1, 3, 5, 7, 9, ... te nemen inplaats van de qualitatieve aanduiding, S, P, D, F, G, evenals men de elementen kan nummeren inplaats van ze te benoemen. Uit historische overweging doet men het voorloopig anders. Men zou trouwens wegens het ontbreken der even nummers, zich eens kunnen vergissen, en meenen dat er reeksen vergeten waren. Men *nummert in een termschema* de S-, P-, D-, F-, G-, H-reeksen met de *getallen die men* L *noemt*:

$$L = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots .$$

Men ziet, dat de hierboven genoemde getallenrij 1, 3, 5, 7, bestaat uit $(2L + 1)$.

De regel, dien Ritz' termcombinatie-methode in acht moet nemen vindt nu zijn uitdrukking in den eisch, dat de te combineeren termen in L met 1 moeten verschillen.

Thans wil ik de vraag stellen, of de leden van een meervoudigen spectraalterm, bijvoorbeeld de vier die in een quartetschema een D-term vormen, een ${}^4D$, zooals wij schrijven, behalve in hun getalwaarde, onderling nog een innerlijk onderscheid vertoonen? Het antwoord vinden wij in het Zeeman-effect. Zooals Van Lohuizen heeft opgemerkt, bemerken wij in de magnetische splitsing eener spectraallijn eigenlijk de splitsing van de termen, die in die lijn gecombineerd zijn.

Voor S-termen is dit betrekkelijk eenvoudig. Zij splitsen zich door magnetische inwerking in evenvele componenten als aangegeven wordt door de maximale multipliciteit in het schema, waartoe zij behooren. Een ${}^2S$-term in tweeën, een ${}^5S$-term in vijven, enz. Ofschoon er geen reden is, om een enkelvoudigen ${}^5S$-term nog een index te geven, doet men het toch naar analogie van de straks te bespreken termen. Men bepaalt een getal j zoodanig, dat $(2j + 1)$ aangeeft het aantal componenten, waarin de term in een magnetisch veld uiteengaat. Voor ${}^2S$ is dit dus $\frac{1}{2}$, voor ${}^5S$ is het 2. Op dezelfde wijze gaat men telkens te werk. Singulet-${}^1P$-termen, ${}^1D$, ${}^1F$ hebben 3, resp. 5 en 7 magnetische componenten, men geeft hun een $j = 1$, resp. 2 en 3.

De twee leden van een doublet-P-term, zooals de principale van het natrium, hebben verschillend aantal Zeeman-componenten. De eene heeft er twee, de andere vier. Men kan ze nu onderscheiden door $j = \frac{1}{2}$ en door $j = 1\frac{1}{2}$, en schrijft ${}^2P_{\frac{1}{2}}$ en ${}^2P_{1\frac{1}{2}}$. De twee leden van een doublet-D-term hebben resp. vier en zes Zeeman-componenten. Men schrijft ${}^2D_{1\frac{1}{2}}$ en ${}^2D_{2\frac{1}{2}}$. Verder gaande heeft men ${}^2F_{2\frac{1}{2}}$, ${}^2F_{3\frac{1}{2}}$, enz.

In de triplet-schema's hebben de drie ${}^3P$-termen een, drie en vijf Zeeman-componenten. Men duidt ze in de notatie aan met ${}^3P_0$, ${}^3P_1$, ${}^3P_2$. De triplet-${}^3D$-termen hebben 3, 5 en 7 Zeeman-componenten. Zij heeten ${}^3D_1$, ${}^3D_2$, ${}^3D_3$. De ${}^3F$-termen, zoo zij tot een triplet behooren, hebben de getallen $j = 2$, 3, en 4, en dit gaat zoo verder.

In de quartet-spectra hebben wij op gelijksoortige wijze:

$$ {}^4S_{1\frac{1}{2}} — {}^4P_{\frac{1}{2}}, {}^4P_{1\frac{1}{2}}, {}^4P_{2\frac{1}{2}} — {}^4D_{\frac{1}{2}}, {}^4D_{1\frac{1}{2}}, {}^4D_{2\frac{1}{2}}, {}^4D_{3\frac{1}{2}} — $$
$$ {}^4F_{1\frac{1}{2}}, {}^4F_{2\frac{1}{2}}, {}^4F_{3\frac{1}{2}}, {}^4F_{4\frac{1}{2}} — \text{enz.} $$

In de quintet-spectra is het:

$$ {}^5S_2 — {}^5P_1, {}^5P_2, {}^5P_3 — {}^5D_0, {}^5D_1, {}^5D_2, {}^5D_3, {}^5D_4 — $$
$$ {}^5F_1, {}^5F_2, {}^5F_3, {}^5F_4, {}^5F_5 — \text{enz.} $$

Het gemiddelde van de j-indices is voor de P-termen minstens gelijk aan 1 (dat is de waarde van L), en indien het hooger is, is het gelijk aan den index van den S-term. Voor de D-termen is het gemiddelde der indices tenminste gelijk aan de waarde voor L (dat is hier 2) en, indien hooger, gelijk aan den index voor den S-term.

Hetzelfde geldt voor de andere termsoorten.

Hiermede hebben wij wel genoeg van de indiceering gezegd, die wij aan het Zeeman-effect kunnen ontleenen.

Indien de termen, die met elkander in combinatie treden, reeds zoo menigvuldig zijn, welk een rijkdom zullen dan de multipletlijnen vertoonen! Laat ons aannemen, dat een tweevoudige D-term in combinatie treedt met een tweevoudigen P-term. Volgens Ritz' methode zouden wij dan $2 \times 2 = 4$ combinatielijnen te verwachten hebben. Het blijkt echter, dat wij er slechts drie vinden die hieronder aangestipt zijn:

	$^2D_{1\frac{1}{2}}$	$^2D_{2\frac{1}{2}}$
$^2P_{\frac{1}{2}}$	•	
$^2P_{1\frac{1}{2}}$	•	•

Laat het zijn, dat uit een viervoudig schema een ^4P-term met een ^4D-term in combinatie treedt. Uit de drie P- en de vier D-termen zouden wij 12 combinatielijnen verwachten. Wij vinden er echter slechts(!) acht.

	$^4D_{\frac{1}{2}}$	$^4D_{1\frac{1}{2}}$	$^4D_{2\frac{1}{2}}$	$^4D_{3\frac{1}{2}}$
$^4P_{\frac{1}{2}}$	•	•		
$^4P_{1\frac{1}{2}}$	•	•	•	
$^4P_{2\frac{1}{2}}$		•	•	•

Van een combinatie tusschen ^7F- en een ^7D-term uit een schema met zevenvuldigheid krijgen wij in emissie te zien 15 van de 35 mogelijke combinaties.

	$^7F_0$	$^7F_1$	$^7F_2$	$^7F_3$	$^7F_4$	$^7F_5$	$^7F_6$
$^7D_1$	•	•	•				
$^7D_2$		•	•	•			
$^7D_3$			•	•	•		
$^7D_4$				•	•	•	
$^7D_5$					•	•	•

Wij zullen de voorbeelden niet vermeerderen. Wij hebben genoeg gezien om te gevoelen, welk een verbijsterende overvloed van lijnen in de spectroscopie aan den dag komt, en welk een geduld en scherpzinnigheid er vereischt wordt om niet met den geest in dat warnet verstrikt te geraken! De spectra van ijzer, van cobalt, van nikkel, met hun duizenden lijnen, zijn niettemin voor een goed deel reeds ontgonnen, ofschoon quintetten en septetten, of sextetten en quartetten, met hun componenten pêle-mêle op de fotografische platen verschijnen. De oogst is hoogst respectabel.

Eén opmerking moeten wij nog maken, alvorens dit gedeelte te besluiten, en dat is de zoo juist opnieuw aan den dag getreden *beperking van* Ritz' *combinatieregel*. Zien wij goed toe, dan blijkt het, dat alleen zulke lijnen in een multiplet verschijnen, die beantwoorden aan een combinatie, waarbij de j-indices hetzij gelijk zijn, hetzij met één verschillen. Aan den combinatieregel voor de L-getallen paren zich dus hier tevens combinatieregels voor de j-getallen, die wij volledig weergegeven hebben, indien wij nog toevoegen, dat de j-getallen niet beide tegelijk nul mogen zijn.

Wij hebben nu eenig inzicht, hoe de taal der spectra gearticuleerd is. Wij hebben een overzicht van enkele resultaten van de ontcijfering der raadselachtige spectraallijnen. Eigenlijk bestaat die ontcijfering in een becijfering in de termschemata, en nu komen wij tot de vraag, *wat die cijfers te beteekenen hebben*? Nu komt het aan op de scheppende fantasie der wetenschap, op de natuurkundige verbeelding, die in de werkelijkheid schouwt achter het gordijn der verschijnselen, die de ervaring herschept tot beeld en daarin een verbeelding der werkelijkheid geeft, trek na trek getoetst aan de werkelijke ervaring. Wij beginnen met het eenvoudigste spectrum, dat van waterstof, en vragen: wat onthult dat spectrum, wat is de beteekenis van de reeks der spectraaltermen R/m^2?

Het antwoord is door den Deen Niels Bohr gegeven. Elk der termen, zegt hij, heeft betrekking op een bewegingswijze van het waterstofatoom. Elke *term* zou, met een constant getal vermenigvuldigt, *de energie van een bewegingswijze* aangeven. In de termschemata bepalen de termen bepaalde energie-niveau's, er zijn geen andere stationnaire bewegingswijzen dan met deze energie-niveau's en de uitzending van een lichtstraal is gekoppeld aan den overgang, met energieverlies, van één bewegingswijze naar een andere. Het energie-verschil wordt als een quantum licht uitgezonden, en de energie van het lichtquantum bepaalt zijn frequentie, en daardoor de golflengte.

Wat beweegt er in het atoom? Het oorspronkelijke beeld is, dat een licht elektron om een zware kern zwiert onder de werking van de krachten, die volgens Coulomb werken tusschen de negatieve lading van het elektron en de even groote positieve lading van de kern. De baan wordt daarbij een ellips. Hoewel in het licht der latere ontwikkeling ook deze voorstelling als niet meer dan als symbool kan worden opgevat, kan zij toch zeer goed dienst doen om door middel van een *gelijkvormigheidsbeschouwing* ons te leeren, wat wij te verwachten hebben, indien de kernlading van het atoom zou veranderen.

Stel eens dat de kern een lading kreeg, $\varkappa$ maal zoo sterk. Wij kunnen om die sterker aantrekkende kernlading een ellips teekenen, gelijkvormig aan een der banen om de zwakkere lading, en wel dusdanig dat de afmetingen dezer nieuwe ellips λ maal zoo groot zijn als die der vorige. Nu zal deze ellips wederom de baan kunnen zijn van een elektron, mits dit in bepaalde verhouding τ maal zoo groote tijdpoozen voor overeenkomstige baanstukken besteedt. De versnellingen in overeenkomstige punten zijn daarbij λ/τ^2 maal zoo groot, terwijl de krachten $\varkappa/\lambda^2$ maal zoo groot zijn De verhouding τ moet dus aangepast worden aan de betrekking

$$\frac{\lambda}{\tau^2} = \frac{\varkappa}{\lambda^2}, \quad \text{of} \quad \tau = \frac{\lambda^{3/2}}{\varkappa^{1/2}}.$$

Aan den anderen kant is er voor de werking gedurende een periode een vast quantum, de werkingsconstante van Planck. Indien de energie in een verhouding ε grooter wordt, (en hier zal gelden $\varepsilon = \varkappa/\lambda$), zal een werkingsquantum veranderen in de verhouding $\varepsilon\tau$. Maar voor de overeenkomstige bewegingswijzen moet dit quantum even groot zijn, — dat is de quantumtheorie —, zoodat wij moeten hebben $\varepsilon\tau = 1$. Daaruit volgt

$$1 = \varkappa^{1/2}\lambda^{1/2}, \text{ en tenslotte } \varepsilon = \varkappa^2.$$

Daarmede is de gelijkvormigheid van het termschema van de heliumionen met het waterstofschema verklaard. Inderdaad is de lading twee maal sterker op de heliumkern, en dienovereenkomstig zijn de energieën der bewegingswijzen, en de termwaarden, vier malen grooter [1]. Komen wij aan het termschema van een ion met drie maal zoo sterke kernlading en met één enkel elektron — het dubbel geladen lithium-ion — dan zijn de termen negen maal zoo groot als voor het waterstofspectrum.

---

[1] Niet precies vier malen evenwel. Het verschil in massa van heliumkern en waterstofkern, die mede bewegen en niet in de ruimte vastgenageld staan, maakt dat de versnellingsverhouding niet zuiver λ/τ^2 is.

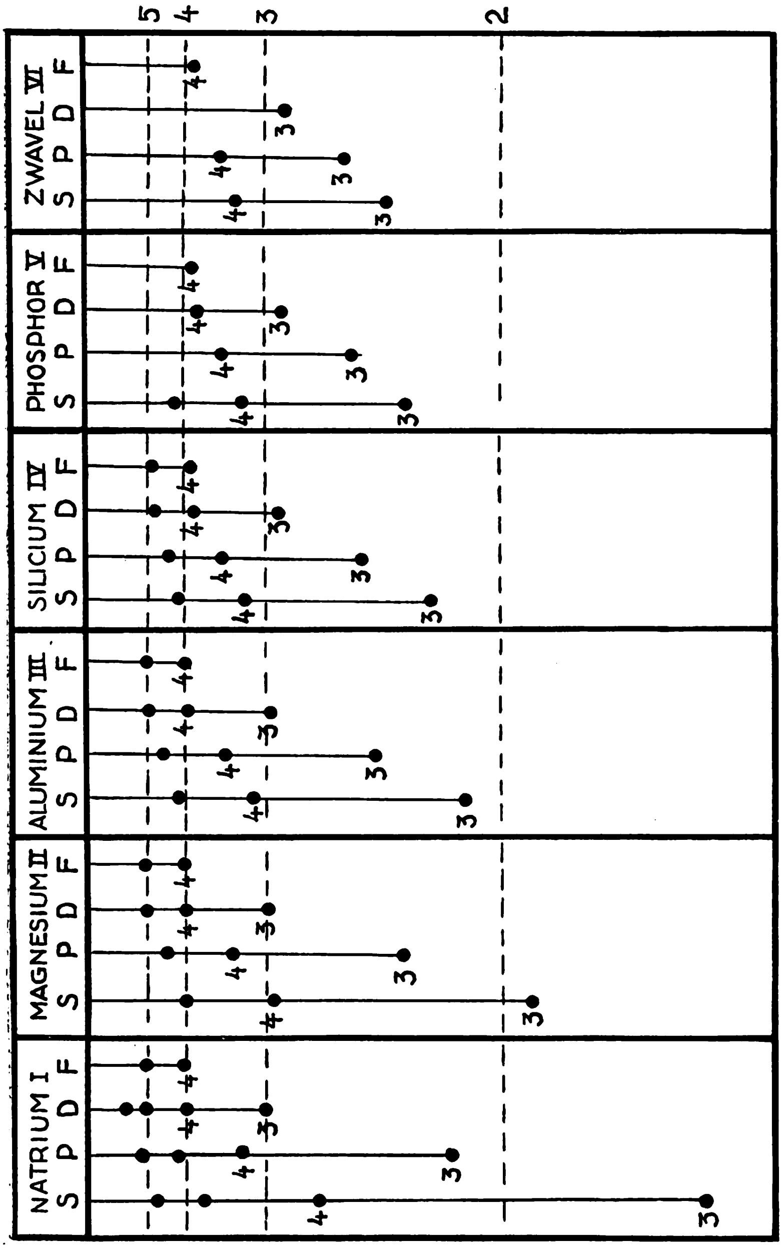

5
4
3
2
NATRIUM I
MAGNESIUM II
ALUMINIUM III
SILICIUM IV
PHOSPHOR V
ZWAVEL VI
S P D F

Fig. 2. Gereduceerde termschemata voor *Na* I, *Mg* II, *Al* III, *Si* IV, *P* V, *S* VI. De termen zijn gedeeld door het kwadraat van het romeinsche cijfer, dat de atoomromplading aangeeft, die het elfde electron aantrekt. De hoofdquantumgetallen zijn bijgevoegd, en de plaatsen der overeenkomstige waterstoftermen zijn gestippeld.

term, is niet meer zoo groot. Bij het dubbelgeladen scandium-ion echter, kernlading 21 met negentien electronen, is de grootste term dezelfde D-term, die in het *Ca* II-termschema komt opzetten. Bohr heeft destijds de conclusie getrokken, dat het 19de elektron bij scandium op andere wijze werd gebonden dan bij kalium en calcium, en hij heeft dit in verband gebracht met den eigenaardigen overgang van korte in lange perioden in het periodiek systeem der elementen volgens Mendelejeff.

Beschouwen wij nu nog eens vergelijkenderwijze de spectra van de elementen waterstof, helium en lithium, die de lichtste atomen hebben (fig. 4). De termen van het waterstofspectrum zijn R/n^2. Het is duidelijk, dat de geheele getallen n in deze uitdrukking van groot belang zijn. Wij noemen ze het *hoofdquantumgetal* van de bewegingswijze. In het beeld van kern en elektron bepaalt het kwadraat daarvan de *groote as* van de baanellips.

Het is dienstig om door de andere termschemata heen te letten op de niveau's, die door de waterstoftermen worden afgebakend. Dan blijkt, dat de termen van helium en van lithium in de buurt liggen van een waterstofterm. Er zijn een S-term en een P-term, die dicht bij den waterstofterm met hoofdquantumgetal 2 liggen. Er zijn een S-, een P-, en een D-term, die dicht bij $R/3^2$ liggen, met $n = 3$, en zoo gaat dit verder. Dit geeft ons reden, om ook een hoofdquantumgetal te bepalen voor die termen, en hun de getallen toe te schrijven van den naburigen waterstofterm. Typeerend is daarbij, dat de verschillende reeksen met elkander juist zooveel termen bijdragen met bepaald hoofdquantumgetal als dit getal aangeeft.

Met hoofdquantumgetal 2 vinden wij in de schemata der genoemde spectra twee termen: een S- en een P-term. Met hoofdquantumgetal 3 vinden wij er drie: S, P en D; wij noemen deze $3S$, $3P$, $3D$. Met hoofdquantumgetal 4 vinden wij er vier: $4S$, $4P$, $4D$, $4F$, en zoo zal het ook verder moeten gaan. Het hoofdquantumgetal 1 ontbreekt in het lithiumspectrum. Wij vinden slechts in de S-reeks van het parheliumschema een term, die daaraan beantwoordt. Deze ligt echter op aanzienlijk lager niveau. Wij moeten ons deze afwijking van de waterstofgelijkenis aldus voorstellen, dat bij deze bewegingswijze beide electronen even dicht tot de kern, met zijn dubbele lading, naderen, en dat er daardoor niet een bui-

de nummering in het natriumschema duidelijk. Op dergelijke wijze kunnen wij in andere gevallen te werk gaan.

Wat beteekent het getal L, dat voor de S-, P-, D-reeks was 0, 1, 2, enz?

Het blijft altijd één minder dan het hoofdquantumgetal. Waarin verschillen de bewegingswijzen, met eenzelfde hoofdquantumgetal, maar tot verschillende reeksen behoorende? Dit quantumgetal wordt geïnterpreteerd als aanwijzing van een zekere draaiïng in het atoom. De grootheid, waarin de hoeveelheid van draaiïng wordt uitgedrukt, de *draai-impuls*, kan bij alle atomistische verschijnselen worden gemeten met eenzelfde maat, die gevonden wordt in den draai-impuls $h/2\pi$, waarin h Planck's werkingsquantum, $6{,}52 \times 10^{-27}$ ergsec is. Met deze maat gemeten, is de draai-impuls voor de P-bewegingswijzen één, voor de D-bewegingswijzen twee, en zoo vervolgens.

Wat beteekent het, dat, indien er één valentie-elektron is, de termen dubbel zijn? Hier dorsten onze landgenooten Goudsmit en Uhlenbeck het aan, te besluiten dat ook het elektron op zich zelf, behalve een lading, nog een hoeveelheid van draaiïng heeft, alsof het een tol is. Voor dezen draai-impuls van het elektron heeft zich het Engelsche woord „*spin*" als internationale vakterm ingeburgerd. Wanneer er een bewegingswijze is, waarin aan het atoom een draai-impuls toekomt tengevolge van de verplaatsingsbewegingen, een baan-impuls, dan zal de draai-impuls van het elektron — bij wijze van een gyroscopisch kompas — zich daarop instellen. Het zal zich instellen òf parallel, òf antiparallel. Het verschil van de resulteerende hoeveelheid van draaiïng in beide gevallen zal het dubbele zijn van de spin van het elektron. Overeenkomstig de quantumtheorie zal dit verschil gelijk moeten zijn aan de elementaire maat, die er voor draai-impuls is, aan $h/2\pi$, zoodat de spin zelf bedraagt $\frac{1}{2}h/2\pi$.

De S-termen hebben geen draai-impuls, $L = 0$. Hier is dus geen sprake van een instelling van de spin. De S-termen zijn dan ook nooit dubbel. Anders is het echter met de P- en de andere termen. Daar zal men een term krijgen met draai-impuls $L + \frac{1}{2}$ en een met $L - \frac{1}{2}$. Wij kunnen aanstonds zeggen, dat dit ons de index-getallen j levert, die ter kenmerking van de leden van een meervoudigen term zijn opgetreden.

Maar, indien bij de alkali-atomen het ééne elektron met zijn spin een verdubbeling der termen teweegbrengt, waarom dan niet bij de *waterstof*, waar er ook één enkel elektron is? Inderdaad, ook bij de waterstof moet de spin zich manifesteeren. Dat het termschema uit slechts één reeks bestaat, is slechts schijn. Eerder moet men zeggen dat de verschillende reeksen met elkander samenvallen. In den term $R/4$ bijvoorbeeld, hoofdquantumgetal 2, zijn een S- en een P-term vereenigd. Reeds was door Sommerfeld de theorie uitgewerkt, hoe de kleine correctie, die men aan moet brengen wanneer men in acht neemt den invloed der electronensnelheid op de traagheid, aanleiding geeft tot een splitsing van deze samenvallende termen, overeenkomstig een verschil van baanvorm en van baanimpuls. Dit was een fraai stuk theorie, en toen men de detailstructuur der waterstoflijnen op de keper beschouwde, (ook de structuur der gelijkvormige lijnen van geïoniseerd helium), bleek de splitsing in de lijnen goed met de theorie overeen te stemmen, wat de grootte betreft. Echter was dit niet het geval met de relatieve sterkten der multipletcomponenten. Hier klopte de waarneming niet met de vaste combinatie-regels. Pas door toepassing van de elektronenspin ook hier verdween deze oneenigheid van theorie en waarneming, van fantasie en werkelijkheid. De verdubbeling van het P-niveau maakt, dat een der twee P-termen samenvalt met den S-term. Een der twee D-termen valt samen met den hoogsten P-term, en zoo vervolgens. Een waargenomen multipletcomponent, die volgens Sommerfeld's theorie zou moeten worden geïnterpreteerd als een ongeoorloofde combinatie van S- met S-term, blijkt nu een regelmatige P-S-combinatie; een andere, die een P-P-combinatie scheen, en dus niet behoorde te verschijnen, blijkt nu een regelmatige D-P-combinatie.

Goudsmit en Uhlenbeck's gissing bij de alkalidoubletten werd aldus bij haar toepassing op waterstof, en op het geïoniseerde helium, schitterend bevestigd.

Wat geschiedt er, wanneer er twee elektronen in het spel zijn? Nu kan het zijn, dat eerst de *twee spins* in tegengestelden zin aan elkaar gekoppeld worden. Dan heffen zij elkanders draai-impuls op, er is geen instelmogelijkheid meer ten opzichte van den draai-impuls der baanbewegingen, en wij krijgen een termschema van louter singulets. Maar ook kunnen de elektronen hun spins samenstellen tot een van dubbele grootte, van een heele maat $h/2\pi$. Indien deze zich instelt op een baandraaiing L, kan het resultaat zijn een totale draaiimpuls $L + 1$, of L, dan wel $L - 1$. Er zijn nu drie mogelijkheden, en wij krijgen een schema van drievoudige termen. Slechts de draaiingslooze S-term blijft enkelvoudig: er is geen instelling mogelijk van elektronenspin op niets. Brengen wij echter een uitwendig magnetisch veld aan, dan blijken er wederom drie instellingen, er is een magnetische splitsing van ^3S-termen in drieën.

Drie elektronen! Twee daarvan kunnen elkanders spin neutraliseeren. Het overblijvende zal zich op tweeërlei wijze kunnen instellen op de baandraaiingen. Dit geeft een schema van dubbele termen. Ook kunnen de drie elektronen met hun spins samenwerken. De resulteerende spin is dan $1\frac{1}{2}\ h/2\pi$ groot, en er zijn vier instellingen op de baandraaiing mogelijk, met onderling gelijke verschiltrappen van $h/2\pi$, zoodat er draai-impulsen ontstaan met quantumgetallen $L + 1\frac{1}{2}$, $L + \frac{1}{2}$, $L - \frac{1}{2}$, $L - 1\frac{1}{2}$. Wij krijgen een termschema van viervoudige termen. Echter: de S-termen blijven enkelvoudig, en de P-termen blijven drievoudig, omdat daarvoor $L = 1$ is en de grootte van $1 - \frac{1}{2}$ en van $1 - 1\frac{1}{2}$ niet verschilt. Men kan dit ook uitdrukken door te zeggen dat de baandraaiing zich op drie wijzen, met $+ 1$, 0 of $- 1$, instelt op de resulteerende spin.

Op gelijke wijze geeft men rekenschap van het optreden van schemata met wederom enkele, met drievoudige, en met vijfvoudige termen, indien er vier elektronen in het spel zijn, en zoo vervolgens.

Wij moeten hier een einde stellen aan onze beschouwing van wat de spectra, wat de kleuren van het licht der atomen, ons te kennen geven van hun innerlijke gebeurtenissen. Het is een lange weg geweest, dien de spectroscopie gedurende een halve eeuw gegaan is, zonder te kunnen droomen in welk land hij leiden zou. Dank zij de scherpte van de gegevens, hebben onze voorstellingen een strengen toets te doorstaan. Dat zij dien verdragen, verleent ze een groote overtuigingskracht.

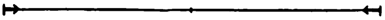
SYMMETRISCHE TRILLINGEN

door A. D. FOKKER

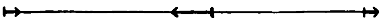
Summary. The different possible types of vibrations are analysed and described for the molecules of *carbon dioxyde, ammonia* and *methane*, and for the crystals of *calcite* and *quartz*. These afford examples and applications of the theory concerning the classes of vibrations in symmetrical arrangements.

Wij willen aan enkele voorbeelden, enkele molecuulsoorten en enkele kristaltralies, toelichten hoe de systematische verdeeling der trillingen van symmetrische structuren in bepaalde klassen 1) ons een denkbeeld kan geven van den vorm der trillingen.

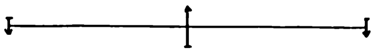
Vooreerst is er het *koolzuurmolecuul*, CO_2, waarvan men, op grond van metingen over de diëlectriciteitsconstante, aanneemt, dat de drie atomen in een rechte lijn liggen. Het ligt voor de hand aan te nemen, dat de twee zuurstofatomen op gelijken afstand van de koolstof liggen. De eenvoudigste wijze om de symmetrie aan te geven is te zeggen dat het molecuul een centrum van symmetrie heeft, waarin bij stilstand het koolstofatoom ligt.



1



2



3

Fig. 1. Pulsatietrilling.
Fig. 2. Verschuivingstrilling.
Fig. 3. Kniktrilling.

Het koolstofatoom zal met zijn drie bewegingsvrijheden bij-

---

1) Brester, Diss. Utrecht; Fokker, Physica **13**, 1, 1933; Arch. du Musée Teyler, (3) **7**, p. 307.

dragen tot de antiphasige bewegingen en trillingen. De twee zuurstofatomen zullen met drie bewegingsvrijheden tot de isophasige, met drie tot de antiphasige bewegingen en trillingen bijdragen. Totaal hebben wij dus te verwachten drie isophasige en zes antiphasige trillingen en bewegingen.

Tot de eerste groep behooren twee rotaties om assen loodrecht op de verbindingslijn der atomen. Wij houden hier over een *isophasige trilling*, waarbij de zuurstofatomen in de verbindingslijn *pulseeren*.

Tot de tweede groep behooren drie translaties. Er blijven over drie *antiphasige trillingen*. Bij eene daarvan *verschuiven* de zuurstofatomen tegelijk en parallel in de verbindingslijn, het koolstofatoom gaat daartegen in om het zwaartepunt op zijn plaats te laten. Bij de laatste twee trillingen wordt het molecuul *geknikt* door bewegingen dwars op de verbindingslijn. Dit kan in twee onderling loodrechte vlakken, door de verbindingslijn gaande, geschieden, en met gelijke frequentie. Men heeft een dubbeltrilling.

De kniktrilling is de langzaamste: haar frequentie wordt als golfdichtheid aangegeven als 667,5 per cm [1]). De snelste trilling is de antiphasige verschuiving [1]): $\nu = 2350 \text{ cm}^{-1}$. De middelste trilling, de isophasige pulsatie, zou een frequentie hebben zeer nabij den eersten boventoon van de kniktrilling. Tengevolge van niet-kwadratische termen in de potentieele energie storen deze elkaar, en men krijgt twee frequenties [2]), $\nu = 1285 \text{ cm}^{-1}$ en $\nu = 1387 \text{ cm}^{-1}$, die in het Raman-effect, bij de lichtverstrooiing, voor den dag zijn gekomen.

Vervolgens kunnen wij aan het *ammoniak-molecuul* denken, NH_3, het stikstofatoom op den top van een stompe driezijdige pyramide, en daarmede gelegen op een drietallige as. Aan de drietallige as beantwoorden isophasige trillingen, en cyclophasige dubbeltrillingen. Het stikstofatoom, op de drietallige as gelegen, kan slechts met zijn bewegingsvrijheid langs de as deelnemen aan de isophasige trillingen. Het draagt twee trillingsgraden bij tot de cyclophasige. De waterstof-atomen zullen drie trillingsgraden bijdragen tot de isophasige, en zes tot de cyclophasige.

De translatie langs de as, en de rotatie om de as, zijn isophasig. Er blijven dus twee isophasige trillingen.

---

[1]) P. E. Martin & E. F. Barker, Phys. Rev. **41**, 291, 1932.

[2]) E. Fermi, Zs. f. Phys. **71**, 250, 1931; Dennison, l.c. Phys. Rev. **41**, 304, 1932.

De andere translaties en rotaties zijn voorbeelden van cyclophasige dubbeltrillingen. Er blijven dus twee cyclophasige dubbeltrillingen over.

Bij de *isophasige trillingen* kunnen de drie opstaande ribben der pyramidefiguur in lengte, en in hoek met de as veranderen. Indien het eerste overweegt, krijgen wij een *pulseering* van het molecuul: dit is een snelle trilling, met een frequentie $\nu = 3336$ per cm. De quantumtheorie geeft redenen, die buiten ons bestek liggen [1]), waarom hier een doublet is, volgens Dennison [2]) met een interval $\Delta\nu = 1{,}6$ cm^{-1}.

Indien de hoekverandering overweegt bij de isophasige trilling krijgen wij een *in- en uitstulping*.

Ook hier is een doublet, met frequenties

$$\nu = 933 \text{ cm}^{-1} \text{ en } \nu = 969 \text{ cm}^{-1}.$$

Bij de zuivere *cyclophasige trillingen* moet het stikstofatoom een cirkel om de as beschrijven. Die kan groot, of klein zijn. In het eerste geval zullen de drie waterstofatomen ten naaste bij in een onveranderden driehoek gezamenlijk en parallel cirkels beschrijven, en het zwaartepunt stil laten. In hun eigen coördinatenkruis beschouwd, is, zoo de cirkeling rechtsom gaat, elk waterstofatoom een derde van den omtrek voor bij zijn rechterbuur en achter bij zijn linkerbuur. Wij zien hier een *verschuivingstrilling*, die sterk elektrisch moment vertoont. $\nu = 1630$ cm^{-1}.

Een andere cyclophasige trilling ontstaat, indien wederom de waterstofatomen rechtsom cirkelen, maar elk bij zijn rechterbuur $\frac{1}{3}$ omtrek achter is, en bij zijn linkerbuur evenveel vóór. Hierbij wordt de driehoek gedeformeerd, terwijl zijn zwaartepunt stilstaat, zoodat ook het stikstofatoom stilstaat. Men zou dit een *gebalanceerde deformatietrilling* kunnen noemen.

Beide trillingsvormen kan men met hun omgekeerde superponeeren. Er ontstaan dan rechtlijnige trillingen. In de verschuivingstrilling loopen de waterstofatomen parallel. In de deformatietrilling zijn hun trillingen òf evenwijdig aan, òf loodrecht op de driehoekszijden.

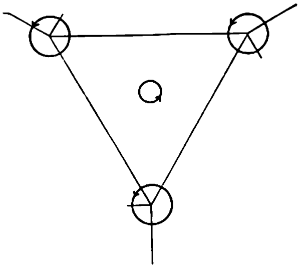
Ik ben geneigd aan de deformatietrilling de gemeten absorptiefrequentie $\nu = 2470$ cm^{-1} toe te schrijven. Wij moeten in het oog

---

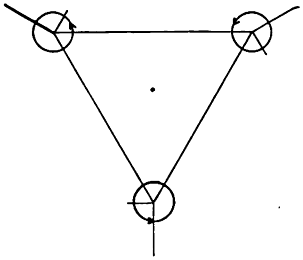
1) D. M. Dennison & G. E. Uhlenbeck, Phys. Rev. **41**, 313, 1932.

2) D. M. Dennison & J. D. Hardy, Phys. Rev. **39**, 938, 1932.

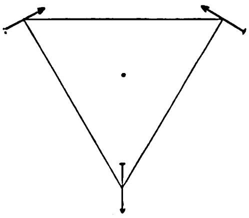
houden, dat de verschuivingstrilling wel niet geheel zonder deformatie, en de deformatietrilling niet geheel zonder verschuiving

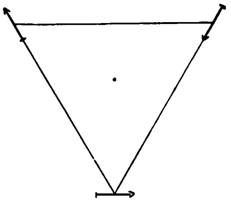


4



5





7

Fig. 4. Verschuivingstrilling.
Fig. 5. Deformatietrilling.
Fig. 6. Lineaire deformatietrilling.
Fig. 7. Lineaire deformatietrilling.

zal zijn. Dit hangt geheel af van den specialen aard der krachtwerkingen. Het zou zelfs kunnen zijn, dat verschuiving en deformatie gelijkelijk voorhanden zijn. Wij kunnen ons bijv. voorstellen, dat de waterstofatomen trillen langs den verbindingsstraal naar het zwaartepunt, in een radiale beurttrilling, met successievelijk $2\pi/3$ phaseverschil. Ook zouden zij een beurttrilling tangentieel kunnen uitvoeren, dwars op de genoemde verbindingsstralen.

Wij gaan nu over tot het *methaan molecuul*, CH_4. Om te beginnen letten wij erop, dat er drie onderling loodrechte tweetallige assen zijn, waarvan een door de aanwezigheid van de beide andere bepaald wordt. Deze laatste noemen wij X- en Y-as. Een trilling zal om de X-as isophasig kunnen zijn. Is zij daarbij isophasig om de Y-as, dan volgt ook hetzelfde voor de Z-as. Is een trilling isophasig om de X-as, en antiphasig om de Y-as, dan is zij ook antiphasig om de Z-as. Een trilling is òf om geen enkele, òf om twee der assen antiphasig. De verschillende groepen duiden wij aan als iso-isophasig, iso-antiphasig, anti-isophasig, en anti-antiphasig.

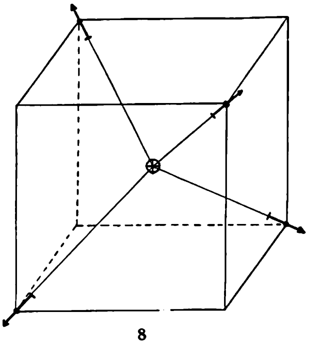
Het koolstofatoom ligt in 't snijpunt der drie assen. Bewegingsvrijheid in de X-richting heeft het alleen in de iso-antiphasige groep, in de Y-richting kan het slechts bij een anti-isophasige trilling bewegen. Het koolstofatoom draagt dus slechts tot elk der antiphasige groepen éène trilling bij. De vier waterstofatomen dragen tot elk der vier groepen drie trillingen bij. In elk der drie slechts om één as isophasige groepen vinden wij een translatie en een rotatie. Er blijven daar dus twee trillingen over. In de iso-isophasige groep blijven er drie trillingswijzen over.

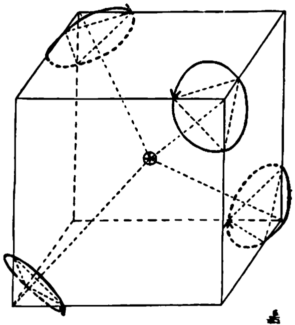
Tot zoover hebben wij nog slechts rhombische symmetrie. Nu komt er voor het methaan nog bij, dat er drietallige assen zijn, waarop de waterstofatomen liggen. Dit maakt, dat de tweetallig iso-isophasige trillingen nader worden onderscheiden. Het koolstofatoom staat daarbij stil. Er is een trilling, die om de drietallige as isophasig is, dus *volledig isophasig*: hierbij moeten de waterstofatomen langs de drietallige assen trillen, het is een *pulseering*. Om de drietallige as is er ook drietallig-cyclophasige dubbeltrilling: daarbij gaan de waterstofatomen in cirkels loodrecht om hun drietallige assen heen (fig. 9). Er is een vaste phasenrelatie: twee paren waterstofatomen passeeren tegelijk de vlakken die hun evenwichtstanden met het koolstofatoom verbinden. Door superpositie van zulk een trilling met haar omgekeerde kunnen wij een rechtlijnige trilling krijgen, waarbij twee paren waterstofatomen, synchroon, elkaar naderen en verlaten. Men zou kunnen zeggen: een *synchrone schaartrilling*.

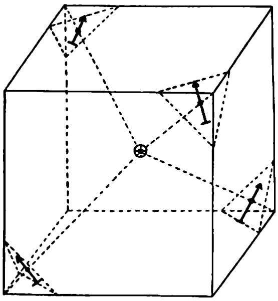
Bij de *tweetallig-antiphasige* trillingen wordt er één as onderscheiden, om welke de trilling isophasig is. Hier kan dus de drietallige as in den trillingsvorm niet meer tot uiting komen. Wat zij wel bewerkt is dat de drie verschillende groepen, zij het in verschillende richting, precies hetzelfde beeld te zien geven, en dus ook gelijke frequentie hebben.

Wij krijgen dus niet driemaal twee onafhankelijke trillingen, maar twee drievoudige trillingen.

Wij kunnen ons deze twee trillingen voor oogen stellen, door eerst aan een *verschuivings*-trilling te denken, waarbij de tetraëder der waterstofatomen niet gedeformeerd wordt, maar, bij vibratie van het koolstofatoom, als geheel daartegen in trilt om het zwaartepunt stil te laten. Bij een andere trillingswijze zouden van twee paren waterstofatomen, met behoud van hun afstand tot het koolstofatoom, het eene naar elkaar toe, het andere van elkaar af kunnen bewegen: een *antichrone schaartrilling* (fig. 10). Bij superpositie van drie zulke, volgens verschillende assen georiënteerde trillingen krijgen wij een trilling, waarbij het koolstof- met een der waterstofatomen samen loodrecht trilt op den driehoek der overige waterstofatomen, die daarbij eenigszins uitwijken (fig. 11).


8


9


10

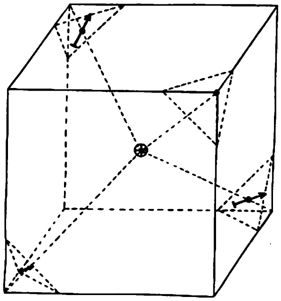

11

Fig. 8. Pulsatietrilling.
Fig. 9. Cyclophasige trilling.
Fig. 10. Antichrone schaartrilling.
Fig. 11. Kniktrilling als superpositie van 3 antichrone schaartrillingen. De bewegingspijlen voor het *C*- en één *H*-atoom zijn weggelaten.

Wij willen nu overgaan tot het *kalkspaat.* De kristaleenheid bestaat uit twee moleculen $Ca\,CO_3$. Recht boven elkander, op gelijke afstanden op een drietallige as, vindt men afwisselend *Ca*, *C*, *Ca*, *C* enz. Door de koolstofatomen gaan horizontaal tweetallige assen, die de zuurstofatomen dragen. In de calciumatomen vindt men symmetriecentra. Tengevolge hiervan verschilt de oriëntatie der twee zuurstofdriehoeken onderling 60°.

Om de drietallige as hebben wij isophasige en cyclophasige trillingen. Deze kunnen alle ten opzichte der symmetriecentra isophasig of antiphasig zijn. Tenslotte kunnen de drietallig isophasige trillingen nog onderscheiden worden in zulke die om de tweetallige assen isophasig zijn, en zulke die daarom antiphasig zijn.

De calciumatomen kunnen alleen medebewegen in trillingen die centrisch antiphasig zijn. Bij de drietallig isophasige trillen zij in de drietallige as, anders loodrecht daarop in de cyclophasige dubbeltrillingen. De koolstofatomen kunnen bij de drietallig isophasige trillingen alleen in de drietallige as medebewegen; en dit alleen wanneer de trilling tweetallig antiphasig is. Overigens kunnen zij centrisch iso-en antiphasig bewegen. Dit laatste geldt ook voor de cyclophasige trillingen, waarin zij op cirkels om de drietallige as bewegen. De zuurstofatomen kunnen in de tweetallig-isophasige trillingen slechts langs de tweetallige as trillen, bij de tweetallig-antiphasige trillingen hebben zij twee vrijheden loodrecht daarop. Bij de cyclophasige trillingen valt dit onderscheid weg. Evenals wij dit bij den waterstofdriehoek der ammoniaktrillingen hebben opgemerkt, zien wij hier, dat hun trilling kan gepaard gaan met verplaatsing van het zwaartepunt van een zuurstofdriehoek. Het zwaartepunt kan ook stil blijven, en zulks nog op twee manieren: de beweging kan complanair zijn in het vlak van den driehoek, zij kan ook loodrecht daarop zijn, drieledig beurtwisselend.

Wij kunnen een lijst maken van de verschillende trillingsvormen, en de deelneming der verschillende atomen daarin.

3-t. as	centrum	2-t. as	2 *Ca*	2 *C*	6 *O*	Beschr. no.
isophasig	isophasig	isophasig	—	—	1	1
,,	,,	antiphasig	—	1	2	2, 3, 4
,,	antiphasig	isophasig	1	—	1	5, 6
,,	,,	antiphasig	1	1	2	7, 8, 9, 10
cyclophasig	isophasig	—	—	(2)	3 × (2)	11, 12, 13, 14
,,	antiphasig		2 × (2)	(2)	3 × (2)	15—20

Bij trilling no. 1 pulseeren de zuurstofatomen langs de tweetallige assen, beide drietallen tegelijk, de calcium- en koolstofatomen staan stil.

Bij trillingen no. 2, 3, 4 staan de calciumatomen stil. De koolstofatomen trillen langs de as, tegen elkander in. De zuurstofdriehoeken trillen: (2) òf parallel aan de as, met hun koolstofatomen mee, (3) òf parallel met de as, tegen hun koolstofatomen in, (4) òf zij vibreeren in denzelfden zin dwars op de drietallige as.

Bij trillingen 5 en 6 trillen de calciumatomen langs de as, tegen elkander in. De koolstofatomen staan stil. De zuurstofdriehoeken pulseeren radiaal, de eene contraheert als de andere expandeert. De calciumatomen loopen (5) op de contraheerende, of, (6), op de expandeerende driehoeken toe.

Bij de trillingen 7—10 bewegen de calciumatomen langs de as en zulks parallel. Eveneens de koolstofatomen. Dit kan geschieden met de calciumatomen mede. Bewegen zich nu ook de zuurstoffen parallel evenwijdig aan de as in dezelfde richting, dan krijgen wij, (7), de *translatie* langs de as. Indien echter het zwaartepunt stil moet blijven, zal de hoogte van' de zuurstofdriehoeken bepaald worden door de hoogten van de calcium- en van de koolstofatomen. Er zijn nog twee trillingsmogelijkheden, (8 en 9), waarbij calciums, koolstoffen en zuurstoffen evenwijdig aan de as zich deels met, deels tegen elkander bewegen. Tenslotte is er nog een trilling (10) waarbij de twee zuurstofdriehoeken, tegen elkander in wringend, om de as vibreeren.

Bij de dubbeltrillingen 11—14 staan de calciumatomen stil. De koolstofatomen kunnen in cirkels om de as gaan, elk aan tegengestelden kant. De zuurstofdriehoeken kunnen, (11), complanair met de koolstoffen medegaan, zoodat het zwaartepunt van de twee CO_3-groepen stil blijft, of wel, (12), de tegenhanger der C-beweging zijn, zoodat het zwaartepunt van elke CO_3-groep stil blijft. De zuurstofdriehoeken kunnen echter ook gedeformeerd worden zonder zwaartepuntsbeweging door, (13), een horizontale deformatietrilling of, (14), door verticale beurttrilling, waarbij de driehoek rondwiebelt.

Bij de dubbeltrillingen 15—20 kunnen de koolstofatomen in cirkels om de as gaan, parallel en aan denzelfden kant. De calciumatomen kunnen hetzelfde doen, en eveneens de zwaartepunten der stikstofdriehoeken. Zoo kunnen zij samengaan in, (15), een *translatie* loodrecht op de as. Moet het zwaartepunt blijven stilstaan, dan is door de cirkeling van twee groepen die der derde bepaald. Er zijn dan nog, (16) en (17), twee dubbeltrillingen, waarbij de zwaartepunten der groepen afzonderlijk bewegen. Echter kunnen de calciumatomen ook nog aan verschillende kanten van hun drietallige as cirkelen. Hun zwaartepunt ligt dan stil, zoodat, (18), bij cirkeling der koolstofatomen, de zuurstofdriehoeken door een zwaartepuntsbeweging daartegen moeten opwegen. Tenslotte kunnen ook de koolstofatomen stil liggen, en de zuurstofatomen hun driehoeken deformeeren door, (19) horizontale of, (20), verticale beurttrillingen, zooals in de trillingswijzen (13) en (14), echter met onderscheid van phaserelatie.

Wij moeten in het oog houden, dat hierboven het karakter der trillingen slechts in hoofdzaak geteekend is. In het bijzonder is op de bewegingen der zuurstoffendriehoeken van toepassing hetgeen hierboven bij het ammoniak over de bewegingen van den waterstoffendriehoek gezegd is.

Uit alle cyclophasige dubbeltrillingen kunnen rechtlijnige trillingen door superpositie gevormd worden.

Wij beschouwen tenslotte nog de trillingen in het *kwarts*kristal, tot welks elementaircel drie silicium- en zes zuurstofatomen behooren. Men stelt zich de structuur het gemakkelijkst voor met behulp van een plattegrond, waarin gelijkzijdige zeshoeken door vierkanten op hun zijden aan elkander geschakeld zijn, en te letten op de zuurstofketens, die in drie verdiepingen in drie onderling $2\pi/3$ verschillende richtingen loopen. De horizontale projectie van die ketens zijn licht geknikt, met hoeken van 150°, zij bestaan uit diagonalen van de vierkanten (fig. 12).

Daar waar twee ketens in opvolgende verdiepingen elkaar kruisen, ligt tusschen vier zuurstofatomen een siliciumatoom. Wij hebben dus overal zuurstoftetraëders met een siliciumkern.

De grondperiode vinden we in den plattegrond als een zeshoek, die zijn hoekpunten heeft in de middens der kleine driehoeken. Er zijn in de geteekende structuur horizontale tweetallige assen door telkens twee overstaande zuurstofatomen. Zij heeft ook verticale zestallige assen, en wel een hexagonale schroefas, die zuurstofatomen en de siliciumatomen op schroeflijnen doet liggen. Deze structuur heeft het kwarts bij temperaturen boven 573°. Bij lagere temperatuur is het niet hexagonaal, maar trigonaal: de verandering bestaat in een kleine verschuiving der zuurstofatomen langs de tweetallige assen. De hoofdas wordt nu een drietallige schroefas, en de zuurstoftetraëders om de siliciumatomen zijn niet meer gelijkzijdig.

Zes siliciumatomen liggen op de grensvlakken van de zeszijdige

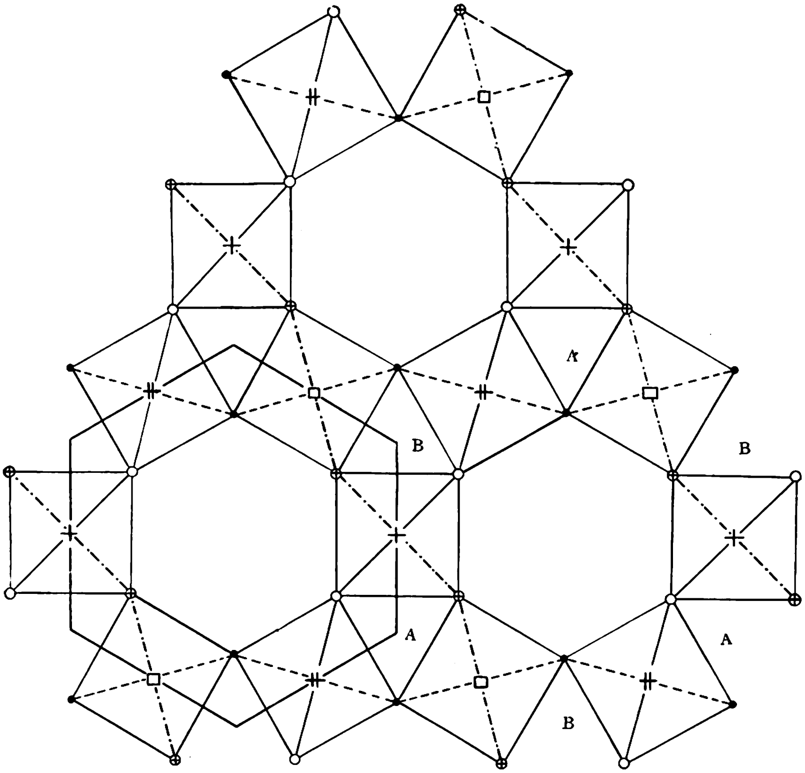


Fig. 12. Plattegrond van kwarts boven 573°. De drieërlei cirkels stellen de zuurstoffen voor in drie verdiepingen. Analoog zijn de siliciums op drie wijzen gemarkeerd, in drie verdiepingen.

cel. Zij behooren tot twee perioden tegelijk. Bij de staande roostertrillingen moet elk siliciumatoom dezelfde beweging uitvoeren als zijn overstaande, waarvan het door een translatie verwijderd is. Deze overstaande is echter door èen tweetallige as verbonden aan een ander silicium, dat met het uitgangsatoom door de drietallige schroefas gelieerd is. Let men op de assenkruisen, in de atoomevenwichtplaatsen, dan brengt een translatie het kruis parallel over. De drietallige schroefas daarentegen, en de daarop volgende tweetallige as, doen de vertikale richting van het kruis omkeeren.

Hieruit volgt, dat voor de tweetallig isophasige trillingen de siliciumatomen slechts twee vrijheden hebben, radiaal en tangentieel, naar de zeshoeken gerekend, en voor de tweetallig antiphasige trillingen één. Voor de zuurstof-atomen is het omgekeerde het geval. Wij kunnen nu den staat opmaken der trillingsgroepen.

3-t. as	2-t. as	3 Si	6 O	Beschr. no.
isophasig	isophasig	2	2	1, 2, 3, 4
,,	antiphasig	1	4	5, 6, 7, 8, 9
cyclophasig		3 × (2)	6 × (2)	10—18

Bij de beschrijving der trillingen zal het dienstig zijn, de twee drietallen equivalente zuurstofatomen te onderscheiden als A en B. Men vindt ze in den plattegrond rondom de kleine driehoeken. In hoofdzaak kunnen wij de trillingswijzen als volgt schetsen.

De zuurstofatomen kunnen bij de eerste groep slechts radicaal trillen, langs de tweetallige assen. Indien de drietallen A en B simultaan op de drietallige as in loopen, (1), blijven de zwaartepunten der tetraëders nagenoeg op hun plaats. De silicium atomen zullen nauwelijks bewegen. Indien de twee drietallen dat antichroon doen, zullen de tetraëderzwaartepunten zich tangentieel bewegen. De siliciumatomen kunnen nu of, (2), met de tetraëderzwaartepunten medetrillen, of (3), tegen de tetraëderzwaartepunten in trillen, beide malen in tangentieele richting. De siliciumatomen kunnen ook, (4), radiaal trillen. Daarbij zullen de zuurstofatomen nagenoeg stil liggen.

Bij de tweetallig-antiphasige trillingen kunnen de zuurstofatomen verticaal trillen. Doen de drietallen A en B dat simultaan, dan kunnen, (5), de siliciumatomen met ze medegaan: dat is de verticale *translatie*, maar zij kunnen ook, (6), daar tegen in trillen. Trillen de drietallen A en B verticaal, maar antichroon, (7), dan blijven de tetraëderzwaartepunten, en eveneens de siliciumatomen vrijwel stil liggen. Trillen de zuurstoffen tangentieel, en A en B simultaan, (8), dan zullen de siliciumatomen vrijwel stilliggen. Dit is ook het geval, wanneer de tangentieele beweging der drietallen A en B, in (9), antichroon gaat.

De cyclophasige dubbeltrillingen overziet men in drie groepen van drie, al naar het gedrag der zuurstofdrietallen A en B. Bewegen deze tegelijk en horizontaal, en gaan de siliciums mede, dan krijgen wij, (10), de horizontale *translaties*. Ook kunnen, (11), de siliciums alle tegelijk horizontaal tegen de gezamenlijke zuurstoffen in trillen. Wij kunnen ook een horizontale trilling hebben van de zuurstofatomen A tegen de zuurstofatomen B, (12), en de siliciumatomen nagenoeg stilstaande. Dit zouden drie verschuivingstrillingen zijn. Hierna krijgen wij drie deformatietrillingen. De plattegrond der drietallen A en B kan zich deformeeren. Dit kan aldus geschieden, (13), dat de overeenkomstige hoekpunten der driehoeken, dat zijn dus projecties van twee evenhoog gelegen zuurstofatomen, tegelijk de scherpste hoeken hebben. Daarbij verplaatsen zich de zwaartepunten der tetraëders niet, en de siliciumatomen evenmin. Het kan ook zijn, dat op het oogenblik dat van twee overeenkomstige driehoekspunten de eene den scherpsten hoek heeft, de andere den minst scherpen heeft. Dan verplaatsen zich de tetraëderzwaartepunten. De siliciumatomen kunnen nu (14), met de tetraëderzwaartepunten medegaan, of, (15), daar tegenin gaan.

Tenslotte zijn er nog de verticale trillingen. In elk zuurstofdrietal zal er een beurttrilling zijn, met tusschenpoozen van $\frac{1}{3}$ trillingstijd. Doen de overeenkomstige, (even hoog gelegen) atomen van de drietallen A en B dat simultaan, dan verplaatsen zich de tetraëderzwaartepunten. Hierbij kunnen, (16), de siliciums zich daarmede bewegen, of, (17) daartegen in.

Indien de overeenkomstige atomen der drietallen A en B antichroon loopen, (18), dan verplaatsen zich de zwaartepunten der tetraëders nauwelijks, de siliciumatomen zullen zich nauwelijks bewegen.

Wij kunnen nog eens herhalen, dat het van de interne krachtwerkingen afhangt, of deze schematisch aangegeven trillingstypen zuiver optreden. Het kunnen ook hybriden zijn, die aan den dag treden.

HAARLEM, TEYLER'S STICHTING.

DER FARADAY-EFFEKT IN PARAMAGNETISCHEN LÖSUNGEN

VON

C. J. GORTER.

§ 1.

Besonders nach den bekannten Untersuchungen von JEAN BECQUEREL und DE HAAS [1]), welche bei tiefen Temperaturen einen einfachen Zusammenhang zwischen der magnetischen Drehung der Polarisationsebene und paramagnetischen Erscheinungen erkennen liessen, ist das Interesse für diesen längst bekannten FARADAY-Effekt wieder erwacht, so dass er in den letzten Jahren wieder Gegenstand mehrerer experimenteller und theoretischer [2]) Untersuchungen gewesen ist.

BECQUEREL und DE HAAS und unabhängig von ihnen (schon vorher) LADENBURG [3]) haben zwischen einer positiven „diamagnetischen" Drehung der Polarisationsebene und einer „paramagnetischen" Drehung, welche mit der BOLTZMANN-Verteilung über die ZEEMAN-Komponenten eines magnetischen Grundniveaus zusammenhängt, und welche beide Vorzeichen haben kann, unterschieden.

SERBER [4]) hat in letzterer Zeit gezeigt, dass man noch eine dritte Art magnetischer Drehungen angeben kann, welche, wie die diamagnetische Drehung, an sich unabhängig von der Temperatur ist, aber im Gegensatz zu dieser verschiedene Vorzeichen haben kann; diese Drehung hängt, wie der Van Vlecksche temperaturunabhängige Paramagnetismus, mit den Nichtdiagonalelementen der Matrix des magnetischen Momentes zusammen.

---

[1]) JEAN BECQUEREL u. W. J. DE HAAS, *Comm. Leiden* 193a, 199a, 199b, 204a, 211b, 211c.

[2]) R. DE L. KRONIG, *Zeitschr. f. Phys. 45*, 458 u. 508, 1927; R. LADENBURG, *Zeitschr. f. Phys. 46*, 160, 1927; H. A. KRAMERS, *Comm. Leiden* 68b und *Proc. Amst. 33*, 959, 1930; L. ROSENFELD, *Zeitschr. f. Phys. 57*, 835, 1930; R. SERBER, *Phys. Rev. 41*, 489, 1932.

[3]) R. LADENBURG, *Zeitschr. f. Phys. 30*, 890, 1925.

[4]) l. c.

Serbers Betrachtungen beziehen sich auf den Fall, dass die Energieniveaus der Moleküle sich derartig in Gruppen verteilen, dass die Energiedifferenzen $E_R - E_S = h\nu(r,s)$ innerhalb einer Gruppe klein sind gegen $h\nu$ und gegen $(h\nu - E_R)$, während kT gross ist gegenüber den Energiedifferenzen in der niedrigsten Niveaugruppe (n) und klein gegen die Energiedifferenzen zwischen dieser und der nächsthöheren Gruppe.

Die Verdet-Konstante, welche die Drehung pro cm pro gauss angibt, wird in diesem Fall gegeben durch [1]):

$$V = N \Sigma_{(n)} \frac{\nu^2 A\,(n',n)}{(\nu^2\,(n',n) - \nu^2)^2} + \frac{\nu^2 B\,(n',n)}{\nu^2\,(n',n) - \nu^2} + \frac{\nu^2 C\,(n',n)}{T\,(\nu^2\,(n',n) - \nu^2)}\,, \quad (1)$$

wo N die Anzahl der Moleküle im cm^3 angibt.

Man findet also im Term mit A die diamagnetische Drehung zurück; sie hat immer das positive Vorzeichen und ist bei Annäherung an eine Absorptionslinie dem Quadrat von $(\nu^2\,(n',n) - \nu^2)$ umgekehrt proportional. Der Term mit C gibt die paramagnetische Drehung, diese kann sowohl negativ als positiv sein und ist der absoluten Temperatur und $(\nu^2(n',n) - \nu^2)$ umgekehrt proportional. Der Term mit B ist, wie der A-Term, an sich temperaturunabhängig und wie der C-Term, umgekehrt proportional $(\nu^2(n',n) - \nu^2)$. B und C können sowohl positiv als auch negativ sein.

Für diamagnetische Substanzen ist $C = O$ und der B-Term meistens positiv oder klein, so dass man im allgemeinen positive Drehungen erhält [2]).

In paramagnetischen Substanzen können a priori ausser den A-Termen sowohl B- wie C-Terme auftreten; nur das Studium der Temperaturabhängigkeit kann zwischen diesen Möglichkeiten entscheiden. Bei sehr tiefen Temperaturen überwiegen in manchen paramagnetischen Substanzen die C-Terme. Wenn bei diesen

---

[1]) Wenn der Brechungsexponent n von 1 merklich verschieden ist, muss man noch mit $\frac{(n+2)^2}{9n}$ multiplizieren.

[2]) Die negative Drehung des $TiCl_4$ soll negativen B-Termen zuzuschreiben sein.

Temperaturen kT nicht mehr gross ist gegen die magnetische Aufspaltung des Grundniveaus, kann man oft sehr schön die paramagnetische Sättigung studieren [1]), denn wenn das Grundniveau ohne Magnetfeld zweifach entartet ist, fällt die Drehung einfach proportional mit der Magnetisierung aus [2]).

Bei höheren Temperaturen, wo die Drehungen im allgemeinen viel kleiner sind, wird die Messgenauigkeit von den an künstlichen Kristallen oft auftretenden Rissen und Unregelmässigkeiten stark beeinträchtigt. Es hat darum Vorteile bei diesen Temperaturen von Lösungen Gebrauch zu machen. Allerdings ist man dadurch andererseits auf ein verhältnismässig kleines Temperaturgebiet beschränkt.

Es sind im Laufe der Zeit ziemlich viele Messungen über den FARADAY-Effekt in paramagnetischen Lösungen angestellt worden [3]); das Material ist aber lückenhaft, oft nicht sehr zuverlässig, und es ist nie systematisch bearbeitet worden. Es ist die Absicht dieser Notiz, ohne viel Zahlenangaben die Hauptzüge der Phenomäne hervorzuheben an Hand der Literatur und eigener Messungen.

§ 2.

Die erste Frage, welche man stellen kann, ist, inwieweit dem gelösten paramagnetischen Ion als solches eine spezifische Drehung zuzuschreiben ist.

Die molekulare Drehung wird meistens definiert durch:

$$D_x = M_x \frac{V - d_w V_w / s_w}{d_x}, \tag{2}$$

wo d_x und d_w die Dichten der Substanz und des Lösungsmittels in der Lösung sind, und s_w die Dichte des reinen Lösungsmittels, während M_x das Molekulargewicht der Substanz x bereichnet und V_w bzw. V die VERDET-Konstanten des Lösungsmittels bzw. der Lösung. Die molekulare Drehung wird meistens in die des Wassers von 4° bei der betrachteten Wellenlänge ausgedrückt [1]).

---

[1]) JEAN BECQUEREL u. W. J. DE HAAS, l. c.; JEAN BECQUEREL, W. J. DE HAAS u. J. v. D. HANDEL, *Comm. Leiden* 218a.

[2]) Siehe für die Theorie besonders: H. A. KRAMERS, l. c.

[3]) Siehe für die ältere Literatur: WINKELMANNS, *Hdb. der Phys.* V; weiter: *Int. Crit. Tables* VI, 246; G. J. ELIAS, *Ann. der Phys.* *35*, 299, 1911; L. R. INGERSOLL, *J. Opt. Soc. Am.* *6*, 663, 1922.

Schon für diamagnetische Substanzen ist D_x bei Änderung der Konzentration nur in erster Näherung als Konstante zu betrachten. Dies rührt offenbar einerseits daher, dass für die Drehungen der verschiedenen Moleküle die lineare Mischungsregel nicht genau gilt, zweitens teilweise auch daher, dass man in obiger einfacher Formel nicht, wie streng genommen notwendig ist, der Änderung des Brechungsexponenten Rechnung getragen hat [2]). Die Unsicherheiten in der Bestimmung der Molekulardrehungen betragen einige Zehntel der Molekulardrehung des Wassers. Wenn man den Einfluss des H^+-Ions auf die Drehung des Wassers abschätzt, in ähnlicher Weise, wie es für dessen Einfluss auf die Refraktion und den Diamagnetismus gemacht worden ist [3]) (etwa — 0,3 pro Grammion), kann man auch die Drehungen pro Ion angeben. Sie betragen etwa [4])

für Na^+: 0,5, für K^+: 0,8, für Ca^{++}: — 0,2, für Ba^{++}: 1,9,
für NO_3^-: 1,0, für $SO_4^=$: 2,4, für Cl^-: 4,8, für J^-: 18,0.

Die Drehungen der paramagnetischen Ionen sind im allgemeinen weniger studiert worden. Sei den Salzen der seltenen Erden scheinen die Molukulardrehungen ziemlich gut unabhängig von der Konzentration zu sein, wenn man genügend weit von den Absorptionsbanden entfernt ist [5]). In der Eisengruppe zeigen aber z. B. die Ferrilösungen sehr variable Molekulardrehungen. Wie auch Pillai bemerkt, rührt dies wohl daher, dass die breiten Absorptionsbanden im Sichtbaren mit der Konzentration und mit dem Anion veränderlich sind.

---

[1]) Es scheint uns nicht zweckmässig, wie Schönrock macht, eine Verdet-Konstante für die gelöste Substanz einzuführen, weil eine solche sich auf die Volumeinheit bezieht, und die lineare Mischungsregel für die Volumina meistens viel weniger gut erfüllt ist als für die Drehungen. O. Schönrock, *Zeitschr. f. Phys. 46*, 314, 1928 und *78*, 707, 1932.

[2]) Siehe Fussnote 1 S. 2.

[3]) K. Fajans u. F. Joos, *Z. f. Phys., 23*, 1, 1924; P. Weiss, *J. de Phys. 1*, 185, 1930.

[4]) Siehe z. B. auch: R. de Malleman, J. Paulus u. P. Antoine, *Journ. de Phys. 1*, 144, 1930.

[5]) P. K. Pillai, *Ind. Journ. of Physics VII*, 87, 1932; vgl. auch die die Konstante C_2 bei O. Schönrock, *Zeitschr. f. Phys. 78*, 707, 1932.

§ 3.

Verschiedene Ionen der Seltenen Erden zeigen grosse negative Drehungen. Die Drehungen des C^{+++}-, Pr^{+++}- und Nd^{+++}-Ions betragen etwa die 75-, 72- und 45fache Molekulardrehung des Wassers.

Ollivier[1]) hat die Temperaturabhängigkeit der Molekulardrehung des Ceronitrats studiert und gefunden, dass sie in erster Näherung dem Curieschen Gesetze entspricht zwischen 0° und 70°. In zweiter Näherung beschreibt Ollivier die Drehung mit dem Curie-Weissschen Gesetz:

$$D = \frac{C}{T - \Theta}. \tag{3}$$

Wenn man sich nur für die Drehung des Ce-Ions interessiert, muss man eine Korrektion für die Drehung des Nitrations anbringen. Aus den Angaben Olliviers findet man, wenn man noch eine kleine Korrektion für den vermutlich nicht richtig bestimmten Wassergehalt anbringt, ungefähr: $\Theta = -30°$ K.

Wir haben analoge Ergebnisse erhalten für konzentrierte Lösungen von Cerochlorid, Praseodyumchlorid und Neodymchlorid zwischen 15° und 80°. Die Θ-Werte lagen dabei zwischen —70° und —90°. Bei grösserer Verdünnung nahmen die $|\Theta|$-Werte aber ab.

Auch bei den Untersuchungen über die Suszeptibilitäten hydratierter Salze hat man ziemlich bedeutende Abweichungen vom Curieschen Gesetz gefunden[2]); diese rühren daher, dass die Aufspaltungen des Grundniveaus des magnetischen Ions, welche von den Wassermolekülen verursacht werden, von der Grössenordnung von kT sind[3]). Ähnliches muss man also auch für die Drehungen erwarten, aber man kann nicht entscheiden, ob das die einzige Ursache der Abweichungen vom Curieschen Gesetz ist, oder aber dass auch Terme vom B-Typus (in Gl. 1) auftreten, welche dann dem Van Vleckschen temperaturunabhängigen Paramagnetismus entsprechen würden, welcher in der ersten Hälfte der Gruppe der Seltenen Erden auftritt. Die Tatsache, dass unsere $|\Theta|$-Werte grösser sind als die bei den Suszeptibilitäten gefundenen, könnte eine Andeutung dafür sein, dass solche *B*-Terme beträchtlichen Einfluss haben könnten.

---

[1]) H. Ollivier, *C. R. 186*, 1001, 1928 und *191*, 130, 1930.

[2]) C. J. Gorter u. W. J. de Haas, *Comm. Leiden* 218a; C. J. Gorter, *Arch. du Musée Teyler*, *7*, 193, 1932.

[3]) W. G. Penney u. R. Schlapp, *Phys. Rev. 41*, 194, 1932; C. J. Gorter. *Phys. Rev. 42*, 437, 1932.

Das Studium der Dispersion der Drehung zeigt, dass man im Sichtbaren mit der Annahme einer einzelnen Frequenz $\nu(n',n)$ auskommen kann; die korrespondierende Wellenlänge liegt bei etwa 2500 Å. Kürzlich haben aber Roberts und Wallace [1]) die Dispersion der *Ce*-Drehung auch im ultravioletten Spektralgebiet studiert. Sie fanden, dass man eine schwachen Bande bei 2960 Å und eine sehr starke Bande bei 2390 Å annehmen muss. Becquerel und de Haas fanden bei tiefen Temperaturen 2370 Å. Nach den Untersuchungen Freeds [2]) und Roberts befinden sich in der Nähe van 2400 Å tatsächlich einige starke Absorptionsbanden, welche dem *Ce*-Ion zuzuschreiben sind; Freed vermutet, dass sie Übergänge nach der 5*d*-Schale bedeuten.

Das Verhältnis zwischen der experimentell im Sichtbaren gefundenen Drehung und der „paramagnetischen Drehung", welche man nach der Ladenburgschen Formel [3]) erwarten würde, wenn man die Existenz eines virtuellen Oszillators mit der Stärke 1 und der „Wellenlänge" $\lambda = 2390$ Å annehmen würde, ist $f' = 0{,}033$.

Nun hat Dr. Serber mich freundlicherweise darauf hingewiesen, dass, wenn man die Absorptionsbande dem Übergang $4^2F_{5/2} \rightarrow 5^2D_{3/2,5/2}$ zuschreibt, man $f' = \frac{15}{7} f$ erwarten muss, wo f die totale Oszillatorenstärke des Überganges $4\ f \rightarrow 5d$ ist. Um die Grössenordnung abzuschätzen, kann man Wasserstoff-Übergangswahrscheinlichkeiten heranziehen, und findet dann $f' = \frac{15}{7} \times 0{,}0095 = 0{,}020$.

Die Grössenordnungsmässige Übereinstimmung mit den Messungen ist nicht schlecht, besonders wenn man bedenkt, dass sowohl die Vernachlässigung eventueller B-Terme als auch die Vernachlässigung des Bandes 2960 Å die experimentelle Zahl zu gross machen. Wo die starke Verbreiterung der Banden bei 2400 Å und auch die ziemlich grosse Oszillatorenzahl [4]) beweisen, dass man es mit Übergängen zu einer äusseren Schale zu tun hat, scheint die FREED-SERBERsche Deutung dieser Banden sehr plausibel.

---

[1]) R. W. Roberts u. L. A. Wallace, *Nature 130*, 890, 1932.

[2]) S. Freed, *Phys. Rev.* 38.

[3]) l. c.

[4]) Übergänge innerhalb der 4*f*-Schale sind „verboten", aber treten mit Oszillatorenzahlen von der Grössenordnung 10^{-6}—10^{-7} bei Pr^{+++} und Nd^{+++} und anderen Seltenen Erden auf; R. Tomaschek, *Physik. Zeitschr. 33*, 878, 1932; *Nature 130*, 740, 1932; Jean Becquerel, *Physik. Zeitschr. 9*, 94, 1908.

Die Dispersion der Drehung von Pr^{+++} und Nd^{+++} ist sehr viel geringer , so dass es zur Zeit kaum möglich ist, die Lage von $\lambda(n',n)$ abzuschätzen.

§ 4.

Die Messungen in der Eisengruppe sind im allgemeinen weniger genau als in der Gruppe der Seltenen Erden; erstens sind die Rotationen selbst kleiner und zweitens wirken die breiten Absorptionsbanden im sichtbaren Gebiet oft sehr störend. Auch auf mangelnder Konstanz der Ionendrehung muss man vorbereitet sein, wo schon die Suszeptibilitäten oft mit der Vorbehandlung variieren [1]) und auch die Absorptionsspektren keineswegs unabhängig von Konzentration, Anion und Temperatur sind.

Dass die Drehungen sehr viel kleiner als bei den Ionen der Seltenen Erden sind, hängt wohl auch damit zusammen, dass der Magnetismus hauptsächlich von den Elektronenspins herrührt, und dieselben nur in sofern zur optischen Drehung beitragen, als sie mit den Bahnen gekoppelt sind.

In Übereinstimmung hiermit hat das Mn^{++}-Ion (die freien Mn^{++}-Ionen haben ^6S-Terme) nur eine sehr schwache Drehung. Zwar treten in Ferrilösungen (auch freie Fe^{+++}-Ionen haben ^6S-Terme) sogar ziemlich grosse Drehungen auf im sichtbaren Spektralgebiet, aber die grossen Absolutwerte rühren, im Gegensatz zu den Drehungen der anderen Ionen, welche Absorptionsbanden weit im Ultravioletten zuzuschreiben sind, von der unmittelbaren Nähe der Absorptionsbanden bei 4200 Å und 5700 Å her [2]). Eine einigermassen konstante Ionendrehung lässt sich für das Fe^{+++}-Ion nicht angeben. Zwar nimmt die Drehung in einer Ferrisulfatlösung stark mit der Temperatur ab, aber die Absorption ändert sich dabei auch sehr stark, so dass man kaum entscheiden kann, inwieweit mir mit dem B- oder dem C-Typus zu tun haben.

Die Drehungen einer Kobalt-, Nickel- und Ferrilösungen sind eingehend von **Roberts** und seinen Mitarbeitern [1]) bei Zimmertemperatur studiert worden. Er findet z. B., dass man die Drehung des Kobaltions in Kobaltsulfat im sichtbaren und ultravioletten Spektralgebiet beschreiben kann mit zwei Absorptionsbanden bei ungefähr 5100 Å und 1100 Å. Sie gehören dem Typus B oder C an. Er nimmt das letzte an und findet etwa $f' = -0{,}57 \cdot 10^{-4}$ bzw. 0,05, während man für $\lambda = 5100$ Å aus Absorptionsmessungen $f = 2{,}18 \cdot 10^{-4}$ Ersatzoszillatoren findet. Es scheint uns aber durchaus nicht sicher, dass die Drehung nicht dem B-Typus angehört.

---

[1]) Siehe z. B. H. FAHLENBRACH, *Ann. der Phys.* *13*, 265 und *14*, 521, 1932; G. FOEX, *Journ. de Phys.* *3*, 337, 1932; C. J. GORTER, *Physik. Zeitschr.* *33*, 546, 1932.

[2]) C. E. RICHARDS u. R. W. ROBERTS, *Phil. Mag.* *3*, 770, 1927.

Die Drehung des Nickelions ist positiv. Sie beträgt für 5461 Å etwa das 3,6 fache der Molekulardrehung des Wassers und hat durchaus den Charakter einer diamagnetischen Drehung [2]). Als Funktion der Temperatur nimmt die Drehung zwar langsam ab, aber auch die diamagnetischen Drehungen sind niemals völlig unabhängig von der Temperatur. Wo die Drehung grösser ist als die der meisten Kationen, scheint es sehr wohl möglich, dass sie mit dem Paramagnetismus zusammenhängt und teilweise dem B-Typus angehört.

Die Drehung des Ferro-Ions dagegen ist wieder negativ. So folgt in erster Näherung das **Curie**sche Gesetz, so dass man wieder mit einem C-Term zu tun hat, wie bei den seltenen Erden. Für grünes Licht beträgt (bei 20°) die Drehung etwa die — 15,5fache Drehung des Wassers.

Die Drehungen des Chromi-Ions und des Kupri-Ions sind noch nicht eingehend untersucht worden — beim ersteren Ion wirkt die starke Absorption sehr störend.

Die Messungen werden, auch im ultravioletten Spektralgebiet, fortgesetzt.

Den Herren Prof. **Fokker**, Prof. **Van Vleck** und Dr. **Serber** möchte ich für fördernde Diskussionen danken. Den Herren Professoren **Becquerel**, **de Haas** und **Clay** bin ich für die freundliche Überlassung einiger Hilfsmittel für die experimentellen Untersuchungen dankbar.

---

[1]) R. W. Roberts, J. H. Smith u. S. S. Richardson, *Phil. Mag.* *44*, 912, 1922; R. W. Roberts, *Phil. Mag.* *49*, 397, 1925 u. *9*, 361, 1931; siehe auch Fussnote 3 S. 6.

[2]) Auch Ollivier (l. c.) hat angegeben, dass die Drehung von $NiCl_2$ (welche hauptsächlich von Chlor verursacht wird) in alkoholischer und wässeriger Lösung in erster Näherung unabhängig von der Temperatur ist.

Zusatz bei der Korrektur.

Kürzlich kamen noch einige neueren Strassburger Messungen zu unserem Kenntnis (H. Ollivier, J. Pernet u. J. Lesne, *C. R*, *194*, 2301, 1932 und J. Pernet, *C. R*, 195, 376, 1932). Sie beziehen sich auf Lösungen von Nickelchlorid und Cerochlorid; die Abhängigkeit der Molekulardrehungen von der Konzentration und der Temperatur wurde eingehend untersucht. Sie bestätigen unsere eigenen Resultate für diese Ionen und erweitern dieselben. Die langsame Variabilität, welche die Molekulardrehungen mit der Konzentration zeigen, weist auf eine langsame Verschiebung nach der langwelligen Seite für die ultravioletten Absorbtionsbanden mit wächsender Konzentration hin.

SOME REMARKS ON THE THERMODYNAMICS OF SUPRACONDUCTIVITY

BY

C. J. GORTER.

Many of the physicists, who have done experimental or theoretical work in the domain of supraconductivity have suggested that the transitions between the supraconductive and the normal states of a metal might be considered as transitions of phase [1]). DE HAAS' and VOOGD's recent investigations [2]) on single crystals, in which the extreme sharpness was demonstrated of the transitions, which occur if the temperature or the magnetic field (in the longitudional case [3])) is varied, have given new evidence for this idea.

It is the purpose of this note to consider some relations to which one is lead, if one tries to work out this idea in the thermodynamic way.

If we consider a metal body (weight 1 gram) in a homogeneous external magnetic field H_1 of fixed direction (a field, that would be homogeneous and have the value H_1, if the body were not present, all other things remaining unchanged), we can describe the state of that body by the parameters H_1 and T, as long as the body is not supraconductive. If on the contrary the body is supraconductive we cannot completely describe the state by these parameters. For, if the metal has become supraconductive in an external field G, every change H_1 will give rise to such persisting currents, that the magnetic flux through any closed line on the surface of the body will remain constant. As MAXWELL'S equations are linear the magnitude of the persisting currents will be proportional to $(H_1 - G)$, if the body remains supraconductive in its entirity. So it is obvious that, besides H_1 and T a third parameter is wanted to indicate the different strengths of the persisting currents. We choose not $H_1 - G$, but G to be this parameter.

---

[1]) P. LANGEVIN, Rapp. et Disc. 1er Conseil Solvay, 311, 1911.
P. W. BRIDGEMAN, Journ. Wash. Acad. Sc., 11, 455, 1921.
H. KAMERLINGH ONNES, Comm. Leiden Supp. 50*a*, 1924.
W. H. KEESOM, Rapp. et Disc. 4ième Conseil Solvay, 289, 1924.
W. J. DE HAAS, J. de Physique, 9, 265, 1928.
R. DE L. KRONIG, Z. f. Phys., 78, 744, 1932.
P. EHRENFEST, Comm. Leiden Supp. 75*b*, 1933.

[2]) W. J. DE HAAS and J. VOOGD, Comm. Leiden 212*c*, 214*c*, 1931.

[3]) Let us therefore fix our thoughts on a body, the dimensions of which in the direction of the field are much larger than those in the transversal directions.

If the body is and remains supraconductive, we can only introduce variations of H_1 and T, but not of G, so it is possible to carry out cyclical processes at constant G only. Thus it seems natural to apply the thermodynamic methods to transitions from all the states with a common G-value to the normal states, and to consider H_1 and T as independent variables.

At the moment such a treatment seems to be possible only for the states with $G = 0$, as for the other states neither calorimetric measurements nor systematic studies of the thresholdvalues and transitiontemperatures are at our disposition.

The work[1]), which is done by the body on the external field is: $-H_1 d\sigma$, where σ is the total magnetic moment of the body in the direction of H_1.

So the first law of thermodynamics gives:

$$dQ = dE - H_1 d\sigma \quad \text{. . . . .} \quad (1)$$

where dQ is the supply of heat and dE the change of the internal energy.

If we introduce H_1 and T as independent variables and then apply the second law of thermodynamics, we get:

$$dQ = \left[\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right) - H_1 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)\right] dT + T\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right) dH_1 \quad \text{. .} \quad (2)$$

If we are not too near to the transitioncurve $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)$ will be zero, as well for the supraconductive states as for the normal metal [1]). If the body remains entirely supraconductive or normal, we have thus:

---

[1]) This work consists of a strengthening of the current in the coil which brings about the magnetic field; if for a moment OHM's resistance may be neglected for the coil, it must give off the energy $(-H_1 d\sigma)$ somehow, if the current is to remain constant.

$$dQ = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right) dT = c\,dT \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

where c is the specific heat.

In fig. 1 the transitioncurve has been drawn in the $H_1 : T$-diagram.

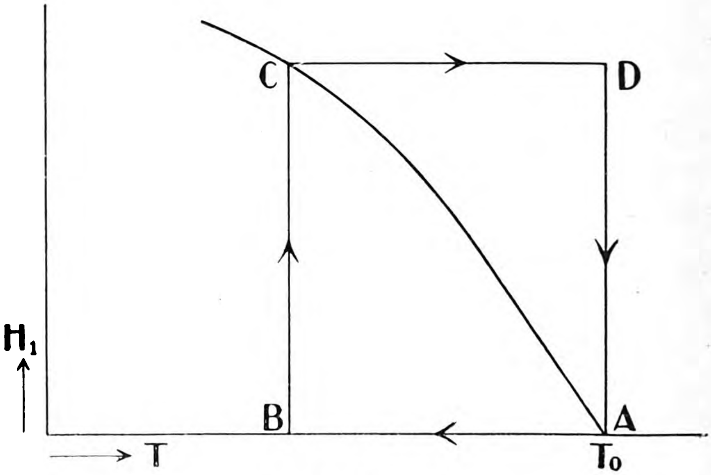


Fig. 1.

Let us now consider the circular process: ABCDA of this figure. As we know from KEESOM's and KOK's measurements [2]) that the heat of transformation at A is zero, the first law of thermodynamics gives, if we neglect again the susceptibility of the normal metal:

$$-\int_{T_2}^{T_0} \triangle\, c\, dT + Q_2 = -\int_0^{\sigma_2} H_1\, d\sigma + H_2\sigma_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

where $\triangle\, c = c_s - c_n$ is the difference between the specific heats in the supraconductive states ($G = 0$) and in the normal states, the index (2) indicates the transitionpoint at C, and Q_2 is the heat of transformation.

---

[1]) We neglect the susceptibility of the normal metal, which may be of the order of 10^{-6}.

[2]) W. H. KEESOM and J. A. KOK, Comm. Leiden 221e, 1932.

As we pointed out before: $\sigma = -k(H_1 - G) = -kH_1$, where k is a constant depending on the shape and the orientation of the body. If the body has the shape of a long ellipsoid, orientated in the direction of the field, we have: $k = 1/4\pi d$, where d is the density of the metal. In all other cases k will be larger [1]).

Equation (4) becomes:

$$-\int_{T_2}^{T_0} \triangle c\, dT + Q_2 = -\frac{1}{2} k H_2^2$$

$$Q_2 = \int_{T_2}^{T_0} \triangle c\, dT - \frac{1}{2} k H_2^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Now we can determine by means of the second law of thermodynamics a limit for the combinations of H_1 and T at which the transition to the normal state could occur. To this end we write down the second law of thermodynamics for our cyclical process: $\int dQ/T \leq 0$. We find:

$$\frac{1}{2} k H_2^2 \geq \int_{T_2}^{T_0} \triangle c\, dT - T_2 \int_{T_2}^{T_0} \frac{\triangle c}{T} dT \quad . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

So we see that a lowest limit is given for the fields or temperatures at which supraconductivity could be disturbed. Because k is the smallest for a very long ellipsoid orientated in the direction of the field, the limits lie highest, if we have to do with such an ellipsoid.

Now we must remember, that experimentally a sharp thresholdvalue for the magnetic disturbance only exists if the body is approximately such an ellipsoid. For this shape and orientation $k = 1/4\pi d$, and the limitary curve becomes:

$$\frac{H_2^2}{8\pi d} = \int_{T_2}^{T_0} \triangle c\, dT - T_2 \int_{T_2}^{T_0} \frac{\triangle c}{T} dT \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

---

[1]) For a sphere: $k = 3/8\pi d$; and for a very thin plate perpendicular to the field $k \rightarrow \infty$.

As the transition at C is not reversible, the second law of thermodynamics permits that supraconductivity persists at higher values of H_1 and T, than are indicated by (7). But at such combinations of field and temperature the thermodynamical potential 1) (Z-function) is lower for the normal state than for the supraconductive state e. a. the normal state is the more probable one. So we have to do with a phenomenon of retardation (overheating) if the latter is not realised.

De Haas' and Voogd's observation that the disturbance in the longitudinal case occurs always at exactly the same field, indicates however that we have not to do with phenomena of retardation. So one would expect the limitary-curve (7) to be identical with the transition-curve for longitudinal disturbance.

At the present this can only be controlled for tin in the immediate neighbourhood of T_0. The tangent to the limitary curve (7) is given by:

$$\left(\frac{dH_2}{dT_2}\right)^2 = \frac{4\pi d \triangle c_0}{T_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

a formula, which has been formulated formerly by A. J. Rutgers 2).

For tin we have: $\triangle c = 0{,}0024$ cal./mol. 3), $T_0 = 3{,}71$ cal./mol., $d = 7{,}4$, we thus expect: $dH_2/dT_2 = 146$ gauss/degree. Experimentally $dH_2/dT_2 = 140$ gauss/degree is found 4), which agrees with the ,,theoretical'' value within the limits of accuracy 5).

The applicability of Rutgers' formula (8) shows that

---

1) The Z-function $(E - TS - H_1\sigma)$ is for the supraconductive state:

$$Z_s = T\int_T^{T_0} \frac{c_s}{T}\,dT - \int_T^{T_0} c_s\,dT + \frac{1}{2}kH_1^2 + AT + B$$

and for the normal state:

$$Z_n = T\int_T^{T_0} \frac{c_n}{T}\,dT - \int_T^{T_0} c_n\,dT + AT + B$$

where A and B are arbitrary constants. Eq. (6) can be obtained by putting $Zs > Zn$.

2) P. Ehrenfest, Comm. Leiden, Supp. 75*b*, 1933, Nachtrag.

3) W. H. Keesom and J. A. Kok, l.c.

4) W. Tuyn and H. Kamerlingh Onnes, Comm. Leiden 174*a*, W. J. de Haas and J. Voogd l.c.

5) This verification is also due to Dr. Rutgers.

our expectation was correct for the neighbourhood of T_0 [1]).

But now the question arises: what happens if the supraconductor is not a long-shaped body orientated in the direction of the field; has one to expect that then supraconductivity will be disturbed entirely at lower temperatures and fieldstrenghts? A more careful examination of the situation shows, that this is not the thing, to be expected. For one must consider the possibility, that in part of the body supraconductivity will be disturbed, while it persists in other parts.

If we consider e.g. a sphere, we see that, as soon as $H_1 > \sqrt{5/9}\, H_2$ (H_2 may be obtained from (7)), the total Z-function will be smaller if part of the sphere is non-supraconductive (the part near the surface at the equator), than if the whole sphere is supraconductive. This is due to the fact, that k diminishes when the shape of the supraconductive part becomes ellipsoidical. If we raise the field more or the temperature higher, we shall see that the shape of the supraconductive part, which would correspond to the lowest total Z-function, becomes a long ellipsoid, orientated in the direction of the external field.

Assuming the supraconductive region in the body always to have such a shape, that the total Z-function has a minimum we shall find that when the field or the temperature are raised supraconductivity vanishes gradually, so that the last remainder is disturbed at the same field or temperature as in the ,,longitudional case". This is qualitatively in agreement with the results of DE HAAS and VOOGD for a transversal field in monocrystalline wires of tin [2]).

If we suppose, encouraged by the validity of RUTGERS' formula (8), that also farther from T_0 the experimental curve for longitudional disturbance is identical with the limitary curve (7), we can predict from the experimental curve the values of $\triangle c$ as a function of T.

It is recommendable to differentiate (7) to this end:

$$H_2\left(\frac{d H_2}{d T_2}\right) = -4\pi d \int_{T_2}^{T_0} \frac{\triangle c}{T}\, dT$$

---

[1]) P. M. v. ALPHEN made the interesting remark (see P. EHRENFEST, l.c.) that one thus would have to expect high jumps in the specific heats for $Bi_5 Tl_3$ and other alloys, which have high values of $d H_2/d T_2$.

[2]) W. J. DE HAAS and J. VOOGD, Comm. Leiden 212c, 1931.

part of the energydifference between the two states increases rapidly ³), but that it diminishes again at lower temperatures, so the difference of the specific heats $\triangle c$ changes its sign. This is in agreement with NERNST's theorem, saying that the entropies at $T = 0$ must be equal.

We further see from NERNST's theorem that $dH_2/dT_2 = 0$ at $T = 0$. This makes it quite easy to extrapolate the experimental disturbance curves to $T = 0$.

At $T = 0$ we get $\triangle W = H_0^2/8\pi d$, where H_0 is the threshold-value at $T = 0$. We get extrapolating the experimental curves, that this thermic energydifference at $T = 0$ is 0,0014 cal./mol. for Sn and 0,0021 cal./mol. for Hg.

The considerations, given above, are intended to give in principle a complete thermodynamic treatment of the transitions between states with $G = 0$ and the normal states.

They are incomplete in so far as the states with $G \neq 0$ have not been considered at all. It might be possible even now to make some speculations about the thermodynamics of these states, based upon the second law of thermodynamics and upon NERNST's law. On account of lack of experimental data we have not come to a convincing system of formulae, so we prefer to omit such speculations.

Another weak point is, that we made use of the experimental magnetic disturbance-curves, as if we were certain that they apply to $G = 0$. This is however not quite certain as the experimenters had the second and following times in a series of magnetic disturbances, probably G-values, corresponding with the fields at which the last remainder of resistance had vanished the previous time.

A third difficulty, already discussed, is that it is a priori not obvious why $\int dQ/T$ should be zero in our cyclical process. We mentioned on the other hand, that the disturbance does not make the impression of being connected with phenomena of retardation. It may be pointed out also, that non-supraconductive regions will be present near the threshold-value, due to deviations from the ideal very long ellipsoidical shape, which could serve as centres for beginning ,,evaporation'' (or melting) of the supraconductive state.

---

³) In analogy with the difference in the thermal conductivity.

At the fourth place, the gradual disturbance in bodies, which are not ellipsoids orientated in the direction of the field, has not been studied in detail. If calorimetric measurements will have been carried out for very simple shapes of bodies, it might be worth while to calculate exactly the gradual disturbance, assuming that the Z-function changes continuously during the gradual disturbance.

Finally we wish to point out that it is possible to describe the energetic phenomena connected with the persisting currents by assuming the existence of a susceptibility: $\chi = - 1/4 \pi d$ if we have not to do with rings. (more exactly: if *rot.* $E = 0$ in the body is a sufficient condition to secure that $\int E\, dl$ is zero along any closed line in the body. [1]))

Formally this ,,diamagnetic view'' is equivalent with the view, which only admits persisting currents at the surface; indeed the macroscopic distribution of currents is the same in the two images. Physically however it seems to make a difference whether electrons inside the metal move in circles perpendicular to H_1 or not. The solution of this dilemma must depend on the question, whether the persisting currents at the surface are in working order before a change in the magnetic field has propagated over a small distance in the body.

The author wishes to acknowledge thankfully, that he made acquaintance with the problems, treated above, when studying at the University of Leiden under the direction of Prof. Dr. W. J. de Haas. He also wishes to express his thanks to Mrs. Dr. G. L. de Haas—Lorentz, Prof. Dr. W. H. Keesom, Prof. Dr. A. D. Fokker and Dr. A. J. Rutgers for their kind interest in these considerations.

---

[1] E being any vector.

MARTINUS NIJHOFF — UITGEVER — 's-GRAVENHAGE

ARCHIVES DU MUSÉE TEYLER.

Série III, Vol. VI. 1928—1929. 3 fasc. XIX en 318 blz. gr. 8vo. *f* 13.—

INHOUD van afl. 1: H. A. LORENTZ, Application de la théorie des électrons aux propriétés des métaux. — K. LAMBRECHT, Fluorographische Beobachtungen an den „elastischen Fasern" des Pterosaurier-patagiums (mit 2 Tafeln). *f* 2.—

Afl. 2: A. D. FOKKER, Inleiding tot de golvings- en de quantum-mechanica. *f* 1.—

Afl. 3: A. SCHREUDER, Conodontes (Trogontherium) and Castor from the Teglian Clay compared with the Castoridae from other localities (with 16 plates). *f* 10.—

Série III, Vol. VII. fasc. 1. 1929. blz. 1—72. gr. 8vo. *f* 2.—

INHOUD: A. D. FOKKER, Over de akoestiek van zalen, van muziekinstrumenten en van de menschelijke stem. — M. NUYENS et G. TH. PHILIPPI, Sur la forme d'un réflecteur du son.

Série III, Vol. VII, fasc. 2. blz. 73—132. 1930. *f* 2.—

INHOUD: A. D. FOKKER, On the construction of sound reflectors. — A. D. FOKKER and M. J. O. STRUTT, Measurements on the acoustic efficiency of specially designed sound reflectors. With 3 plates. — A. D. FOKKER, Krachten en bewegingen. Zaterdagmiddagvoordrachten in November 1929.

Serie III, Vol. VII, fasc. 3. blz. 133—182. 1932. *f* 1.50

INHOUD: A. D. FOKKER en J. VAN DEN HANDEL, Bewegingen in vloeistoffen en gassen. Zaterdagmiddagvoordrachten. A. D. FOKKER, Theorie relativiste de l'interaction de deux particules chargées.

Série III, Vol. VII, fasc. 4, blz. 113—294. 1932. *f* 3.—

C. J. GORTER, Paramagnetische Eigenschaften von Salzen.

Van de vorige deelen zijn nog verkrijgbaar:

Série I, Vol. I—IV. 1866—1878. gr. 8vo.

Vol. I—III, elk 4 afl.; Vol. IV, 3 afl. (titel en inhoud ontbreekt). Per afl. *f* 4.—

Série II, Vol. IV—XII. 1893—1911. gr. 8vo.

Vol. IV—V, elk 4 afl.; Vol. VI, 5 afl.; Vol. VII, 4 afl.; Vol. VIII, 5 afl.; Vol. IX—X, elk 4 afl.; Vol. XI, 3 afl.; Vol. XII, 2 afl. Per afl. *f* 4.—

Série III, Vol. I. 1912. *f* 4.—; Vol. IV. 1919. *f* 6.—; Vol. V. 1922. *f* 5.—

In deze deelen is een aantal belangrijke verhandelingen opgenomen o. a. van: J. BOSSCHA. — Z. P. BOUMAN. — EUG. DUBOIS. — L. P. H. EYKMAN. — W. KAPTEYN. — W. R. H. KRANENBURG. — T. C. WINKLER. — P. ZEEMAN, e. a.

Overdrukken welke afzonderlijk verkrijgbaar zijn:

Lorentz, H. A., De electronentheorie. Voordrachten, gehouden in October 1918. Bewerkt door W. H. KEESOM. 1920. 76 blz. gr.8vo. (Série III, Vol. V.) *f* 2.—

—— Het magnetisme. Voordrachten, gehouden in Januari 1921. Bewerkt door W. H. KEESOM. 1922. 58 blz. gr. 8vo. *f* 2.— (Série III, Vol. V.)

Fokker, A. D., Inleiding tot de golvings- en de quantum-mechanica. Zaterdagmiddagvoordrachten in Maart 1928. 48 blz. gr. 8vo. (Série III, Vol. VI.) *f* 1.—

—— Over de akoestiek van zalen, van muziekinstrumenten en van de menschelijke stem. Zaterdagmiddagvoordrachten in Februari 1929. 64 blz. gr. 8vo. *f* 2.— (Série III, Vol. VII.)

—— Krachten en bewegingen. Zaterdagmiddagvoordrachten in November 1929, 46 blz. 54 fig. gr. 8vo. *f* 1.50 (Série III, Vol. VII).